



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα Κυρτής Ανάλυσης

Αθήνα – 2025

Περιεχόμενα

1	Συνδυαστικά θεωρήματα για κυρτά σύνολα στον Ευκλείδειο χώρο	1
1.1	Το έγχρωμο θεώρημα Καραθεοδωρή	1
1.2	Το κλασματικό θεώρημα Helly	3
1.3	Το θεώρημα του Tverberg	4
1.4	Το θεώρημα του Helly στη θεωρία προσέγγισης	8
2	Γεωμετρία των αριθμών	11
2.1	Το θεώρημα του Minkowski	11
2.1.1	Το επιχείρημα του Minkowski	13
2.2	Εφαρμογές στη θεωρία των αριθμών	15
2.2.1	Ομογενείς γραμμικές μορφές	15
2.2.2	Το θεώρημα προσέγγισης του Dirichlet	16
2.2.3	Γινόμενο γραμμικών μορφών	17
2.2.4	Τετραγωνικές μορφές	18
2.2.5	Το θεώρημα του Lagrange	19
2.3	Ακέραια σημεία σε ελλειψοειδή	21
2.3.1	Η μέθοδος του Blichfeldt	21
2.3.2	Ελλειψοειδή χωρίς ακέραια σημεία	24
2.4	Εφαρμογές της ανάλυσης Fourier στην κυρτή γεωμετρία	28
2.4.1	Η απόδειξη του Siegel για το πρώτο θεώρημα του Minkowski	28
2.4.2	Η απόδειξη του Hurwitz για την ισοπεριμετρική ανισότητα στο επίπεδο	29
3	Ισοπεριμετρικές ανισότητες και συγκέντρωση του μέτρου	33
3.1	Μετρικοί χώροι πιθανότητας	33
3.1.1	Ορισμός και παραδείγματα	33
3.1.2	Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα	35
3.2	Κλασικές ισοπεριμετρικές ανισότητες	36
3.2.1	Ανισότητα Brunn-Minkowski και η ισοπεριμετρική ανισότητα	36
3.2.2	Ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα	38
3.2.3	Ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss	40
3.2.4	Η ισοπεριμετρική ανισότητα στον διακριτό κύβο	41

3.3	Συνάρτηση συγκέντρωσης	42
3.4	Προσεγγιστικές ισοπεριμετρικές ανισότητες	44
3.4.1	Η συνάρτηση συγκέντρωσης της σφαίρας	44
3.4.2	Η συνάρτηση συγκέντρωσης του χώρου του Gauss	46
3.4.3	Η συνάρτηση συγκέντρωσης του διακριτού κύβου	47
3.5	Το λήμμα των Johnson-Lindenstrauss	53
4	Ισοτροπική σταθερά κυρτών σωμάτων	57
4.1	Ισοτροπικά κυρτά σώματα	57
4.2	Ανισότητα Kahane-Khinchine για λογαριθμικά κοίλα μέτρα	60
4.3	Αριθμοί κάλυψης: η ανισότητα του Sudakov και η δυϊκή της	64
4.4	Άνω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά	69
4.4.1	Μέση τιμή του maximum γραμμικών συναρτησοειδών σε κυρτά σώματα	69
4.4.2	Διάσπαση Dudley-Fernique	70
4.4.3	Απόδειξη του άνω φράγματος	72
5	Ελάχιστο μέσο πλάτος	75
5.1	Συναρτήσεις Rademacher και Walsh	75
5.2	Η ανισότητα του Pisier για την Rademacher προβολή	79
5.3	Το Λήμμα του Lewis και η ℓ -νόρμα	86
5.4	Εκτίμηση του ελάχιστου μέσου πλάτους	91
5.5	Η θέση ελαχίστου μέσου πλάτους	97
6	Ανισότητα Santaló και ανισότητα Bourgain-Milman	101
6.1	Γινόμενο όγκων	101
6.2	Ανισότητα Blaschke-Santaló	102
6.3	Ισομορφική συμμετρικοποίηση και αντίστροφη ανισότητα Santaló	105
6.3.1	Βοηθητικές Προτάσεις	105
6.3.2	Απόδειξη του Θεωρήματος	108
6.3.3	Αναδρομική διαδικασία	111
6.4	Η αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski	113
7	Ανισότητα Brascamp-Lieb	121
7.1	Εισαγωγή	121
7.2	Συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη συνάρτησης	122
7.3	Ανισότητα Brascamp-Lieb-Luttinger	127
7.3.1	Απόδειξη της ανισότητας Brascamp-Lieb-Luttinger	127
7.4	Ανισότητα Brascamp-Lieb-Luttinger για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών	130
7.5	Ανισότητα Brascamp-Lieb	132
7.6	Η γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb και η αντίστροφή της	135
7.7	Πολυδιάστατη ανισότητα Brascamp-Lieb	141
7.8	Αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα	147

