



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ασκήσεις Κυρτής Ανάλυσης

Αθήνα – 2025

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Συνδυαστικά θεωρήματα για κυρτά σύνολα στον Ευκλείδειο χώρο	7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1. Δίνονται δύο ορθογώνια $I_1 = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ και $I_2 = \prod_{i=1}^n [c_i, d_i]$ στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία δεν επικαλύπτονται (έχουν ξένα εσωτερικά). Αποδείξτε ότι υπάρχουν $j \in \{1, \dots, n\}$ και $t \in \mathbb{R}$ ώστε το υπερεπίπεδο $\{x : x_j = t\}$ να διαχωρίζει τα I_1 και I_2 (δηλαδή, είτε $I_1 \subseteq \{x : x_j \leq t\}$ και $I_2 \subseteq \{x : x_j \geq t\}$ ή $I_1 \subseteq \{x : x_j \geq t\}$ και $I_2 \subseteq \{x : x_j \leq t\}$).

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι το ζητούμενο ισχύει αν υπάρχει $j \in \{1, \dots, n\}$ ώστε $b_j \leq c_j$ ή $d_j \leq a_j$.

Από την άλλη πλευρά, αν αυτό δεν ισχύει, τότε για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$ έχουμε $(a_j, b_j) \cap (c_j, d_j) \neq \emptyset$ και επιλέγοντας $y_j \in (a_j, b_j) \cap (c_j, d_j)$ βρίσκουμε σημείο $y = (y_1, \dots, y_n) \in \text{int}(I_1) \cap \text{int}(I_2)$, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

2. Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, συμμετρικό ως προς το 0. Θεωρούμε $\vartheta \in S^{n-1}$ και τη συνάρτηση

$$f_\vartheta(t) = |K \cap (\vartheta^\perp + t\vartheta)|.$$

Αποδείξτε ότι

$$f_\vartheta(0) \geq f_\vartheta(t)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Φυλλάδιο 1.

3. (το Λήμμα του Borell) Έστω B κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν A είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ώστε το $A \cap B$ να έχει όγκο, ορίζουμε

$$\mu_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

(α) Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0. Αποδείξτε ότι για κάθε $t > 1$ ισχύει ο εγκλεισμός

$$\mathbb{R}^n \setminus M \supseteq \frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus tM) + \frac{t-1}{t+1}M.$$

(β) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mu_B(M) = a > 0$. Χρησιμοποιώντας το (α) και την ανισότητα Brunn-Minkowski αποδείξτε ότι, για κάθε $t > 1$,

$$1 - \mu_B(tM) \leq a \left(\frac{1-a}{a} \right)^{(t+1)/2}.$$

Συμπέρασμα: Αν $\mu_B(M) = a > 1/2$, δηλαδή αν το M τέμνει «παραπάνω από το μισό» B , τότε το ποσοστό του B που μένει έξω από το tM φθίνει εκθετικά στο 0 καθώς το $t \rightarrow \infty$ (για παράδειγμα, αν $\mu_B(M) = 2/3$ τότε $1 - \mu_B(tM) \leq 2^{-t/2}$ για κάθε $t > 1$).

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \notin tM$ και $y \in M$. Θα δείξουμε ότι $\frac{2}{t+1}x + \frac{t-1}{t+1}y \notin M$. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα και θέτουμε $z = \frac{2}{t+1}x + \frac{t-1}{t+1}y$. Τότε $z \in M$ και λύνοντας ως προς x έχουμε

$$x = t \left(\frac{t+1}{2t}z + \frac{t-1}{2t}(-y) \right) \in tM$$

διότι $-y \in M$ αφού το M είναι συμμετρικό ως προς το 0, οι αριθμοί $\frac{t+1}{2t}$ και $\frac{t-1}{t+1}$ ανήκουν στο $(0,1)$ και το άθροισμά τους είναι ίσο με 1. Καταλήξαμε στην $x \in tM$, επομένως έχουμε άτοπο.

