ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (2024-25)

Άσκηση 1. (α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = 4x^3y^2 + 2y$. Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $z = f(x, y)$ στο σημείο $(1, -2, 12)$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $e^{x-2y} + x^2 \sin z = 1$ στο σημείο $(2, 1, 0)$.

Άσκηση 2. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Θέτουμε $F(x, y) = g(f(x, y))$. Αποδείξτε ότι για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τα διανύσματα $\nabla f(x, y)$ και $\nabla F(x, y)$ είναι παράλληλα.

Άσκηση 3. Αν η συνάρτηση $f(u, v)$ είναι παραγωγίσιμη, αποδείξτε ότι για τη συνάρτηση

$$F(x, y, z) = x^2 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

ισχύει

$$xF_x + yF_y + zF_z = 2F.$$

Άσκηση 4. Έστω $f(u, v)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και

$$g(x, y) = f(x - y, y - x)\,.$$

Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $g_x(1, 1)$ και $g_y(1, 1)$, αν είναι γνωστό ότι $f_u(0, 0) = 2$ και $f_v(0, 0) = 1$.

Άσκηση 5. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $\alpha \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$u(x, t) = f(x - \alpha t) + g(x + \alpha t)\,.$$

Αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f_x(x, y)x + f_y(x, y)y \geq 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.

Άσκηση 7. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Έστω $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$F(x, y) = f(x, y, g(x, y))$$

(α) Να βρεθεί η παράγωγος της F συναρτήσει των μερικών παραγώγων της f και g.

(β) Αν $F(x, y) = 0$ για κάθε (x, y), να εκφράσετε τις μερικές παραγώγους της g συναρτήσει των μερικών παραγώγων της f.

Άσκηση 8. Έστω $F(x, y) = f(ax + by) + g\left(\dfrac{ax}{y}\right)$, με f, g C^2 πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής και a, b πραγματικές σταθερές. Να υπολογιστούν οι $F_{xx},\ F_{xy},\ F_{yx},\ F_{yy}$.

Άσκηση 9. Έστω $f(x,y)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την $f(x+t,y+t)=f(x,y)$ για όλα τα $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ και $t\in\mathbb{R}$.

(α) Αποδείξτε ότι για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ισχύει ότι $f_x(x,y)+f_y(x,y)=0$.

(β) Αν $f_x(0,0)\neq 0$ αποδείξτε ότι το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ δεν υπάρχει.

(γ) Αν η f είναι ειδικότερα C^2 (δηλαδή έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης) αποδείξτε ότι $f_{xx}(x,y)=f_{yy}(x,y)=-f_{xy}(x,y)$ για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 10. Έστω f μία C^2 συνάρτηση και $w=f(x,y)$. Αν $x=u+v$ και $y=u-v$, αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Άσκηση 11. Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

καλείται διαφορική εξίσωση Laplace και κάθε λύση της καλείται αρμονική συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ είναι αρμονική.

Άσκηση 12. (α) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης. Αποδείξτε ότι αν $x=r\cos\theta$ και $y=r\sin\theta$ είναι ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες, τότε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,.$$

(β) Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές λύσεις $f(x,y)$ της εξίσωσης Laplace σε δύο διαστάσεις (βλ. Άσκηση 11), οι οποίες εξαρτώνται μόνο από το $r=\sqrt{x^2+y^2}$, δηλαδή μόνο από την απόσταση του σημείου (x,y) από την αρχή των αξόνων.

Άσκηση 13. Σε αντιστοιχία με την Άσκηση 11, μια συνάρτηση f τριών μεταβλητών καλείται αρμονική αν ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση Laplace σε τρεις διαστάσεις, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0\,.$$

Αν η f είναι αρμονική και

$$2x=u^2-v^2\,,y=uv\,,z=w\,,$$

αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+(u^2+v^2)\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}=0\,.$$

Άσκηση 14. (α) Αποδείξτε ότι η $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $u(x,t)=e^{bt-ax}$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$, ικανοποιεί την εξίσωση διάχυσης $u_t=cu_{xx}$.

(β) Αποδείξτε ότι η $u(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ για $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ είναι αρμονική συνάρτηση.

(γ) Αποδείξτε ότι η $u(x,y) = e^{-x/2} f(5x-2y)$, για τυχούσα C^2 συνάρτηση f, επαληθεύει την

$$2u_x + 5u_y + u = 0 \ .$$

Άσκηση 15. (α) Αποδείξτε ότι η $u(x,y) = f(bx-ay)$, όπου $f \in C^2(\mathbb{R}$, επαληθεύει την εξίσωση

$$au_x + bu_y = 0 \ .$$

(β) Αποδείξτε ότι η $u(x,y) = f(bx-ay)e^{cx/a}$, όπου $f \in C^2(\mathbb{R})$, επαληθεύει την εξίσωση

$$au_x + bu_y = cu \ , \quad c \neq 0 \ .$$