

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
 4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Άσκηση 1. Να υπολογίσετε το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης των συναρτήσεων:

(α) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, με κέντρο το σημείο $(0, 0)$.

(β) $f(x, y) = \cos x \sin y$, με κέντρο το σημείο $(0, 0)$.

Υπόδειξη: (α) Υπολογίζουμε τις $f_x(x, y) = 2x \cos(x^2 + y^2)$, $f_y(x, y) = 2y \cos(x^2 + y^2)$ και στη συνέχεια τις

$$f_{xx}(x, y) = 2 \cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2),$$

$$f_{xy}(x, y) = -4xy \sin(x^2 + y^2),$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2).$$

Έπεται ότι $f(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$, $f_{xx}(0, 0) = 2$, $f_{xy}(0, 0) = 0$ και $f_{yy}(0, 0) = 2$. Συνεπώς,

$$T_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) = x^2 + y^2.$$

(β) Υπολογίζουμε τις $f_x(x, y) = -\sin x \sin y$, $f_y(x, y) = \cos x \cos y$ και στη συνέχεια τις

$$f_{xx}(x, y) = -\cos x \sin y, \quad f_{xy}(x, y) = -\sin x \cos y, \quad f_{yy}(x, y) = -\cos x \sin y.$$

Έπεται ότι $f(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 1$, $f_{xx}(0, 0) = 0$, $f_{xy}(0, 0) = 0$ και $f_{yy}(0, 0) = 0$. Συνεπώς,

$$T_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) = y.$$

□

Άσκηση 2. Να υπολογίσετε το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης των συναρτήσεων:

(α) $f(x, y) = (x + y)^2$, με κέντρο το σημείο $(0, 0)$.

(β) $g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$, με κέντρο το σημείο $(0, 0)$.

Υπόδειξη: (α) Υπολογίζουμε τις $f_x(x, y) = 2(x + y)$, $f_y(x, y) = 2(x + y)$ και στη συνέχεια τις

$$f_{xx}(x, y) = 2,$$

$$f_{xy}(x, y) = 2,$$

$$f_{yy}(x, y) = 2.$$

Έπεται ότι $f(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$, $f_{xx}(0, 0) = 2$, $f_{xy}(0, 0) = 2$ και $f_{yy}(0, 0) = 2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) \\ &= \frac{1}{2}(2x^2 + 2 \cdot 2xy + 2y^2) = (x + y)^2. \end{aligned}$$

(β) Υπολογίζουμε τις $f_x(x, y) = -\frac{2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$, $f_y(x, y) = -\frac{2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$ και στη συνέχεια τις

$$f_{xx}(x, y) = -2 \frac{y^2 - 3x^2 + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^3},$$

$$f_{xy}(x, y) = -2 \frac{x^2 - 3y^2 + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^3},$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{8xy}{(x^2 + y^2 + 1)^3}.$$

Έπεται ότι $f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$, $f_{xx}(0,0) = -2$, $f_{xy}(0,0) = 0$ και $f_{yy}(0,0) = -2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}((-2)x^2 + (-2)y^2) = 1 - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x,y) = (1+x)^y$, με κέντρο το σημείο $(0,2)$.

Υπόδειξη: Υπολογίζουμε τις $f_x(x,y) = y(1+x)^{y-1}$, $f_y(x,y) = (1+x)^y \ln(1+x)$ και στη συνέχεια τις

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= y(y-1)(1+x)^{y-2}, \\ f_{xy}(x,y) &= (1+y \ln(1+x))(1+x)^{y-1}, \\ f_{yy}(x,y) &= (1+x)^y \ln^2(1+x). \end{aligned}$$