7.9	Εφαρμογές της πολυδιάστατης ανισότητας Brascamp-Lieb	150
7.9.1	Ανισότητα Brascamp-Lieb και ανισότητες για ομοιόμορφες καλύψεις . .	152
7.9.2	Δυϊκή ανισότητα Bollobás-Thomason	154
7.10	Παράρτημα: η απεικόνιση του Brenier	158

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Συνδυαστικά θεωρήματα για κυρτά σύνολα στον Ευκλείδειο χώρο

1.1 Το έγχρωμο θεώρημα Καραθεοδωρή

Το θεώρημα αυτής της ενότητας γενικεύει το θεώρημα του Καραθεοδωρή: παίρνοντας $S_1 = S_2 = \dots = S_{n+1}$ βλέπουμε ότι αν S είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $0 \in \text{conv}(S)$ τότε υπάρχουν $v_1 \in S_1, \dots, v_{n+1} \in S$ ώστε $0 \in \text{conv}(\{v_1, \dots, v_{n+1}\})$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το θεώρημα του Καραθεοδωρή (εξηγήστε γιατί).

Θεώρημα 1.1.1 (Bárány, 1982). Έστω $S_1, S_2, \dots, S_{n+1}$ υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $i = 1, 2, \dots, n+1$,

$$0 \in \text{conv}(S_i).$$

Τότε, υπάρχουν $v_1 \in S_1, \dots, v_{n+1} \in S_{n+1}$ ώστε

$$0 \in \text{conv}(\{v_1, \dots, v_{n+1}\}).$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε S_i είναι πεπερασμένο σύνολο: από την υπόθεση έχουμε ότι, για κάθε $i = 1, \dots, n+1$, $0 \in \text{conv}(S_i)$. Από τον ορισμό της κυρτής θήκης, υπάρχουν πεπερασμένα $S'_i \subseteq S_i$ ώστε $0 \in \text{conv}(S'_i)$, $i = 1, \dots, n+1$. Αν δείξουμε ότι υπάρχουν $v_1 \in S'_1, \dots, v_{n+1} \in S'_{n+1}$ ώστε $0 \in \text{conv}(\{v_1, \dots, v_{n+1}\})$, τότε έπεται το ζητούμενο, διότι $v_i \in S'_i \subseteq S_i$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι κάθε S_i είναι πεπερασμένο σύνολο και ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε, για κάθε επιλογή σημείων $a_i \in S_i$ ισχύει $d(0, \{a_1, \dots, a_{n+1}\}) > 0$. Αφού τα S_i είναι πεπερασμένα σύνολα, υπάρχει επιλογή σημείων $z_i \in S_i$ ώστε η απόσταση $d(0, \{z_1, \dots, z_{n+1}\})$ να είναι θετική και η μικρότερη δυνατή.

Θέτουμε $T = \text{conv}\{z_1, \dots, z_{n+1}\}$ και $d := d(0, T)$. Το T είναι συμπαγές, άρα υπάρχει $y \in T$ ώστε

$$d(0, T) = \|y\|_2.$$

Λήμμα 1.1.2. *Αν ϑ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του y , τότε*

$$T \subset \overline{H}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \vartheta \rangle \geq \|y\|_2\}.$$

Απόδειξη του λήμματος. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{z_1, \dots, z_{n+1}\} \subset \overline{H}_+$$

και το λήμμα έπεται από τον ορισμό της κυρτής θήκης. Έστω $z \in \{z_1, \dots, z_{n+1}\}$. Για κάθε $t \in (0, 1)$ ισχύει η ανισότητα

$$\|y\|_2^2 - 2t\langle y, y - z \rangle + t^2\|z - y\|_2^2 = \|y + t(z - y)\|_2^2 \geq \|y\|_2^2,$$

άρα

$$\frac{t}{2}\|z - y\|_2^2 \geq \langle y, y - z \rangle.$$

Αφήνοντας το $t \rightarrow 0^+$, παίρνουμε $\langle z, y \rangle \geq \langle y, y \rangle = \|y\|_2^2$, δηλαδή

$$\langle z, \vartheta \rangle \geq \|y\|_2.$$

□

Συνέχεια της απόδειξης: Θέτουμε $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \vartheta \rangle = \|y\|_2\}$ και $J_H = \{z_1, \dots, z_{n+1}\} \cap H$. Τότε,

$$T \cap H = \text{conv}(J_H) \subseteq H$$

(άσκηση). Αφού $\dim H = n - 1$, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Καραθεοδωρή για το $y \in T \cap H$ έχουμε ότι γράφεται ως κυρτός συνδυασμός το πολύ n σημείων από τα z_i . Δηλαδή, υπάρχει $j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ ώστε

$$y \in \text{conv}(\{z_i : i \neq j\}).$$

Όμως,

$$0 \in \text{conv}(S_j)$$

και επιπλέον

$$0 \in H_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \vartheta \rangle < \|y\|_2\}.$$

Άρα, υπάρχει $w_j \in S_j$ με $w_j \in H_-$ (πράγματι, αν είχαμε $S_j \subset \overline{H}_+$ τότε θα είχαμε $\text{conv}(S_j) \subset \overline{H}_+$, άρα $0 \in \overline{H}_+$, άτοπο).

