

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Άσκηση 1. (α) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους ως προς x και y της συνάρτησης

$$f(x, y) = 5x^2y^3 + \sin(x^2y) + e^{xy}.$$

(β) Ομοίως για τη συνάρτηση $g(x, y) = x^y$, $x > 0$ και $y \in \mathbb{R}$.

(γ) Είναι οι παραπάνω συναρτήσεις παραγωγίσιμες;

Υπόδειξη: (α) Με απλό υπολογισμό βλέπουμε ότι

$$f_x(x, y) = 10xy^3 + 2xy \cos(x^2y) + ye^{xy} \quad \text{και} \quad f_y(x, y) = 15x^2y^2 + x^2 \cos(x^2y) + xe^{xy}.$$

(β) Γράφουμε την g στη μορφή $g(x, y) = e^{y \ln x}$ και με απλό υπολογισμό βλέπουμε ότι

$$g_x(x, y) = e^{y \ln x} \frac{y}{x} = x^y \frac{y}{x} = y x^{y-1} \quad \text{και} \quad g_y(x, y) = e^{y \ln x} \ln x = x^y \ln x.$$

(γ) Οι f, g είναι παραγωγίσιμες γιατί έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. □

Άσκηση 2. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = c$ για όλα τα μοναδιαία διανύσματα $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = c = 0$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε για κάθε μοναδιαίο $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ να ισχύει ότι $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = u_1^2$. Αποδείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) .

Υπόδειξη: (α) Θέτοντας $u = e_1$ και $u = e_2$ παίρνουμε $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = c$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 = c(u_1 + u_2)$ και άρα

$$c(u_1 + u_2) = c$$

για κάθε μοναδιαίο $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Θέτοντας $u = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ έχουμε ότι $c\sqrt{2} = c$ και άρα $c = 0$.

(β) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) , θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 = au_1 + bu_2,$$

δηλαδή η $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$ θα ήταν μια γραμμική συνάρτηση ως προς u . Αυτό οδηγεί σε άτοπο: αν $au_1 + bu_2 = u_1^2$ για κάθε μοναδιαίο (u_1, u_2) τότε θεωρώντας το $(u_1, u_2) = (0, 1)$ παίρνουμε $b = 0$, και η $au_1 = u_1^2$ προφανώς δεν ισχύει για κάθε μοναδιαίο (u_1, u_2) (εξηγήστε γιατί). □

Άσκηση 3. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μερικώς παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

(β) Έστω $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μερικώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\nabla f(x, y) = \nabla g(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x, y) = g(x, y) + c$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Υπόδειξη: (α) Σταθεροποιούμε $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ και για κάθε $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ γράφουμε

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = (f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2)) + (f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1)).$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $g(x) = f(x, y_2)$ και $h(y) = f(x_1, y)$ βρίσκουμε $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) = g(x_2) - g(x_1) = g'(\xi_1)(x_2 - x_1) = f_x(\xi_1, y_2)(x_2 - x_1) = 0$$

διότι $f_x(\xi_1, y_2) = 0$ από την υπόθεση, και

$$f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1) = h(y_2) - h(y_1) = h'(\xi_2)(y_2 - y_1) = f_y(x_1, \xi_2)(y_2 - y_1) = 0$$

διότι $f_y(x_1, \xi_2) = 0$ πάλι από την υπόθεση.

(β) Εφαρμόζουμε το (α) για την $f - g$. Παρατηρήστε ότι $\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g = 0$, άρα η $f - g$ είναι σταθερή. $\square$

Άσκηση 4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{2x^3 + 3xy^2 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$.

(α) Αποδείξτε ότι η είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Αποδείξτε, με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνση παραγώγου, ότι η $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$ υπάρχει για κάθε $u = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

(γ) Αποδείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Υπόδειξη: (α) Για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= \left| \frac{2x^3 + 3xy^2 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{2|x|^3}{x^2 + y^2} + \frac{3|x|y^2}{x^2 + y^2} + \frac{|y|^3}{x^2 + y^2} \\ &\leq \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \cdot |x| + \frac{3y^2}{x^2 + y^2}|x| + \frac{y^2}{x^2 + y^2}|y| \leq 2|x| + 3|x| + |y| = 5|x| + |y|. \end{aligned}$$

Η συνέχεια της f στο $(0, 0)$ έπεται από το κριτήριο παρεμβολής.