Έπεται ότι $f(0,2) = 1$, $f_x(0,2) = 2$, $f_y(0,2) = 0$, $f_{xx}(0,2) = 2$, $f_{xy}(0,2) = 1$ και $f_{yy}(0,2) = 0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(0,2) + f_x(0,2)x + f_y(0,2)(y-2) + \frac{1}{2}(f_{xx}(0,2)x^2 + 2f_{xy}(0,2)x(y-2) + f_{yy}(0,2)(y-2)^2) \\ &= 1 + 2x + \frac{1}{2}(2x^2 + 2x(y-2)) = 1 + 2x + x^2 + xy - 2x = 1 + x^2 + xy. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 4. Να υπολογιστούν τα πολυώνυμα πρώτης και δεύτερης τάξης της $f(x,y) = \sqrt{x+4y-1}$ με κέντρο το $(5,3)$. Να συγκρίνετε τις προσεγγίσεις της $f(4.9,3.1)$ με την τιμή της συνάρτησης.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε αρχικά ότι $f(5,3) = 4$. Υπολογίζουμε τις $f_x(x,y) = \frac{1}{2}(x+4y-1)^{-1/2}$ απ' όπου βλέπουμε ότι $f_x(5,3) = 1/8$ και $f_y(x,y) = 2(x+4y-1)^{-1/2}$ απ' όπου βλέπουμε ότι $f_y(5,3) = 1/2$. Οι παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι $f_{xx}(x,y) = -\frac{(x+4y-1)^{-3/2}}{4}$, άρα $f_{xx}(5,3) = -1/256$, $f_{xy}(x,y) = -(x+4y-1)^{-3/2}$, άρα $f_{xy}(5,3) = -1/64$, και $f_{yy}(x,y) = -4(x+4y-1)^{-3/2}$, άρα $f_{yy}(5,3) = -1/16$. Έπεται ότι

$$T_1(x,y) = \frac{15}{8} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}y$$

και

$$T_2(x,y) = \frac{671}{512} + \frac{49}{256}x + \frac{49}{64}y - \frac{1}{512}x^2 - \frac{1}{64}xy - \frac{1}{32}y^2.$$

Έχουμε $T_1(4.9,3.1) = 4.0375000$, $T_2(4.9,3.1) = 4.0373242$ και $f(4.9,3.1) = 4.0373258$. Όπως είναι λογικό, η τετραγωνική προσέγγιση είναι καλύτερη. □

Άσκηση 5. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ δεύτερης τάξης με κέντρο το $(1,0)$ και εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x-1)^2 + y^2}$.

Υπόδειξη: Έχουμε

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

και

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\f_{yy}(x, y) &= \frac{2(x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\f_{xy}(x, y) &= (f_x)_y = \frac{-2x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$f_x(1, 0) = 2, \quad f_y(1, 0) = 0, \quad f_{xx}(1, 0) = -2, \quad f_{yy}(1, 0) = 2, \quad f_{xy}(1, 0) = 0$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ δεύτερης τάξης με κέντρο το $(1, 0)$ είναι το

$$\begin{aligned}T_2(x, y) &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)y + \frac{1}{2} (f_{xx}(1, 0)(x - 1)^2 + 2f_{xy}(1, 0)(x - 1)y + f_{yy}(1, 0)y^2) \\&= 2(x - 1) - (x - 1)^2 + y^2.\end{aligned}$$

Από το θεώρημα Taylor έχουμε ότι

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{\ln(x^2 + y^2) - (2(x - 1) - (x - 1)^2 + y^2)}{(x - 1)^2 + y^2} = 0.$$

Αν υπήρχε το $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x - 1)^2 + y^2}$, τότε θα υπήρχε και το

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{2(x - 1) - (x - 1)^2 + y^2}{(x - 1)^2 + y^2}$$

και τα δύο όρια θα ήταν ίσα. Όμως, το παραπάνω όριο δεν υπάρχει αφού για $x = 1 + u$ με $u \neq 0$, $u \rightarrow 0$ και $y = 0$ το όριο ισούται με

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{2u - u^2}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{2}{u} \right) - 1,$$

το οποίο δεν υπάρχει, αφού $\lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{u} \right) = +\infty$ ενώ $\lim_{u \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{u} \right) = -\infty$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x - 1)^2 + y^2}$ δεν υπάρχει. □

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ και $f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = 2$. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}.$$