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το B είναι κυρτό, ελέγχουμε ότι

$$B \cap \left(\frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus tM) + \frac{t-1}{t+1}M \right) \supseteq \frac{2}{t+1}B \cap (tM)^c + \frac{t-1}{t+1}B \cap M,$$

και παίρνοντας υπ' όψιν τον προηγούμενο εγκλεισμό συμπεραίνουμε ότι

$$B \cap M^c \supseteq \frac{2}{t+1}B \cap (tM)^c + \frac{t-1}{t+1}B \cap M.$$

Εφαρμόζοντας τώρα την ανισότητα Brunn-Minkowski, παίρνουμε

$$|B \cap M^c| \geq |B \cap (tM)^c|^{\frac{2}{t+1}} \cdot |B \cap M|^{\frac{t-1}{t+1}}.$$

Ισοδύναμα,

$$|B| \mu_B(M^c) \geq (|B| \mu_B((tM)^c))^{\frac{2}{t+1}} (|B| \mu_B(M))^{\frac{t-1}{t+1}}.$$

Δηλαδή,

$$\mu_B(M^c) \geq (\mu_B((tM)^c))^{\frac{2}{t+1}} (\mu_B(M))^{\frac{t-1}{t+1}}.$$

Θέτοντας $\mu_B(M) = a$ στην τελευταία ανισότητα, έχουμε

$$1 - a \geq (1 - \mu_B(tM))^{\frac{2}{t+1}} a^{\frac{t-1}{t+1}},$$

απ' όπου προκύπτει η

$$1 - \mu_B(tM) \leq a \left(\frac{1-a}{a} \right)^{(t+1)/2}.$$

4. Αυτή η άσκηση δείχνει ότι (για μεγάλες διαστάσεις) δύο υποσύνολα της μοναδιαίας Ευκλείδειας μπάλας μπορούν να έχουν «σχετικά μεγάλη» απόσταση μόνο αν κάποιο από τα δύο

είναι «πολύ μικρό».

Έστω A και C δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα της B_2^n . Υποθέτουμε ότι

$$d(A, C) = \min\{\|a - c\|_2 : a \in A, c \in C\} = \rho > 0.$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$\frac{A + C}{2} \subseteq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} B_2^n.$$

[Υπόδειξη: Θεωρήστε $a \in A$ και $c \in C$, και χρησιμοποιήστε τον κανόνα του παραλληλογράμμου.]

(β) Αποδείξτε ότι

$$\min\{|A|, |C|\} \leq \exp(-\rho^2 n/8) |B_2^n|.$$

Υπόδειξη. Φυλλάδιο 1.

5. Έστω K και T δύο συμμετρικά (ως προς το 0) κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$.

(α) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2}[K \cap (x + T)] + \frac{1}{2}[K \cap (-x + T)] \subseteq K \cap T$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

(β) Αποδείξτε ότι $|K \cap (x + T)| \leq |K \cap T|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Υπόδειξη. Φυλλάδιο 1.

Ορισμοί για τις ασκήσεις 6–9. Έστω K και T κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Θέλουμε να εκτιμήσουμε το ελάχιστο πλήθος μεταφορών $x_i + T$ του T που η ένωσή τους καλύπτει το K . Μπορούμε να ζητήσουμε τα «κέντρα» x_i να ανήκουν στο K ή να επιλέγονται ελεύθερα στο χώρο. Έτσι, ορίζουμε

$$\bar{N}(K, T) = \min \left\{ N \in \mathbb{N} \mid \exists x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n : K \subseteq \bigcup_{i=1}^N (x_i + T) \right\}$$

και

$$N(K, T) = \min \left\{ N \in \mathbb{N} \mid \exists x_1, \dots, x_N \in K : K \subseteq \bigcup_{i=1}^N (x_i + T) \right\}.$$

Λόγω συμπάγειας, οι αριθμοί κάλυψης $\bar{N}(K, T)$ και $N(K, T)$ ορίζονται καλά.

6. Αποδείξτε ότι αν K , T και M είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\bar{N}(K, M) \leq \bar{N}(K, T) \cdot \bar{N}(T, M).$$

Υπόδειξη. Αν $\bar{N}(K, T) = k$ και $\bar{N}(T, M) = m$, υπάρχουν $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^k (x_i + T)$ και υπάρχουν $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T \subseteq \bigcup_{j=1}^m (y_j + M)$. Αν θεωρήσουμε τα σημεία $x_1 + y_1, x_1 + y_2, \dots, x_1 + y_m, \dots, x_k + y_1, \dots, x_k + y_m$ τότε αυτά είναι το πολύ km σημεία του $\mathbb{R}^n$ και ισχύει $K \subseteq \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^m (x_i + y_j + M)$. Δηλαδή το K καλύπτεται από $s \leq km$ το πλήθος μεταφορές του M . Αυτό σημαίνει ότι $\bar{N}(K, M) \leq km$.

7. Από τους ορισμούς βλέπουμε εύκολα ότι

$$\bar{N}(K, T) \leq N(K, T).$$

Αποδείξτε ότι: αν τα K και T είναι συμμετρικά ως προς το 0, τότε

$$N(K, 2T) \leq \bar{N}(K, T).$$

Υπόδειξη. Έστω $m = \bar{N}(K, T)$. Τότε, υπάρχουν $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m (x_i + T)$. Από τον ορισμό του m (το γεγονός ότι είναι το ελάχιστο πλήθος μεταφορών του T που η ένωσή τους καλύπτει το K) προκύπτει εύκολα ότι για κάθε $i = 1, \dots, m$ ισχύει $K \cap (x_i + T) \neq \emptyset$.