Τώρα, αν θεωρήσουμε το σύνολο $T_1 = \text{conv}\{w_j, z_i : i \neq j\}$, ισχύει ότι

$$d(0, T_1) < d(0, T).$$

Πράγματι, για κάθε $t \in (0, 1)$ ισχύει $d(0, T_1) \leq \|y + t(w_j - y)\|_2$, άρα

$$(1.1.1) \quad d^2(0, T_1) \leq d^2(0, T) - 2t\langle y, y - w_j \rangle + t^2\|y - w_j\|_2^2.$$

Θέτουμε

$$\alpha = \|y - w_j\|_2^2 > 0$$

και

$$\beta = \langle y, y - w_j \rangle = \|y\|_2(\|y\|_2 - \langle w_j, \theta \rangle) > 0.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $w_j \in H_-$. Αν λοιπόν επιλέξουμε $0 < t < \min\{1, \frac{2\beta}{\alpha}\}$, από την (1.1.1) παίρνουμε

$$d^2(0, T_1) \leq d^2(0, T) - 2t\beta + t^2\alpha < d^2(0, T).$$

Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο. □

1.2 Το κλασματικό θεώρημα Helly

Έστω $m \geq n + 1$ και $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Το θεώρημα του Helly μας εξασφαλίζει ότι αν κάθε υποοικογένεια $n + 1$ συνόλων από την C έχει μη κενή τομή, τότε $C_1 \cap \dots \cap C_m \neq \emptyset$. Στο επόμενο «κλασματικό θεώρημα Helly» εξετάζεται η περίπτωση όπου ένα ποσοστό των υποοικογενειών μεγέθους $n + 1$ έχει μη κενή τομή.

Θεώρημα 1.2.1 (Katschalski–Liu, 1979). *Για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει σταθερά $\beta = \beta(n, \alpha) > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα.*

Έστω $m \geq n + 1$ και $C_1, \dots, C_m$ κυρτά σύνολα στον $\mathbb{R}^n$. Αν τουλάχιστον $\alpha \binom{m}{n+1}$ υποσύνολα $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ με $|I| = n + 1$ ικανοποιούν την $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ με $|J| \geq \beta m$ ώστε $\bigcap_{j \in J} C_j \neq \emptyset$.

Σημείωση. Η καλύτερη δυνατή εξάρτηση του β από τα n και α είναι $\beta = 1 - (1 - \alpha)^{1/(n+1)}$. Η απόδειξη που παρουσιάζουμε εδώ δίνει την ασθενέστερη εκτίμηση $\beta \geq \frac{\alpha}{n+1}$.

Απόδειξη. Για κάθε $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ συμβολίζουμε με C_I το σύνολο $\bigcap_{i \in I} C_i$.

Παρατηρούμε πρώτα ότι αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι κάθε C_i είναι συμπαγές (και μάλιστα πολύτοπο). Πράγματι, αν μας δοθούν τυχόντα κυρτά σύνολα $C_1, \dots, C_m$ τότε, για κάθε I με $|I| = n + 1$ και $C_I \neq \emptyset$, επιλέγουμε τυχόν σημείο $x_I \in C_I$ και, για κάθε $i = 1, \dots, m$, ορίζουμε $C'_i = \text{conv}(\{x_I : C_I \neq \emptyset, i \in I\})$. Παρατηρήστε ότι κάθε C'_i είναι κυρτό, συμπαγές και περιέχεται στο C_i . Επίσης, αν για κάποιο σύνολο δεικτών I με $|I| = n + 1$ ισχύει $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, τότε $x_I \in \bigcap_{i \in I} C'_i$ δηλαδή, $\bigcap_{i \in I} C'_i \neq \emptyset$. Συνεπώς, το πλήθος των $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ με $|I| = n + 1$ που ικανοποιούν την $\bigcap_{i \in I} C'_i \neq \emptyset$ είναι ίσο με το πλήθος των $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ με $|I| = n + 1$ που ικανοποιούν την $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$. Παίρνοντας υπ' όψιν και το γεγονός ότι $C'_i \subseteq C_i$, βλέπουμε ότι, αν το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει για τα C'_i , τότε ισχύει και για τα C_i .

Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση, υποθέτουμε ότι τα σύνολα C_i , καθώς και όλα τα μη κενά C_I , είναι κυρτά και συμπαγή. Θεωρούμε τη λεξικογραφική διάταξη $\leq$ στον $\mathbb{R}^n$: $(t_1, \dots, t_n) < (r_1, \dots, r_n)$ αν υπάρχει $1 \leq k \leq n$ ώστε $t_i = r_i$ για κάθε $i < k$ και $t_k < r_k$. Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ περιέχει μοναδικό «λεξικογραφικά ελάχιστο» σημείο (άσκηση).