(β) Από τον ορισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3(2u_1^3 + 3u_1u_2^2 + u_2^3)}{t^2u_1^2 + t^2u_2^2}}{t} = 2u_1^3 + 3u_1u_2^2 + u_2^3.$$

(γ) Από το (α) για $u = e_1 = (1, 0)$ παίρνουμε $f_x(0, 0) = 2$. Ομοίως, για $u = e_2 = (0, 1)$ παίρνουμε $f_y(0, 0) = 1$. Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ θα έπρεπε να ισχύει η

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 = 2u_1 + u_2$$

και άρα, από το (α) θα είχαμε

$$2u_1^3 + 3u_1u_2^2 + u_2^3 = 2u_1 + u_2$$

για κάθε $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο: για παράδειγμα, αν $u_1 = \sqrt{3}/2$ και $u_2 = 1/2$ τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η παραπάνω ισότητα δεν ισχύει. $\square$

Άσκηση 5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } y = x^2 \text{ και } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

δηλαδή η f παίρνει την τιμή 0 σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ εκτός από τα σημεία $(x, y) \neq (0, 0)$ της παραβολής $y = x^2$, όπου λαμβάνει την τιμή 1. Δείξτε τα εξής.

(α) Η f είναι ασυνεχής στο $(0, 0)$ και άρα και μη παραγωγίσιμη.

(β) Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = 0$.

Υπόδειξη: (α) Κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$ το όριο της f στο $(0, 0)$ είναι ίσο με 1 ενώ κατά μήκος του x -άξονα το όριο της f στο $(0, 0)$ είναι ίσο με 0.

(β) Έστω $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ μοναδιαίο διάνυσμα. Αν $u = \pm e_1 = (\pm 1, 0)$ ή $u = \pm e_2 = (0, \pm 1)$ τότε είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε $t \neq 0$, το σημείο $tu = (tu_1, tu_2)$ δεν ανήκει στην παραβολή $y = x^2$. Άρα, $f(tu_1, tu_2) = 0 = f(0, 0)$ και κατά συνέπεια $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = 0$. Διαφορετικά, υπάρχει μοναδικό $t \neq 0$ τέτοιο ώστε το σημείο $tu = (tu_1, tu_2)$ να ανήκει στην παραβολή $y = x^2$. Πράγματι, το σημείο $tu = (tu_1, tu_2)$ ανήκει στην παραβολή $y = x^2$ αν και μόνο αν $tu_2 = t^2 u_1^2$, δηλαδή αν $t = u_2/u_1^2$. Τότε, όμως, για όλα τα $|t| < |u_2|/u_1^2$ θα ισχύει πάλι ότι $f(tu_1, tu_2) = 0$, οπότε και πάλι έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0.$$

□

Άσκηση 6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{|x| \sin x + y^3}{|x| + |y|}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$.

(α) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$.

(γ) Αποδείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Υπόδειξη: (α) Για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ έχουμε

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x| |\sin x| + |y|^3}{|x| + |y|} \leq \frac{|x|}{|x| + |y|} |\sin x| + \frac{|y|}{|x| + |y|} |y|^2 \leq |\sin x| + |y|^2.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ και $\lim_{y \rightarrow 0} y^2 = 0$, από την παραπάνω ανισότητα παίρνουμε ότι

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0),$$

και άρα η f είναι συνεχής.