Για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$ επιλέγουμε $y_i \in K \cap (x_i + T)$. Θα δείξουμε ότι $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m (y_i + 2T)$, απ' όπου έπεται άμεσα ότι $N(K, 2T) \leq m$.

Έστω $z \in K$. Τότε, υπάρχουν $i \in \{1, \dots, m\}$ και $t \in T$ ώστε $z = x_i + t$. Από την επιλογή του y_i υπάρχει $s \in T$ ώστε $y_i = x_i + s$. Τότε, $z = y_i + (t - s)$ και $t - s \in T + T = 2T$ διότι το T είναι συμμετρικό ως προς το 0. Δηλαδή $z \in y_i + 2T$.

8. Έστω K ένα συμμετρικό (ως προς το 0) κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ένας τρόπος για να εκτιμήσουμε τον αριθμό κάλυψης $N(K, \rho B_2^n)$ είναι ο εξής. Θεωρούμε ένα υποσύνολο $S = \{x_1, \dots, x_N\}$ του K με την εξής ιδιότητα:

$$(*) \text{ αν } i \neq j \text{ τότε } \|x_i - x_j\|_2 \geq \rho.$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$N \leq \frac{|K + \frac{\rho}{2} B_2^n|}{|\frac{\rho}{2} B_2^n|}.$$

(β) Αποδείξτε ότι: για κάθε $\rho > 0$ υπάρχει μεγιστικό $S \subset K$ που ικανοποιεί την (*). Με τον όρο «μεγιστικό» εννοούμε ότι το S ικανοποιεί την (*) αλλά αν προσθέσουμε οποιοδήποτε άλλο σημείο $z \in K \setminus S$ στο S , τότε το $S \cup \{z\}$ δεν ικανοποιεί την (*). Λέμε ότι το S είναι ένα ρ -δίκτυο.

(γ) Αποδείξτε ότι αν $S = \{x_1, \dots, x_N\}$ είναι ένα ρ -δίκτυο στο K , τότε

$$N(K, \rho B_2^n) \leq N.$$

Υπόδειξη. (α) Το σύνολο $K + \frac{\rho}{2} B_2^n$ περιέχει τις μπάλες $x_i + \frac{\rho}{2} B_2^n$, $i = 1, 2, \dots, N$ οι οποίες έχουν όλες όγκο ίσο με $|B_2^n|$ (ο όγκος είναι αναλλοίωτος ως προς μεταφορές). Οι μπάλες $x_i + \frac{\rho}{2} B_2^n$ έχουν ξένα εσωτερικά (αυτό προκύπτει από την υπόθεση ότι $\|x_i - x_j\|_2 \geq \rho$ αν $i \neq j$). Από τη μονοτονία του όγκου έχουμε

$$\left| \bigcup_{i=1}^N (x_i + \frac{\rho}{2} B_2^n) \right| \leq |K + \frac{\rho}{2} B_2^n|$$

και από την προσθετικότητα του όγκου,

$$N \left| \frac{\rho}{2} B_2^n \right| \leq \left| K + \frac{\rho}{2} B_2^n \right|.$$

Έπεται ότι

$$N \leq \frac{\left| K + \frac{\rho}{2} B_2^n \right|}{\left| \frac{\rho}{2} B_2^n \right|}.$$

(β) Θεωρούμε όλα τα υποσύνολα $T = \{x_1, \dots, x_k\}$ του K που ικανοποιούν την (*). Από το (α) κάθε τέτοιο T έχει πλήθος στοιχείων φραγμένο από $\frac{|K + \frac{\rho}{2} B_2^n|}{|\frac{\rho}{2} B_2^n|}$. Συνεπώς, ορίζεται ο

$$k_0 := \max\{k : \text{υπάρχει } T = \{x_1, \dots, x_k\} \subset K \text{ που ικανοποιεί την } (*)\}.$$

Κάθε $S \subset K$ που ικανοποιεί την (*) και έχει πλήθος στοιχείων $|S| = k_0$ είναι μεγιστικό (εξηγήστε γιατί).