Λήμμα 1.2.2. Έστω $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ σύνολο δεικτών ώστε $|I| = n + 1$ και $C_I \neq \emptyset$. Αν v_I είναι το λεξικογραφικά ελάχιστο σημείο του C_I , τότε υπάρχει $J \subseteq I$ με $|J| = n$ ώστε το v_I να είναι το λεξικογραφικά ελάχιστο σημείο του C_J .

Απόδειξη του λήμματος. Ορίζουμε $A = \{x \in \mathbb{R}^n : x < v_I\}$. Το σύνολο A είναι κυρτό και, από τον ορισμό του v_I , έχουμε ότι $A \cap C_I = \emptyset$. Αφού η οικογένεια $A \cap \{C_i : i \in I\}$ έχει κενή τομή, το θεώρημα του Helly μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει υποοικογένεια $n + 1$ συνόλων αυτής της οικογένειας που έχει κενή τομή. Το A πρέπει να ανήκει σε αυτή την υποοικογένεια, διότι όλα τα υπόλοιπα σύνολα έχουν κοινό σημείο, το v_I . Άρα, υπάρχει $J \subseteq I$ με $|J| = n$ ώστε η οικογένεια $A \cap \{C_j : j \in J\}$ να έχει κενή τομή. Τώρα, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το v_I είναι το λεξικογραφικά ελάχιστο σημείο του C_J . Πράγματι, $v_J \leq v_I$ διότι $C_I \subseteq C_J$ και $v_I \leq v_J$ διότι $A \cap C_J = \emptyset$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). $\square$

Συνέχεια της απόδειξης του θεωρήματος Έστω $\mathcal{U}$ η οικογένεια όλων των $\alpha \binom{m}{n+1}$ συνόλων δεικτών I για τα οποία $|I| = n + 1$ και $C_I \neq \emptyset$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα, για κάθε $I \in \mathcal{U}$ σταθεροποιούμε $J = J(I) \subseteq I$ με $|J| = n$ ώστε το C_J να έχει το ίδιο λεξικογραφικά ελάχιστο σημείο με το C_I .

Το πλήθος των διαφορετικών n -συνόλων $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ είναι ίσο με $\binom{m}{n}$. Υπάρχει λοιπόν κάποιο J_0 με $|J_0| = n$ ώστε $J_0 = J(I)$ για τουλάχιστον

$$\frac{\alpha \binom{m}{n+1}}{\binom{m}{n}} = \alpha \frac{m-n}{n+1}$$

διαφορετικά σύνολα δεικτών $I \in \mathcal{U}$. Τότε, το λεξικογραφικά ελάχιστο σημείο v_{J_0} του C_{J_0} ανήκει σε όλα αυτά τα C_I , δηλαδή σε τουλάχιστον

$$n + \alpha \frac{m-n}{n+1} > \alpha \frac{m}{n+1}$$

από τα σύνολα C_i (ανήκει στα n σύνολα C_j , $j \in J_0$, και σε ένα επιπλέον C_i για κάθε I με $J_0 = J(I)$, διαφορετικό κάθε φορά). Συνεπώς, το συμπέρασμα ισχύει με $\beta = \frac{\alpha}{n+1}$. $\square$

1.3 Το θεώρημα του Tverberg

Το θεώρημα του Radon εξασφαλίζει ότι κάθε σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ με $n + 2$ σημεία έχει δύο ξένα υποσύνολα που οι κυρτές τους θήκες έχουν κοινό σημείο. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν για σύνολα με περισσότερα στοιχεία μπορούμε πάντα να βρίσκουμε πολλά ξένα υποσύνολα που οι κυρτές τους θήκες έχουν κοινό σημείο.

Η ακριβής διατύπωση του προβλήματος είναι η εξής. Έστω $T(n, r)$ ο μικρότερος φυσικός m με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $A \subset \mathbb{R}^n$ και $|A| = m$, τότε υπάρχουν ξένα ανά δύο $A_1, \dots, A_r \subset A$ ώστε

$$\bigcap_{j=1}^r \text{conv}(A_j) \neq \emptyset.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Radon έχουμε ότι

$$T(n, 2) = n + 2.$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι

$$T(n, r_1 r_2) \leq T(n, r_1) T(n, r_2)$$

για κάθε $r_1, r_2 \geq 2$ (άσκηση). Συνεπώς, $T(n, r) < \infty$ για κάθε $r \geq 2$. Το φράγμα που προκύπτει είναι ασθενές: για παράδειγμα, με εφαρμογή αυτής της παρατήρησης παίρνουμε $T(n, 2^k) \leq (n + 2)^k$. Το θεώρημα του Tverberg δίνει τη βέλτιστη εκτίμηση για τον $T(n, r)$.

