ΘΕΜΑ 1ο

α) $t=\frac{x^2}{2}$, $y(x)=\tilde{y}(t)$, $y'(x)=\dot{\tilde{y}}(t)\,x$, $y''(x)=\dot{\tilde{y}}(t)+\ddot{\tilde{y}}(t)\,x^2$

η ΔΕ γίνεται $x\dot{\tilde{y}}+x^3\ddot{\tilde{y}}+2x^3\dot{\tilde{y}}-x\dot{\tilde{y}}+x^3\tilde{y}=2x^3e^{-t}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{\tilde{y}}+2\dot{\tilde{y}}+\tilde{y}=2e^{-t}$ με γενική λύση $\tilde{y}(t)=(At+B)e^{-t}+t^2e^{-t}$

$\Rightarrow y(x)=(\tilde{A}x^2+B)e^{-x^2/2}+\frac{x^4}{4}e^{-x^2/2}$

β) $y=xy'+y'^4$ ΔΕ Clairault. Θέτουμε $p(x)=y'(x)$

(*) $y=xp+p^4$ $\xrightarrow{\frac{d}{dx}}$ $p=p+(x+4p^3)\frac{dp}{dx}$ $\longrightarrow \frac{dp}{dx}=0 \Rightarrow p(x)=C_1$ (**)

$\longrightarrow x+4p^3=0$ (***)

(*), (**) $\Rightarrow y(x)=C_1x+C_1^4$ γενική λύση (και όχι $y=C_1x+B$ όπως πολλοί/ες απαντούν)

(*), (***) $\Rightarrow \begin{cases} x=-4p^3 \\ y=-3p^4 \end{cases} \Rightarrow y=-3\left(\frac{x}{4}\right)^{4/3}$ ιδιάζουσα λύση (και όχι $y=-3\left(\frac{x}{4}\right)^{4/3}+C$)

Η παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ λύση αποτελεί συνένωση της γενικής λύσης για $C_1=0$ και της ιδιάζουσας

$y(x)=\begin{cases} 0, & x\geq 0 \\ -3\left(\frac{x}{4}\right)^{4/3}, & x<0 \end{cases}$ (τουλάχιστον δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $x_0=0$)

ΘΕΜΑ 2ο

(α) $y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^n$ η ΔΕ γίνεται $\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+2}(n+2)(n+1)t^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n n(n-1)t^n+4\sum_{n=0}^{\infty}c_n nt^n+2\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^n=0$

$\Rightarrow (n+2)(n+1)c_{n+2}+\underbrace{(n^2+3n+2)}_{(n+1)(n+2)}c_n=0 \Rightarrow c_{n+2}=-c_n,\ n\geq 0$

Άρα $y_1(t)=c_0(1-t^2+t^4-t^6+\cdots)=c_0\frac{1}{1+t^2}$

$y_2(t)=tc_1(1-t^2+t^4-t^6+\cdots)=c_1\frac{t}{1+t^2}$

β) Μετασχ. Laplace

$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+\frac{d^2}{ds^2}(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))-4\frac{d}{ds}(sY(s)-y(0))+2Y(s)=\frac{2}{s}+\frac{24}{s^3}$

$\Rightarrow s^2Y''(s)+4sY'(s)+2Y(s)+s^2Y(s)-4Y(s)-4Y'(s)s+2Y(s)=\frac{2}{s}+\frac{24}{s^3}$

$\Rightarrow Y''(s)+Y(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{24}{s^5} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} (t^2+1)y(t)=t^4+t^2 \Rightarrow y(t)=t^2.$