Υπόδειξη: Το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης με κέντρο το $(0, 0)$ δίνεται από τον τύπο

$$T_2(x, y) = \frac{1}{2} (2x^2 + 2bxy + 2y^2) = x^2 + bxy + y^2,$$

όπου $b = f_{xy}(0, 0)$. Από το θεώρημα Taylor παίρνουμε ότι

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - T_2(x, y)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - x^2 - y^2 - bxy}{x^2 + y^2} = 0,$$

άρα θα πρέπει να ισχύει η

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{f(x,y)}{x^2+y^2} - 1 - b \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = 0. \quad (1)$$

Αν $b = 0$ τότε από την (1) παίρνουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} = 1.$$

Αν $b \neq 0$ τότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει. Πράγματι, αν το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} = \ell$ υπήρχε (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε από την (1) θα έπρεπε να υπάρχει και το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\ell-1}{b}$. Όμως, το όριο αυτό δεν υπάρχει αφού στην ευθεία $y = x$ έχουμε $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$, ενώ στην ευθεία $y = -x$ έχουμε $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}$. $\square$

Άσκηση 7. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xe^{y^2} + y \cos x - x - y}{|x| + |y|}.$$

Υπόδειξη: Θεωρούμε την $f(x,y) = xe^{y^2} + y \cos x$. Υπολογίζουμε τις $f_x(x,y) = e^{y^2} - y \sin x$ και $f_y(x,y) = 2xye^{y^2} + \cos x$. Έπεται ότι $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = 1$ και $f_y(0,0) = 1$. Συνεπώς,

$$T_1(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = x + y.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xe^{y^2} + y \cos x - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

και

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \leq 1$$

για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\frac{xe^{y^2} + y \cos x - x - y}{|x|+|y|} = \frac{xe^{y^2} + y \cos x - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \rightarrow 0$$

όταν $(x,y) \rightarrow (0,0)$ ως γινόμενο συνάρτησης που τείνει στο 0 με συνάρτηση απολύτως φραγμένη από 1. $\square$

Άσκηση 8. Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση. Υποθέτουμε τα εξής:

(α) $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και

(β) υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $|f_{xx}(x,y)|, |f_{xy}(x,y)|, |f_{yy}(x,y)| \leq M$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Αποδείξτε ότι $|f(x,y)| \leq \frac{M}{2} (|x| + |y|)^2$.

Υπόδειξη: Η ζητούμενη ανισότητα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο αν $(x,y) = (0,0)$. Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x,y) \neq (0,0)$. Από τον τύπο Taylor υπάρχει (ξ, η) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2} (f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2) \\ &= \frac{1}{2} (f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &\leq \frac{1}{2} (|f_{xx}(\xi, \eta)|x^2 + 2|f_{xy}(\xi, \eta)| \cdot |xy| + |f_{yy}(\xi, \eta)|y^2) \\ &\leq \frac{M}{2} (x^2 + 2|xy| + y^2) = \frac{M}{2} (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 9. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ C^{n+1} συνάρτηση τέτοια ώστε όλες οι μερικές της παράγωγοι τάξης $n+1$ είναι ίσες με 0. Αποδείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n .

Υπόδειξη: Το πολυώνυμο Taylor της f τάξης n με κέντρο το $(0, 0)$ δίνεται από τον τύπο

$$T_n(x, y) = f(0, 0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f_{x^{k-j}y^j}(0, 0) x^{k-j}y^j,$$

όπου $f_{x^{k-j}y^j}(0, 0)$ είναι η k -τάξης μερική παράγωγος της f στο $(0, 0)$, όπου παραγωγίζουμε j -φορές ως προς y και $k-j$ -φορές ως προς x (από το θεώρημα Schwarz δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία παραγωγίζουμε ως προς τις μεταβλητές x και y παρά μόνο το πλήθος των παραγωγίσεων). Από τον τύπο Taylor έχουμε ότι για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x, y) = T_n(x, y) + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} f_{x^{n+1-j}y^j}(\xi x, \xi y) x^{n+1-j}y^j.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $f_{x^{n+1-j}y^j} = 0$ για όλα τα $k = 0, \dots, n+1$, άρα $f(x, y) = T_n(x, y)$ για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Επειδή στο $(0, 0)$ έχουμε επίσης $T_n(0, 0) = f(0, 0)$, συμπεραίνουμε ότι $f(x, y) = T_n(x, y)$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n . □