Θεώρημα 1.3.1 (Tverberg, 1966). Έστω $n, r \geq 2$. Για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$ με $|A| = (r - 1)(n + 1) + 1$ μπορούμε να βρούμε ξένα ανά δύο $A_1, \dots, A_r \subset A$ ώστε $\bigcap_{j=1}^r \text{conv}(A_j) \neq \emptyset$.

Σημείωση. Το αποτέλεσμα αυτό είναι βέλτιστο. Δηλαδή,

$$T(n, r) = (r - 1)(n + 1) + 1.$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1 θα χρειαστούμε την έννοια του *κυρτού κώνου* που παράγεται από ένα $X \subseteq \mathbb{R}^d$.

Ορισμός 1.3.2 (κυρτός κώνος). Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Ο **κυρτός κώνος** που παράγεται από το X είναι το σύνολο $\text{cone}(X)$ όλων των γραμμικών συνδυασμών σημείων του X με μη αρνητικούς συντελεστές. Δηλαδή,

$$\text{cone}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^m t_i x_i : m \in \mathbb{N}, t_i \geq 0, x_i \in X \right\}.$$

Παρατηρήστε ότι ο κώνος $\text{cone}(X)$ είναι η ένωση όλων των ημιευθειών που ξεκινούν από το 0 και περνούν από κάποιο σημείο της κυρτής θήκης $\text{conv}(X)$ του X .

Πρόταση 1.3.3 (θεώρημα του Tverberg για κώνους). Έστω $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ με $|A| = (r - 1)(n + 1) + 1$. Αν $0 \notin \text{conv}(A)$ τότε υπάρχουν r μη κενά, ξένα ανά δύο υποσύνολα $A_1, \dots, A_r$ του A ώστε

$$\bigcap_{j=1}^r \text{cone}(A_j) \neq \{0\}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $N = (r - 1)(n + 1)$. Ορίζουμε γραμμικές απεικονίσεις $\varphi_j : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($j = 1, \dots, r$) ως εξής: χωρίζουμε τις N συντεταγμένες του $\mathbb{R}^N$ σε $r - 1$ ομάδες των $n + 1$

συντεταγμένων – συμβολικά, $u = (* | * | * | \cdots | * | *)$ – και ορίζουμε

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= (x | 0 | 0 | \cdots | 0 | 0) \\ \varphi_2(x) &= (0 | x | 0 | \cdots | 0 | 0) \\ &\dots \quad \dots \\ \varphi_{r-2}(x) &= (0 | 0 | 0 | \cdots | x | 0) \\ \varphi_{r-1}(x) &= (0 | 0 | 0 | \cdots | 0 | x) \\ \varphi_r(x) &= (-x | -x | -x | \cdots | -x | -x).\end{aligned}$$

Η **βασική ιδιότητα** των φ_j είναι η εξής: αν $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{R}^{n+1}$, τότε

$$(1.3.1) \quad \sum_{j=1}^r \varphi_j(u_j) = 0 \text{ αν και μόνο αν } u_1 = u_2 = \cdots = u_r.$$

Αυτό είναι φανερό, αφού

$$\sum_{j=1}^r \varphi_j(u_j) = (u_1 - u_r | u_2 - u_r | \cdots | u_{r-1} - u_r).$$

Γράφουμε $A = \{a_1, \dots, a_{N+1}\}$ και ορίζουμε

$$M = \varphi_1(A) \cup \varphi_2(A) \cup \cdots \cup \varphi_r(A).$$

Για κάθε $i = 1, \dots, N+1$ θεωρούμε το σύνολο

$$M_i = \{\varphi_1(a_i), \varphi_2(a_i), \dots, \varphi_r(a_i)\}.$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των στοιχείων του M_i είναι ίσο με

$$\sum_{j=1}^r \varphi_j(a_i) = 0,$$

άρα

$$0 \in \text{conv}(M_i), \quad i = 1, \dots, N+1.$$

Από το **έγχρωμο θεώρημα του Καραθεοδωρή**, υπάρχουν $v_i = \varphi_{f(i)}(a_i) \in M_i$, $i = 1, \dots, N+1$, ώστε $0 \in \text{conv}(\{v_1, \dots, v_{N+1}\})$. Με άλλα λόγια, υπάρχουν $t_i \geq 0$ με $\sum_{i=1}^{N+1} t_i = 1$, ώστε

$$(1.3.2) \quad \sum_{i=1}^{N+1} t_i \varphi_{f(i)}(a_i) = 0.$$

Παρατηρήστε ότι κάθε $f(i) \in \{1, \dots, r\}$. Για κάθε $j = 1, \dots, r$ ορίζουμε

$$I_j = \{1 \leq i \leq N+1 : f(i) = j\} \text{ και } A_j = \{a_j : j \in I_j\}.$$