(γ) Αν $S = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ είναι ένα ρ -δίκτυο στο K , τότε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \rho)$. Πράγματι, αν υπήρχε $x \in K$ ώστε $\|x - x_i\|_2 \geq \rho$ για κάθε $i = 1, \dots, N$, τότε το $S \cup \{x\}$ θα ικανοποιούσε την (*) και θα είχε πλήθος στοιχείων μεγαλύτερο από αυτό του S , αλλά αυτό δεν μπορεί να συμβεί αφού το S είναι μεγιστικό ως προς αυτή την ιδιότητα. Άρα, υπάρχει κάποιο $x_i \in S$ ώστε $\|x - x_i\|_2 < \rho$, δηλαδή $x \in B(x_i, \rho)$.

Αφού $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \rho)$, από τον ορισμό του αριθμού κάλυψης παίρνουμε $N(K, \rho B_2^n) \leq N$.

9. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\rho \in (0, 1)$,

$$N(B_2^n, \rho B_2^n) \leq \left(1 + \frac{2}{\rho}\right)^n.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε την Άσκηση 8 με $K = B_2^n$. Έχουμε $|B_2^n + \frac{\rho}{2} B_2^n| = (1 + \frac{\rho}{2})^n |B_2^n|$ και $|\frac{\rho}{2} B_2^n| = (\frac{\rho}{2})^n |B_2^n|$. Αντικαθιστώντας, παίρνουμε

$$N(B_2^n, \rho B_2^n) \leq \frac{(1 + \frac{\rho}{2})^n |B_2^n|}{(\frac{\rho}{2})^n |B_2^n|} = \left(1 + \frac{2}{\rho}\right)^n.$$

10. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\|x\|_2^2/2}$$

και για κάθε μη κενό Borel σύνολο A στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\gamma_n(A) := \int_A \gamma_n(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|x\|_2^2/2} dx.$$

Το γ_n είναι το μέτρο του Gauss στον $\mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Prékopa-Leindler αποδείξτε ότι: αν A, B είναι μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0, 1)$, τότε

$$\gamma_n(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq (\gamma_n(A))^\lambda (\gamma_n(B))^{1-\lambda}.$$

Υπόδειξη. Φυλλάδιο 1.

11. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό, κυρτό και συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$e^{-\|x\|_2^2/2} \gamma_n(A) \leq \gamma_n(A+x) \leq \gamma_n(A).$$

Υπόδειξη. Φυλλάδιο 1.

12.** Έστω $S = \{x_1, \dots, x_N\} \subset S^{n-1}$ με την εξής ιδιότητα: αν $i \neq j$ τότε $\|x_i - x_j\|_2 \geq \sqrt{2}$. Αποδείξτε ότι $N \leq 2n$.

Υπόδειξη. Αργότερα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συνδυαστικά θεωρήματα για κυρτά σύνολα στον Ευκλείδειο χώρο

1. Έστω A μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι η κυρτή θήκη $\text{conv}(A)$ του A είναι ανοικτό σύνολο.

Υπόδειξη. Έστω $x \in \text{conv}(A)$. Υπάρχουν $a_1, \dots, a_m \in A$ και $t_i > 0$ με $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ ώστε $x = t_1 a_1 + \dots + t_m a_m$. Αφού το A είναι ανοικτό, για κάθε $i = 1, \dots, m$ μπορούμε να βρούμε $\delta_i > 0$ ώστε $B(a_i, \delta_i) \subseteq A$. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\} > 0$ και θα δείξουμε ότι $B(x, \delta) \subseteq \text{conv}(A)$. Έστω $y \in B(x, \delta)$. Αν $u = y - x$ τότε $a_i + u \in B(a_i, \delta) \subseteq B(a_i, \delta_i) \subseteq A$ για κάθε $i = 1, \dots, m$. Συνεπώς, $\sum_{i=1}^m t_i(a_i + u) \in \text{conv}(A)$. Όμως,

$$\sum_{i=1}^m t_i(a_i + u) = \sum_{i=1}^m t_i a_i + \left(\sum_{i=1}^m t_i \right) u = x + u = y.$$

Δηλαδή, $y \in \text{conv}(A)$.

2. (α) Έστω S μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι τα S και $\text{conv}(S)$ έχουν την ίδια διάμετρο.

(β) Έστω S, T μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι

$$\text{conv}(S + T) = \text{conv}(S) + \text{conv}(T).$$

(γ) Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι $\text{conv}(\text{int}(S)) \subseteq \text{int}(\text{conv}(S))$. Ισχύει πάντα ισότητα;

Υπόδειξη. Φυλλάδιο 1.

3. Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$ και έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$ δύο σημεία που **δεν** ανήκουν στην κυρτή θήκη $\text{conv}(S)$ του S . Αποδείξτε ότι αν $x \in \text{conv}(S \cup \{y\})$ και $y \in \text{conv}(S \cup \{x\})$ τότε $x = y$.