(β) Από τον ορισμό των μερικών παραγώγων στο $(0, 0)$ έχουμε

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} = 1$$

και

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y^3}{y}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{|y|} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|^2}{|y|} = \lim_{y \rightarrow 0} |y| = 0.$$

(γ) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Όμως, πλησιάζοντας το $(0, 0)$ κινούμενοι στην ημιευθεία $y = x$ με $x > 0$, έχουμε

$$f(x, y) = f(x, x) = \frac{x \sin x + x^3}{2x} = \frac{\sin x + x^2}{2}$$

και άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x, x) - x}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x + x^2}{2} - x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 \right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$. □

Άσκηση 7. Εξετάστε ως προς την παραγωγισιμότητα στο $(0, 0)$ τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^4}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$.

Υπόδειξη: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ αν και μόνο αν είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ και επιπλέον

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Έχουμε

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

και

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Επομένως,

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{xy^4}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Πράγματι, από την ανισότητα $a^2 + b^2 \geq 2ab \geq ab$, $a, b \geq 0$, έπεται ότι $x^2 + y^4 \geq |x|y^2$ και άρα

$$\left| \frac{xy^4}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot |y| \leq |y|. \quad (1)$$

Από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

□

Άσκηση 8. Να βρεθούν $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{e^{xy} - c - ax - by}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} = 0.$$

Είναι τα a, b, c μονοσήμαντα ορισμένα;

Υπόδειξη: Η $f(x, y) = e^{xy}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $f_x(x, y) = ye^{xy}$ και $f_y(x, y) = xe^{xy}$ παντού στο $\mathbb{R}^2$, άρα είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ειδικότερα, αφού $f(1, 1) = f_x(1, 1) = f_y(1, 1) = e$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{e^{xy} - e - e(x-1) - e(y-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{e^{xy} + e - ex - ey}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} = 0$$

και το ζητούμενο οσχύει αν $c = -e$ και $a = b = e$.

Θα δείξουμε ότι τα a, b, c είναι μονοσήμαντα ορισμένα δείχνοντας ότι αν

$$(*) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{e^{xy} - \gamma - \alpha(x-1) - \beta(y-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} = 0$$

για κάποιους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ τότε $\alpha = \beta = \gamma = e$ (εξηγήστε γιατί αυτό είναι αρκετό). Μάλιστα, αρκεί να δείξουμε ότι $\gamma = f(1,1) = e$, γιατί τότε, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι αναγκαστικά $\alpha = f_x(1,1) = e$ και $\beta = f_y(1,1) = e$. Υποθέτοντας ότι ισχύει η $(*)$ και παίρνοντας $(x,y) = (1+t,1)$ όπου $t \rightarrow 0^+$, έχουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{1+t} - \gamma - \alpha t}{t} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{1+t} - \gamma}{t} = \alpha \in \mathbb{R}.$$

Έπεται ότι $\lim_{t \rightarrow 0^+} (e^{1+t} - \gamma) = 0$ (αλλιώς το όριο αριστερά θα ήταν ίσο με $+\infty$ αν $\gamma < e$ ή ίσο με $-\infty$ αν $\gamma > e$). Άρα, $\gamma = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{1+t} = e$. $\square$

Άσκηση 9. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \frac{x^5}{x^4 + y^6}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$ και $f(0,0) = 0$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(β) Δείξτε με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνση παραγώγου ότι η $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ υπάρχει για κάθε $u = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

(γ) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Υπόδειξη: (α) Παρατηρούμε ότι

$$|f(x,y)| \leq \left| \frac{x^5}{x^4 + y^6} \right| \leq f(x,y) = \frac{x^4}{x^4 + y^6} \cdot |x| \leq |x|$$

(β) Έστω $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|u\| = 1$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^5 u_1^5}{t^4 u_1^4 + t^6 u_2^6}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^5 u_1^5}{t^5 u_1^4 + t^7 u_2^6} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^5}{u_1^4 + t^2 u_2^6} = u_1.$$

(γ) Από το (α) για $u = e_1 = (1,0)$,

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) = 1,$$

και για $u = e_2 = (0,1)$,

$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_2}(0,0) = 0.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^5}{x^4+y^6} - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^6}{(x^4 + y^6)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \end{aligned}$$