Παρατηρήστε ότι τα $A_1, \dots, A_r$ είναι ξένα. Τότε, η (1.3.2) γράφεται ως εξής:

$$0 = \sum_{i=1}^{N+1} t_i \varphi_{f(i)}(a_i) = \sum_{j=1}^r \sum_{i \in I_j} t_i \varphi_j(a_i) = \sum_{j=1}^r \varphi_j \left(\sum_{i \in I_j} t_i a_i \right).$$

Από την (1.3.1) συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{i \in I_1} t_i a_i = \sum_{i \in I_2} t_i a_i = \dots = \sum_{i \in I_r} t_i a_i =: x.$$

Μένει να δείξουμε ότι $x \neq 0$. Τότε,

$$0 \neq x \in \bigcap_{j=1}^r \text{cone}(A_j).$$

Ειδικότερα, $\bigcap_{j=1}^r \text{cone}(A_j) \neq \{0\}$ και, εκ των υστέρων, τα A_j είναι μη κενά.

Για την $x \neq 0$ υποθέτουμε το αντίθετο. Τότε, μπορούμε να δείξουμε ότι $0 \in \text{conv}(A)$, το οποίο είναι άτοπο. Πράγματι, αφού $\sum_{i=1}^{N+1} t_i = 1$, υπάρχουν $j_0 \leq r$ και $i \in I_{j_0}$ ώστε $t_i > 0$. Όμως, τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$0 = \sum_{i \in I_{j_0}} \frac{t_i}{\sum_{i \in I_{j_0}} t_i} a_i,$$

δηλαδή, $0 \in \text{conv}(A_{j_0}) \subseteq \text{conv}(A)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ με $|A| = (r-1)(n+1) + 1$. Ορίζουμε

$$\tilde{A} = A \times \{1\} = \{(a, 1) : a \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\text{conv}(\tilde{A}) \subseteq \mathbb{R}^n \times \{1\},$$

άρα

$$0 \notin \text{conv}(\tilde{A}).$$

Από την προηγούμενη πρόταση, μπορούμε να βρούμε ξένα ανά δύο $B_1, \dots, B_r \subseteq \tilde{A}$ ώστε $\bigcap_{j=1}^r \text{cone}(B_j) \neq \{0\}$. Από τον ορισμό του $\tilde{A}$, τα $B_1, \dots, B_r$ είναι σύνολα της μορφής $\tilde{A}_j = A_j \times \{1\}$, και τα $A_1, \dots, A_r$ είναι ξένα υποσύνολα του A (εξηγήστε γιατί). Δηλαδή, υπάρχουν ξένα ανά

δύο $A_1, \dots, A_r \subseteq A$ ώστε

$$\bigcap_{j=1}^r \text{cone}(A_j \times \{1\}) \neq \{0\}.$$

Έστω $x \neq 0$ στην τομή των κώνων. Τότε, $x = (u, s)$ για κάποιο $u \in \mathbb{R}^n$ και κάποιο $s > 0$: πράγματι, αφού $x \in \text{cone}(A_1)$, το x είναι της μορφής

$$x = \sum t_i(a_i, 1) = \left(\sum t_i a_i, \sum t_i \right)$$

για κάποια $a_i \in A_1$, και $s = \sum t_i > 0$ διότι όλα τα t_i είναι μη αρνητικά και αν είχαμε $\sum t_i = 0$ θα παίρναμε $u = \sum t_i a_i = 0$, δηλαδή $x = 0$. Πολλαπλασιάζοντας με $1/s$ παίρνουμε σημείο $x' = (u', 1) \in \bigcap_{j=1}^r \text{cone}(A_j)$. Τότε, $u' \in \bigcap_{j=1}^r \text{conv}(A_j)$. Δηλαδή,

$$\bigcap_{j=1}^r \text{conv}(A_j) \neq \emptyset.$$

□

1.4 Το θεώρημα του Helly στη θεωρία προσέγγισης

Σε αυτήν την ενότητα δίνουμε μια εφαρμογή του θεωρήματος του Helly σε ένα πρόβλημα της θεωρίας προσέγγισης. Έστω $\{f_1, \dots, f_m\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο συναρτήσεων $f_i : T \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι ορισμένες σε κάποιο σύνολο T . Δίνονται $\varepsilon \geq 0$ και μια συνάρτηση $g : T \rightarrow \mathbb{R}$. Για κάθε $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ θεωρούμε τον γραμμικό συνδυασμό $f_a : T \rightarrow \mathbb{R}$ των f_i που ορίζεται από την

$$f_a(t) = \sum_{i=1}^m a_i f_i(t).$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε $a \in \mathbb{R}^m$ ώστε

$$|g(t) - f_a(t)| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } t \in T.$$

Αυτό είναι το λεγόμενο πρόβλημα της *ομοιόμορφης προσέγγισης* (ή *προσέγγισης κατά Chebyshev*). Το θεώρημα του Helly δείχνει ότι μπορούμε να βρούμε μια ομοιόμορφη προσέγγιση f_a για την g στο T αν μπορούμε να πετύχουμε το ίδιο σε κάθε «σχετικά μικρό» υποσύνολο του T .