Υπόδειξη. Φυλλάδιο 1.

4. Δίνονται ευθύγραμμα τμήματα $I_1, \dots, I_m$ στον $\mathbb{R}^2$ τα οποία περιέχονται στις διακεκρωμένες παράλληλες ευθείες $\ell_1, \dots, \ell_m$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, m\}$ υπάρχει ευθεία που τέμνει τα I_{i_1} , I_{i_2} και I_{i_3} . Αποδείξτε ότι υπάρχει ευθεία που τέμνει όλα τα διαστήματα $I_1, \dots, I_m$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $I_1, \dots, I_m$ είναι παράλληλα στον y -άξονα. Αφού περιέχονται σε διακεκρωμένες ευθείες, υπάρχουν $x_1, \dots, x_m$ διαφορετικά ανά δύο και $c_i < d_i$, $i = 1, \dots, m$ στο $\mathbb{R}$ ώστε

$$I_i = \{(x_i, y) : c_i \leq y \leq d_i\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Ορίζουμε $C_1, \dots, C_m \subseteq \mathbb{R}^2$ θέτοντας

$$C_i = \{(a, b) : c_i \leq ax_i + b \leq d_i\}.$$

Δηλαδή, $(a, b) \in C_i$ αν και μόνο αν η ευθεία $y = ax + b$ τέμνει το I_i . Από την υπόθεση, για κάθε $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, m\}$ ισχύει $C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap C_{i_3} \neq \emptyset$. Επιπλέον, κάθε C_i είναι κυρτό σύνολο: αν $(a, b) \in C_i$ και $(a_1, b_1) \in C_i$ τότε $c_i \leq ax_i + b \leq d_i$ και $c_i \leq a_1x_i + b_1 \leq d_i$ οπότε, για κάθε $t \in (0, 1)$ ισχύει

$$c_i = (1-t)c_i + tc_i \leq (1-t)(ax_i + b) + t(a_1x_i + b_1) \leq (1-t)d_i + td_i = d_i,$$

δηλαδή $((1-t)a + ta_1, (1-t)b + tb_1) \in C_i$. Τώρα, το ζητούμενο προκύπτει από το θεώρημα του Helly στον $\mathbb{R}^2$: υπάρχουν a, b ώστε $(a, b) \in C_1 \cap \dots \cap C_m$, το οποίο σημαίνει ότι η ευθεία $y = ax + b$ τέμνει όλα τα ευθύγραμμα τμήματα I_i .

5. Δίνονται κυρτά σύνολα $A_1, \dots, A_m$ στον $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i, j \in \{1, \dots, m\}$ υπάρχει ευθεία παράλληλη στον x -άξονα που τέμνει τα A_i και A_j . Αποδείξτε ότι υπάρχει ευθεία παράλληλη στον x -άξονα που τέμνει όλα τα σύνολα $A_1, \dots, A_m$.

Υπόδειξη. Φυλλάδιο 1.

6. Έστω $m \geq n+1$, $d > 0$ και $C_1, \dots, C_m$ μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: αν $1 \leq i_1 < \dots < i_{n+1} \leq m$ τότε υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε $d(y, C_{i_j}) \leq d$ για κάθε $j = 1, \dots, n+1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $d(x, C_i) \leq d$ για κάθε $i = 1, \dots, m$.

Υπόδειξη. Για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$ ορίζουμε

$$B_i = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, C_i) \leq d\}.$$

Παρατηρήστε ότι κάθε B_i είναι κυρτό: έστω $y_1, y_2 \in B_i$, $t \in (0, 1)$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in C_i$ ώστε $\|y_1 - x_1\|_2 < d + \varepsilon$ και $\|y_2 - x_2\|_2 < d + \varepsilon$. Αφού το C_i είναι κυρτό, έχουμε $(1-t)x_1 + tx_2 \in C_i$

και

$$\begin{aligned} \|((1-t)y_1 + ty_2) - ((1-t)x_1 + tx_2)\|_2 &= \|(1-t)(y_1 - x_1) + t(y_2 - x_2)\|_2 \\ &\leq (1-t)\|y_1 - x_1\|_2 + t\|y_2 - x_2\|_2 < d + \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, $d((1-t)y_1 + ty_2, C_i) < d + \varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε $d((1-t)y_1 + ty_2, C_i) \leq d$, δηλαδή $(1-t)y_1 + ty_2 \in B_i$.