Πράγματι,

$$\left| \frac{xy^6}{(x^4 + y^6)\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{xy^6}{(x^4 + y^6)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Μετατρέποντας σε πολικές συντεταγμένες ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^6}{(x^4 + y^6)\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos \theta \cdot \rho^6 \sin^6 \theta}{(\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^6 \sin^6 \theta)\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{\rho^2 \cdot \sin^6 \theta}{\cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \cdot \cos \theta \right) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Πράγματι έστω $\epsilon > 0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το θ : Αν $|\cos \theta| < \epsilon$ τότε

$$\left| \frac{\rho^2 \cdot \sin^6 \theta}{\cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \cdot \cos \theta \right| \leq |\cos \theta| < \epsilon$$

για οποιοδήποτε $\rho > 0$, ενώ αν $|\cos \theta| \geq \epsilon$ τότε

$$\left| \frac{\rho^2 \cdot \sin^6 \theta}{\cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \cdot \cos \theta \right| \leq \frac{\rho^2}{|\cos \theta|^3} \leq \frac{\rho^2}{\epsilon^3} < \epsilon$$

για $0 < \rho < \epsilon^2$.

Συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ($\delta = \epsilon^{5/2}$) τέτοιο ώστε αν $0 < \rho < \epsilon^{5/2}$

$$\left| \frac{\rho^2 \cdot \sin^6 \theta}{\cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \cdot \cos \theta \right| < \epsilon$$

και για κάθε $\theta > 0$. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$. □

Άσκηση 10. Έστω

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0, 0)$. Είναι η f συνεχής; Παραγωγίσιμη;

Υπόδειξη: Έχουμε

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

και

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ αν και μόνο αν είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ και επιπλέον

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

και

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2 \cdot t^2}{t^4 + t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 = 2,$$

άρα η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$, οπότε δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$. $\square$

Άσκηση 11. Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $z = y \cos(x - y)$, στο σημείο $(2, 2, 2)$.

Υπόδειξη: Η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$z = f(2, 2) + f_x(2, 2)(x - 2) + f_y(2, 2)(y - 2).$$

Έχουμε $f_x(x, y) = -y \sin(x - y)$ και $f_y(x, y) = \cos(x - y) + y \sin(x - y)$. Υπολογίζουμε τις $f(2, 2) = 2$, $f_x(2, 2) = 0$ και $f_y(2, 2) = 1$. Συνεπώς, η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι $z = 2 + (y - 2)$, δηλαδή $z = y$. $\square$

Άσκηση 12. (α) Αποδείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $xyz = 1$ σε ένα σημείο της επιφάνειας δεν είναι ποτέ οριζόντιο.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα $u = (u_1, u_2)$ για το οποίο μεγιστοποιείται η κατευθυνόμενη παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$.

Υπόδειξη: (α) Η επιφάνεια $xyz = 1$ είναι επιφάνεια στάθμης της $g(x, y, z) = xyz$, άρα έχει κάθετο διάνυσμα το $\nabla g(x_0, y_0, z_0) = (y_0 z_0, x_0 z_0, x_0 y_0)$ σε κάθε $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $x_0 y_0 z_0 = 1$. Αν για κάποιο τέτοιο σημείο (x_0, y_0, z_0) έχουμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο είναι οριζόντιο, τότε θα πρέπει το $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ να είναι παράλληλο προς το $(0, 0, 1)$. Όμως τότε $y_0 z_0 = x_0 z_0 = 0$, το οποίο είναι άτοπο γιατί θα είχαμε $x_0 y_0 z_0 = 0$ ενώ $x_0 y_0 z_0 = 1$.

(β) Έχουμε $f_x(x, y) = 3x^2 + y$ και $f_y(x, y) = 3y^2 + x$. Υπολογίζουμε το $\nabla f(1, 1) = (4, 4)$. Η κατευθυνόμενη παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$ μεγιστοποιείται όταν $u = \frac{\nabla f(1, 1)}{\|\nabla f(1, 1)\|_2} = \frac{(4, 4)}{4\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. $\square$

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν οι f και g έχουν την ίδια τιμή και τις ίδιες μερικές παραγώγους στο (x_0, y_0) , τότε τα γραφήματα τους έχουν το ίδιο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα γραφήματα τους εφάπτονται στο σημείο αυτό.