Άσκηση 10. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0, 0) = 1$, $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 2$ και $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = f_{xy}(x, y) = 4$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Υπόδειξη: Από τον τύπο Taylor έχουμε ότι για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x, y) = T_1(x, y) + \frac{1}{2} [f_{xx}(\xi x, \xi y)x^2 + 2f_{xy}(\xi x, \xi y)xy + f_{yy}(\xi x, \xi y)y^2],$$

όπου

$$T_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

είναι το πολυώνυμο Taylor της f πρώτης τάξης με κέντρο το $(0, 0)$. Αντικαθιστώντας τα δεδομένα, έχουμε ότι

$$f(x, y) = 1 + x + 2y + \frac{1}{2} (4x^2 + 8xy + 4y^2) = 1 + x + 2y + 2x^2 + 4xy + 2y^2.$$

□

Άσκηση 11. Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες: (α) το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την f , δηλαδή $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, (β) $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = f_{xy}(x, y) \geq 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου για την f .

Υπόδειξη: Έστω $(x, y) \neq (0, 0)$. Από τον τύπο Taylor έχουμε ότι υπάρχει (ξ, η) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0, 0)$ και (x, y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2} (f_{xx}(\xi, \eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi, \eta)xy + f_{yy}(\xi, \eta)y^2) \\ &= f(0, 0) + \frac{1}{2} (f_{xx}(\xi, \eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi, \eta)xy + f_{yy}(\xi, \eta)y^2). \end{aligned}$$

Αφού $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} \geq 0$, θέτοντας

$$a = f_{xx}(\xi, \eta) = f_{yy}(\xi, \eta) = f_{xy}(\xi, \eta)$$

βλέπουμε ότι $a \geq 0$ και

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + \frac{1}{2} (f_{xx}(\xi, \eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi, \eta)xy + f_{yy}(\xi, \eta)y^2) \\ &= f(0, 0) + \frac{a}{2} (x^2 + 2xy + y^2) = f(0, 0) + \frac{a}{2} (x + y)^2 \geq f(0, 0). \end{aligned}$$

Αφού το (x, y) είναι τυχόν σημείο του $\mathbb{R}^2$ διαφορετικό από το $(0, 0)$, έπεται ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο $(0, 0)$. $\square$

Άσκηση 12. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^m(A)$, και $(a_1, a_2) \in A$. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor

$$T_m(x, y) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^{k-j} f}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(a_1, a_2) (x - a_1)^{k-j} (y - a_2)^j,$$

είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq m$ που έχει ίδια τιμή και τις ίδιες παραγώγους τάξης $1, \dots, m$ με την f στο (a_1, a_2) .

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\left. \frac{d^\ell (x - a)^i}{dx^\ell} \right|_{x=a} = \begin{cases} \ell! , & \text{για } i = \ell , \\ 0 , & \text{για } i \neq \ell . \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^{\ell+p} (x - a_1)^i (y - a_2)^j}{\partial x^\ell \partial y^p} \right|_{(x,y)=(a_1,a_2)} &= \left. \frac{d^\ell (x - a_1)^i}{dx^\ell} \right|_{x=a_1} \cdot \left. \frac{d^p (y - a_2)^j}{dy^p} \right|_{y=a_2} \\ &= \begin{cases} \ell! p! , & \text{για } (i, j) = (\ell, p) , \\ 0 , & \text{για } (i, j) \neq (\ell, p) . \end{cases} \end{aligned}$$