Από την υπόθεση, αν $1 \leq i_1 < \dots < i_{n+1} \leq m$ υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε $d(y, C_{i_j}) \leq d$ για κάθε $j = 1, \dots, n+1$, δηλαδή $y \in B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_{n+1}}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Helly για τα B_i , βρίσκουμε $x \in B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m$. Τότε, $d(x, C_i) \leq d$ για κάθε $i = 1, \dots, m$.

7. Δίνονται $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k \in S^{n-1}$ και $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το κυρτό πολύεδρο

$$P = \bigcap_{i=1}^k \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \vartheta_i \rangle \leq t_i\}$$

είναι μη κενό και φραγμένο. Αποδείξτε ότι: αν το υπερεπίπεδο $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \vartheta \rangle = t\}$ (όπου $\vartheta \in S^{n-1}$ και $t \in \mathbb{R}$) ικανοποιεί την $P \cap H = \emptyset$, τότε υπάρχουν $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq k$ ώστε το $P' = \bigcap_{j=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \vartheta_{i_j} \rangle \leq t_{i_j}\}$ να ικανοποιεί τις $P_1 \supseteq P$ και $P' \cap H = \emptyset$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $C_0 = H$ και $C_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \vartheta_i \rangle \leq t_i\}$, $i = 1, \dots, k$. Τα σύνολα $C_0, C_1, \dots, C_k$ είναι κυρτά και από την υπόθεση έχουμε $C_0 \cap C_1 \cap \dots \cap C_k = \emptyset$. Από το θεώρημα του Helly υπάρχουν $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_n \leq k$ ώστε $C_{i_0} \cap C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_{n+1}} = \emptyset$. Παρατηρούμε ότι $i_0 = 0$: διαφορετικά,

$$C_{i_0} \cap \dots \cap C_{i_{n+1}} \supseteq \bigcap_{i=1}^k C_i = P \neq \emptyset.$$

Θέτουμε

$$P_1 = \bigcap_{j=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \vartheta_{i_j} \rangle \leq t_{i_j}\}.$$

Τότε, $P_1 \supseteq P$ και

$$H \cap P_1 = C_0 \cap C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_n} = \emptyset.$$

8. Έστω $A_1, \dots, A_m$ μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και έστω $k \leq n+1$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$, το σύνολο $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ είναι μη κενό.

Αποδείξτε ότι: αν F είναι ένας $(n-k+1)$ -διάστατος γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε η μεταφορά $F+u$ του F να τέμνει όλα τα σύνολα $A_1, \dots, A_m$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τον κάθετο υπόχωρο $F^\perp$ του F . Παρατηρήστε ότι $\dim(F^\perp) = k-1$. Για κάθε $i = 1, \dots, m$ ορίζουμε

$$B_i = \{x \in F^\perp : \text{υπάρχει } y \in F \text{ ώστε } x+y \in A_i\}.$$

Δηλαδή, B_i είναι η «προβολή» του A_i στον $F^\perp$. Χρησιμοποιώντας την κυρτότητα των A_i ελέγχουμε εύκολα ότι κάθε B_i είναι κυρτό υποσύνολο του $F^\perp$.

Από την υπόθεση, για κάθε $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ μπορούμε να βρούμε $z \in A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$. Γράφοντας $z = x + y$ όπου $x \in F^\perp$ και $y \in F$, βλέπουμε ότι $x \in B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}$.

Αφού $\dim(F^\perp) = k - 1$, τα $B_1, \dots, B_m$ ικανοποιούν την υπόθεση του θεωρήματος του Helly στον $F^\perp$. Συνεπώς, $B_1 \cap \dots \cap B_m \neq \emptyset$. Θεωρούμε $u \in F^\perp$ με $u \in B_1 \cap \dots \cap B_m$. Από τον ορισμό των B_i , για κάθε $i = 1, \dots, m$ υπάρχει $y_i \in F$ ώστε $u + y_i \in A_i$. Δηλαδή,

$$(u + F) \cap A_i \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, m.$$

9. Έστω $A_1, \dots, A_m$ και C κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

- (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $i = 1, \dots, m$, το σύνολο $B_i = \{u \in \mathbb{R}^n : A_i \cap (C + u) \neq \emptyset\}$ είναι κυρτό.
- (β) Υποθέτουμε ότι για κάθε $i_1, \dots, i_{n+1} \in \{1, \dots, m\}$ υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το $C + u$ να τέμνει τα $A_{i_1}, \dots, A_{i_{n+1}}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το $C + u$ να τέμνει όλα τα σύνολα $A_1, \dots, A_m$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $B_i = A_i - C = \{x - y : x \in A_i, y \in C\}$. Αφού τα A_i, C είναι κυρτά, ελέγχουμε εύκολα ότι το $A_i - C$ είναι κυρτό.