Άσκηση 13. Να βρείτε τα σημεία στα οποία εφάπτονται τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$ και $g(x, y) = x^2 - 3xy + 4x - 16$. Ποιό είναι το κοινό εφαπτόμενο επίπεδο;

Υπόδειξη: Έχουμε ότι $f_x = 2x - 2y$, $f_y = -2x - 2y$, $g_x = 2x - 3y + 4$ και $g_y = -3x$. Λύνοντας το σύστημα

$$2x - 2y = 2x - 3y + 4 \text{ και } -2x - 2y = -3x$$

βρίσκουμε $x = 8$ και $y = 4$ και αφού $f(8, 4) = g(8, 4) = -16$ τα γραφήματα εφάπτονται στο σημείο $(8, 4, -16)$. Το κοινό εφαπτόμενο επίπεδο είναι επομένως το $z = -16 + 8(x - 8) - 24(y - 4)$ ή ισοδύναμα $8x - 24y - z = -16$. $\square$

Άσκηση 14. Ένα έντομο βρίσκεται μέσα σε τοξικό περιβάλλον. Ο βαθμός τοξικότητας, στο σημείο (x, y) , δίνεται από τη συνάρτηση

$$T(x, y) = 2x^2 - 4y^2.$$

Το έντομο βρίσκεται στο σημείο $(-1, 2)$. Σε ποιά κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί για να βρεθεί το ταχύτερο δυνατόν σε περιοχή χαμηλότερης τοξικότητας;

Υπόδειξη: Σύμφωνα με τη θεωρία ο ρυθμός μεταβολής της T σε ένα σημείο (x_0, y_0) είναι ελάχιστος στην κατεύθυνση

$$\frac{-\nabla T(x_0, y_0)}{\|\nabla T(x_0, y_0)\|}.$$

Έχουμε $\nabla T(x_0, y_0) = (4x_0, -8y_0)$, άρα $\nabla T(-1, 2) = (-4, -16) = -(4, 16)$ και $\|\nabla T(-1, 2)\| = \sqrt{4^2 + 16^2} = 4\sqrt{1 + 4^2} = 4\sqrt{17}$. Επομένως, στη συγκεκριμένη περίπτωση το έντομο θα πρέπει να κινηθεί στην κατεύθυνση

$$\frac{-\nabla T(-1, 2)}{\|\nabla T(x_0, y_0)\|} = \frac{1}{4\sqrt{17}}(4, 16) = -\frac{1}{\sqrt{17}}(1, 4).$$

□

Άσκηση 15. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $u \in \mathbb{R}^2$. Αν $g(x) = f(\langle u, x \rangle)$, $x \in \mathbb{R}^2$ και $v \in \mathbb{R}^2$ μοναδιαίο διάνυσμα τέτοιο ώστε $v \perp u$, να δείξετε ότι

$$v \perp \nabla g(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^2.$$

Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της g στην κατεύθυνση v ;

Υπόδειξη: Αν $u = (a, b)$, $x = (x, y)$, τότε $g(x, y) = f(ax + by)$ και συνεπώς

$$g_x(x) = af'(ax + by) \text{ και } g_y(x) = bf'(ax + by).$$

Αν $v = (c, d)$, τότε αφού $v \perp u$ έχουμε ότι $ac + bd = 0$ και έπεται ότι

$$v \cdot \nabla g(x) = caf'(ax + by) + bdf'(ax + by) = (ac + bd)f'(ax + by) = 0.$$

Άρα

$$v \perp \nabla g(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^2.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της g στην κατεύθυνση v σε ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^2$ είναι η παράγωγος της g στην κατεύθυνση v στο σημείο x , η οποία είναι ίση με

$$\nabla g(x) \cdot v = 0.$$

□