Για (ℓ, p) τέτοια ώστε $0 \leq \ell + p \leq m$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\ell+p} T_m}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1, a_2) &= \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \frac{\partial^j f}{\partial x^i \partial y^{j-i}}(a_1, a_2) \left. \frac{\partial^{\ell+p}}{\partial x^\ell \partial y^p} (x - a_1)^i (y - a_2)^j \right|_{x=a_1, y=a_2} \\ &= \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \frac{\partial^j f}{\partial x^i \partial y^{j-i}}(a_1, a_2) \left. \frac{d^\ell (x - a_1)^i}{dx^\ell} \right|_{x=a_1} \cdot \left. \frac{d^p (y - a_2)^{j-i}}{dy^p} \right|_{y=a_2} \end{aligned}$$

Οι όροι του αθροίσματος μηδενίζονται για $(i, j - i) \neq (\ell, p)$ δηλαδή $(i, j) \neq (\ell, \ell + p)$. Επομένως,

$$\frac{\partial^{\ell+p} T_m}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1, a_2) = \frac{1}{(\ell + p)!} \binom{\ell + p}{\ell} \frac{\partial^{\ell+p} f}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1, a_2) \ell! p! = \frac{\partial^{\ell+p} f}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1, a_2).$$

Για τη μοναδικότητα, έστω $P_m(x, y)$ πολυώνυμο βαθμού $\leq m$ με $\frac{\partial^{\ell+p} P_m}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1, a_2) = \frac{\partial^{\ell+p} f}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1, a_2)$. Τότε για το πολυώνυμο $R(x, y) = T_m(x, y) - P_m(x, y)$ βαθμού $\leq m$ θα ισχύει ότι

$$\frac{\partial^{\ell+p} R}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1, a_2) = \frac{\partial^{\ell+p} [T_m(a_1, a_2) - P_m(a_1, a_2)]}{\partial x^\ell \partial y^p} = 0,$$

για $0 \leq \ell + p \leq m$.

Έστω $\frac{\partial^j f}{\partial x^i \partial y^{j-i}}(a_1, a_2) = c_{i,j-i} \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$R(x, y) = \sum_{j=0}^m \left[\sum_{i=0}^j c_{i,j-i} (x - a_1)^i (y - a_2)^{j-i} \right]$$

άρα

$$0 = \frac{\partial^{\ell+p} R}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1, a_2) = c_{\ell,p} \ell! p!$$

για $0 \leq \ell + p \leq m$, το οποίο δείχνει ότι $R \equiv 0$. □

Άσκηση 13. Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση, A ανοικτό, και $a = (a_1, a_2) \in A$. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης με κέντρο το a είναι το μοναδικό πολυώνυμο δευτέρου βαθμού που ικανοποιεί την

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - T_2(x, y)}{\|(x, y) - (a_1, a_2)\|^2} = 0.$$

Υπόδειξη: Έστω $P_2(x, y)$ ένα άλλο πολυώνυμο βαθμού ≤ 2 με την ιδιότητα

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - P_2(x, y)}{\|(x, y) - (a_1, a_2)\|^2} = 0.$$

Τότε, η συνάρτηση $R(x, y) = T_2(x, y) - P_2(x, y)$ είναι πολυώνυμο βαθμού ≤ 2 τέτοιο ώστε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{R(x, y)}{\|(x, y) - (a_1, a_2)\|^2} = 0.$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$R(x, y) = A + B(x - a_1) + C(y - a_2) + D(x - a_1)^2 + E(x - a_1)(y - a_2) + F(y - a_2)^2.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{(x, a_2) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{R(x, a_2)}{(x - a_1)^2} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow a_1} \frac{A + B(x - a_1) + D(x - a_1)^2}{(x - a_1)^2} = 0 \implies A = B = D = 0.$$

Ομοίως

$$\lim_{(a_1, y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{R(a_1, y)}{(y - a_2)^2} = 0 \implies \lim_{y \rightarrow a_2} \frac{C(y - a_2) + F(y - a_2)^2}{(y - a_2)^2} = 0 \implies C = F = 0.$$

Τέλος, για $x = a_1 + t$, $y = a_2 + t$ έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(a_1 + t, a_2 + t)}{2t^2} = 0 \implies \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Et^2}{2t^2} = 0 \implies E = 0.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι $R \equiv 0$, δηλαδή $T_2 = P_2$. □