(β) Με βάση το (α) η υπόθεση μεταφράζεται ως εξής: για κάθε $i_1, \dots, i_{n+1} \in \{1, \dots, m\}$ υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$u \in (A_{i_1} - C) \cap \dots \cap (A_{i_{n+1}} - C) = B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_{n+1}}.$$

Από το θεώρημα του Helly για τα B_i , υπάρχει

$$u \in B_1 \cap \dots \cap B_m = (A_1 - C) \cap \dots \cap (A_m - C).$$

Τότε, $(C + u) \cap A_i \neq \emptyset$ για κάθε $i = 1, \dots, m$.

10. Έστω $m \geq n + 1$ και $K, C_1, \dots, C_m$ κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $1 \leq i_1 < \dots < i_{n+1} \leq m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $x + K \subseteq C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_{n+1}}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $x + K \subseteq C_1 \cap \dots \cap C_m$.

Υπόδειξη. Φυλλάδιο 1.

11. Δίνονται n σημεία $x_1, \dots, x_n$ στο επίπεδο. Αποδείξτε ότι υπάρχει ζεύγος κάθετων ευθειών $\ell_1 \perp \ell_2$ ώστε καθένα από τα τέσσερα κλειστά τεταρτημόρια στα οποία χωρίζουν το επίπεδο να περιέχει τουλάχιστον $\lceil n/4 \rceil$ από τα σημεία x_i .

Υπόδειξη. Αργότερα.

12. Έστω $T(n, r)$ ο μικρότερος φυσικός m με την ακόλουθή ιδιότητα: αν $A \subset \mathbb{R}^n$ και $|A| = m$, τότε υπάρχουν ξένα ανά δύο $A_1, \dots, A_r \subset A$ ώστε

$$\bigcap_{i=1}^r \text{conv}(A_i) \neq \emptyset.$$

Αποδείξτε ότι

$$T(n, r_1 r_2) \leq T(n, r_1) T(n, r_2)$$

για κάθε $r_1, r_2 \geq 2$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $m = T(n, r_1)$ και $k = T(n, r_2)$. Θεωρούμε $A \subseteq \mathbb{R}^n$ με $|A| = mk$ και το χωρίζουμε σε k ξένα σύνολα $A_1, \dots, A_k$, καθένα από τα οποία έχει $m = T(n, r_1)$ στοιχεία.

Για κάθε $i = 1, \dots, k$ μπορούμε να βρούμε ξένα σύνολα $A_{i1}, \dots, A_{ir_1} \subseteq A_i$ και $y_i \in \mathbb{R}^n$ με

$$y_i \in \bigcap_{j=1}^{r_1} \text{conv}(A_{ij}).$$

Υποθέτουμε αρχικά ότι τα $y_1, \dots, y_k$ είναι διαφορετικά ανά δύο. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{y_1, \dots, y_k\}$. Αφού $|B| = k = T(n, r_2)$, μπορούμε να βρούμε ξένα σύνολα $J_1, \dots, J_{r_2} \subseteq \{1, \dots, k\}$ και $z \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$z \in \bigcap_{s=1}^{r_2} \text{conv}(\{y_i : i \in J_s\}).$$

Θεωρούμε την οικογένεια

$$\left\{ \bigcup_{i \in J_s} A_{ij} : 1 \leq s \leq r_2, 1 \leq j \leq r_1 \right\}.$$

Αποτελείται από ξένα υποσύνολα του A , έχει πληθύνισμο $r_1 r_2$ και εύκολα ελέγχουμε ότι

$$z \in \bigcap_{s=1}^{r_2} \bigcap_{j=1}^{r_1} \text{conv} \left(\bigcup_{i \in J_s} A_{ij} \right).$$

Σημείωση: Στην περίπτωση που κάποια από τα y_i συμπίπτουν, θεωρήστε ακολουθίες $y_i^n = y_i + u_{i,n} \rightarrow y_i$ ώστε για κάθε n τα y_i^n να είναι διαφορετικά ανά δύο, και αντικαταστήστε τα A_{ij} με τα $A_{ij}^{(n)} = A_{ij} + u_{i,n}$. Ακολουθώντας την ίδια πορεία μπορείτε να βρείτε

$$z_n \in \bigcap_{s=1}^{r_2} \bigcap_{j=1}^{r_1} \text{conv} \left(\bigcup_{i \in J_s} A_{ij}^{(n)} \right).$$

Η (z_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και το όριό της ικανοποιεί το ζητούμενο.