Θεώρημα 1.4.1. Έστω T ένα πεπερασμένο σύνολο. Σταθεροποιούμε $\varepsilon \geq 0$. Υποθέτουμε ότι αν $t_1, \dots, t_{m+1}$ είναι οποιαδήποτε $m+1$ σημεία του T τότε υπάρχει f_a - n οποία εξαρτάται από τα $t_1, \dots, t_{m+1}$ - ώστε

$$|g(t_i) - f_a(t_i)| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } i = 1, \dots, m+1.$$

Τότε, υπάρχει f_a με την ιδιότητα

$$(1.4.1) \quad |g(t) - f_a(t)| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } t \in T.$$

Απόδειξη. Για κάθε $t \in T$ ορίζουμε ένα σύνολο $A(t) \subset \mathbb{R}^m$ ως εξής:

$$A(t) = \{a = (a_1, \dots, a_m) : |g(t) - f_a(t)| \leq \varepsilon\}.$$

Με άλλα λόγια, $A(t)$ είναι το σύνολο των $a \in \mathbb{R}^m$ για τα οποία η συνάρτηση f_a προσεγγίζει την g με ακρίβεια ε στο σημείο t .

Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε σύνολο $A(t)$ είναι κυρτό σύνολο. Η υπόθεση του θεωρήματος εξασφαλίζει ότι αν $t_1, \dots, t_{m+1} \in T$ τότε

$$A(t_1) \cap \dots \cap A(t_{m+1}) \neq \emptyset.$$

Δηλαδή, η πεπερασμένη οικογένεια κυρτών συνόλων $\{A(t) : t \in T\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Helly. Έπεται ότι

$$\bigcap_{t \in T} A(t) \neq \emptyset.$$

Θεωρούμε τυχούσα f_a με $f_a \in A(t)$ για κάθε $t \in T$. Τότε, η f_a ικανοποιεί την (1.4.1). □

Στην περίπτωση που το T είναι άπειρο, μπορούμε να επεκτείνουμε το προηγούμενο θεώρημα αν υποθέσουμε κάποια «ανεξαρτησία» των συναρτήσεων $f_1, \dots, f_m$.

Θεώρημα 1.4.2. Έστω $f_i : T \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, συναρτήσεις με την εξής ιδιότητα: υπάρχουν $s_1, \dots, s_n \in T$ ώστε αν για την $f_a = a_1 f_1 + \dots + a_m f_m$ έχουμε ότι $f_a(s_1) = \dots = f_a(s_n) = 0$ τότε $a_1 = \dots = a_m = 0$.

Υποθέτουμε ότι αν $t_1, \dots, t_{m+1}$ είναι οποιαδήποτε $m+1$ σημεία του T τότε υπάρχει $f_a - n$ οποία εξαρτάται από τα $t_1, \dots, t_{m+1}$ — ώστε

$$|g(t_i) - f_a(t_i)| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } i = 1, \dots, m+1.$$

Τότε, υπάρχει f_a με την ιδιότητα

$$|g(t) - f_a(t)| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } t \in T.$$

Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.1, για κάθε $t \in T$ θεωρούμε το σύνολο

$$A(t) = \{a = (a_1, \dots, a_m) : |g(t) - f_a(t)| \leq \varepsilon\}.$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$A = A(s_1) \cap \dots \cap A(s_n).$$

Θα δείξουμε ότι το A είναι συμπαγές σύνολο. Εύκολα ελέγχουμε ότι το $A(t)$ είναι κλειστό, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι είναι φραγμένο. Ορίζουμε $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$G(a) = \max\{|f_a(s_i)| : i = 1, \dots, n\}.$$

Παρατηρούμε ότι

- (i) $G(\lambda a) = |\lambda| \cdot G(a)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (ii) $G(a) = 0$ αν και μόνο αν $a = 0$ (εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση για την ανεξαρτησία των f_i).
- (iii) Η G είναι συνεχής.

Άρα,

$$(1.4.2) \quad \min\{G(a) : a \in S^{m-1}\} = \delta > 0,$$

οπότε

$$G(a) \geq \delta \|a\|_2 \quad \text{για κάθε } a \in \mathbb{R}^m.$$

Παρατηρούμε ότι αν $a \in A$ τότε $|g(s_i) - f_a(s_i)| \leq \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, δηλαδή $|f_a(s_i)| \leq |g(s_i)| + \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Άρα,

$$G(a) \leq R := \varepsilon + \max\{|g(s_i)| : i = 1, \dots, n\},$$

και η (1.4.2) δίνει

$$\|a\|_2 \leq \frac{R}{\delta}.$$

Δηλαδή, $A \subset (R/\delta)B_2^n$. Συνεπώς, το A είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.