13. Σκοπός μας σε αυτή την άσκηση είναι να δείξουμε το εξής: αν K είναι ένα μη κενό,

κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$-\frac{1}{n}K + y \subseteq K.$$

(α) Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που $K = \text{conv}(\{u_1, \dots, u_{n+1}\})$ για κάποια $u_1, \dots, u_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ με $u_1 + \dots + u_{n+1} = 0$. Με αυτές τις υποθέσεις αποδείξτε ότι

$$-\frac{1}{n}K \subseteq K.$$

(β) Εξετάστε τώρα την περίπτωση που $K = \text{conv}(\{u_1, \dots, u_{n+1}\})$ για κάποια $u_1, \dots, u_{n+1} \in \mathbb{R}^n$. Αν

$$y = \frac{u_1 + \dots + u_{n+1}}{n},$$

αποδείξτε ότι

$$-\frac{1}{n}K + y \subseteq K.$$

(γ) Θεωρήστε τώρα τη γενική περίπτωση: K είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in K$ θεωρήστε το σύνολο

$$A_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{n}x + y \in K \right\}$$

και αποδείξτε ότι η οικογένεια $\{A_x : x \in K\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Helly.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τυχόν $x \in -\frac{1}{n}K$. Υπάρχει $z \in K$ ώστε $x = -\frac{1}{n}z$. Το z είναι κυρτός συνδυασμός των $u_1, \dots, u_{n+1}$: υπάρχουν $t_i \geq 0$ με $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$ ώστε

$$x = -\frac{1}{n}z = -\frac{t_1 u_1 + \dots + t_{n+1} u_{n+1}}{n}.$$

Χρησιμοποιώντας την $u_1 + \dots + u_{n+1} = 0$ γράφουμε

$$x = \frac{u_1 + \dots + u_{n+1}}{n} - \frac{t_1 u_1 + \dots + t_{n+1} u_{n+1}}{n} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1-t_i}{n} u_i.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1-t_i}{n} = \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n} = 1$$

και $\frac{1-t_i}{n} \geq 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n+1$. Συνεπώς, το x είναι κυρτός συνδυασμός των $u_1, \dots, u_{n+1}$: δηλαδή, $x \in K$.

(β) Θεωρούμε τυχόν $x \in -\frac{1}{n}K + y$. Υπάρχει $z \in K$ ώστε $x = -\frac{1}{n}z + y$. Το z είναι κυρτός

συνδυασμός των $u_1, \dots, u_{n+1}$: υπάρχουν $t_i \geq 0$ με $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$ ώστε

$$x = -\frac{1}{n}z = -\frac{t_1 u_1 + \dots + t_{n+1} u_{n+1}}{n}.$$

Χρησιμοποιώντας την $u_1 + \dots + u_{n+1} = ny$ γράφουμε

$$x = \frac{u_1 + \dots + u_{n+1}}{n} - \frac{t_1 u_1 + \dots + t_{n+1} u_{n+1}}{n} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1-t_i}{n} u_i.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1-t_i}{n} = \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n} = 1$$

και $\frac{1-t_i}{n} \geq 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n+1$. Συνεπώς, το x είναι κυρτός συνδυασμός των $u_1, \dots, u_{n+1}$: δηλαδή, $x \in K$.

(γ) Για κάθε $x \in K$ θεωρήστε το σύνολο

$$A_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{n}x + y \in K \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $A_x = K + \frac{1}{n}x$, άρα κάθε A_x είναι κυρτό και συμπαγές.

Έστω $x_1, \dots, x_{n+1} \in K$. Αν $T = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_{n+1}\})$, εφαρμόζοντας το (β) βλέπουμε ότι

$$-\frac{1}{n}T + y \subseteq T \subseteq K$$

όπου $y = \frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{n}$. Δηλαδή, $-\frac{1}{n}x_i + y \in K$ για κάθε $i = 1, \dots, n+1$. Έπεται ότι

$$y \in A_{x_1} \cap \dots \cap A_{x_{n+1}},$$

δηλαδή η οικογένεια $\{A_x : x \in K\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Helly. Αφού τα A_x είναι συμπαγή, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει

$$z \in \bigcap_{x \in K} A_x.$$

Αυτό σημαίνει ότι $-\frac{1}{n}x + z \in K$ για κάθε $x \in K$, άρα

$$-\frac{1}{n}K + z \subseteq K.$$

14*. Αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, η *διάμετρος* του K ορίζεται από την

$$\text{diam}(K) = \max\{\|x - y\|_2 : x, y \in K\}.$$

Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\text{diam}(K) \leq 2$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το K να περιέχεται στην κλειστή μπάλα $B(u, r_n)$ με κέντρο u και ακτίνα

$$r_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως *θεώρημα του Jung*.

Υπόδειξη. Αργότερα.