Για κάθε $t \in T$ θέτουμε $B(t) = A(t) \cap A$. Τότε, κάθε $B(t)$ είναι συμπαγές σύνολο. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Helly όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.1, συμπεραίνουμε ότι η τομή οποιασδήποτε πεπερασμένης οικογένειας συνόλων $A(t)$ είναι μη κενή. Ειδικότερα, κάθε σύνολο της μορφής $B(t_1) \cap \dots \cap B(t_{m+1})$ είναι μη κενό, κυρτό και συμπαγές. Από το θεώρημα Helly έπεται ότι

$$\bigcap_{t \in T} B(t) \neq \emptyset \quad \text{άρα} \quad \bigcap_{t \in T} A(t) \neq \emptyset.$$

Αν $a \in \bigcap_{t \in T} A(t)$, τότε η συνάρτηση

$$f_a = a_1 f_1 + \dots + a_m f_m$$

προσεγγίζει την g με σφάλμα το πολύ ίσο με ε ομοιόμορφα στο T . □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Γεωμετρία των αριθμών

2.1 Το θεώρημα του Minkowski

Πολλά από τα προβλήματα της γεωμετρίας των αριθμών διατυπώνονται στην εξής μορφή: Δίνονται μια συνάρτηση $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(0, \dots, 0) = 0$ και ένας θετικός πραγματικός αριθμός λ . Το ζητούμενο είναι να βρεθεί μη τετριμμένη n -άδα ακεραίων $a_1, \dots, a_n$ που ικανοποιούν την

$$(2.1.1) \quad |F(a_1, \dots, a_n)| \leq \lambda.$$

Θεωρούμε την τυχούσα n -άδα $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ σαν σημείο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$ και συμβολίζουμε με K το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την

$$|F(x)| = |F(x_1, \dots, x_n)| \leq \lambda.$$

Τότε, το αρχικό μας πρόβλημα διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής: Κάτω από ποιές προϋποθέσεις το σύνολο K περιέχει σημείο $u \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$; Υπάρχουν δύο σημαντικές ιδέες πίσω από αυτή τη μετάφραση του προβλήματος. Πρώτον, παίρνουμε υπ' όψιν μας τις τιμές της F σε κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και όχι μόνο τις τιμές της στα $u \in \mathbb{Z}^n$. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε αναλυτικές μεθόδους για την αντιμετώπιση του προβλήματος. Δεύτερον, η ερμηνεία που δίνουμε στο πρόβλημα είναι γεωμετρική, κάτι που ευνοεί την εισαγωγή νέων εννοιών και μεθόδων οι οποίες βασίζονται στη γεωμετρική μας διαίσθηση.

Γεωμετρικές μέθοδοι αυτού του τύπου είχαν ήδη χρησιμοποιηθεί από τον Gauss και τον Dirichlet, οι οποίοι εργάζονταν σε προβλήματα σχετικά με τις θετικά ορισμένες τετραγωνικές μορφές. Πρώτος όμως ο Minkowski ανέπτυξε μια συστηματική θεωρία, απέδειξε ένα γενικό θεώρημα για n -διάστατα κυρτά σώματα K , και το εφάρμοσε σε μεγάλο πλήθος σημαντικών προβλημάτων. Η νέα θεωρία ονομάστηκε «γεωμετρία των αριθμών» από τον ίδιο τον Minkowski.

Ο Hermite (1850) απέδειξε ότι, αν F είναι μια θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή n μεταβλητών, τότε η (2.1.1) έχει μη τετριμμένη ακέραια λύση αν το λ ξεπερνάει μια τιμή που

εξαρτάται μόνο από το n και από τη διακρίνουσα της F . Η φύση της απόδειξής του ήταν αριθμητική. Ο Minkowski μετέφρασε το αποτέλεσμα του Hermite σε ένα θεώρημα για ελλειψοειδή, και έδωσε μια νέα γεωμετρική απόδειξή του. Στη συνέχεια παρατήρησε ότι, οι μόνες ιδιότητες του ελλειψοειδούς που απαιτούνταν για την απόδειξη, ήταν η κυρτότητα και η συμμετρία του ως προς το 0. Κατέληξε έτσι στο εξής θεώρημα (*πρώτο θεώρημα του Minkowski*).

Θεώρημα 2.1.1 (Minkowski). Έστω K ανοικτό και φραγμένο, συμμετρικό ως προς το 0, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $|K| > 2^n$, τότε το K περιέχει τουλάχιστον ένα $u \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

Το αποτέλεσμα αυτό δεν επιδέχεται βελτίωση. Αν θεωρήσουμε τον κύβο $Q = \{x : |x_i| < 1, i = 1, \dots, n\}$, τότε $|Q| = 2^n$, αλλά $Q \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$.

Θα δώσουμε μια απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1 η οποία βασίζεται στο εξής λήμμα του Blichfeldt:

Θεώρημα 2.1.2 (Blichfeldt). Έστω M ένα Jordan μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με $|M| > 1$. Υπάρχουν $x \neq y$ στο M ώστε $x - y \in \mathbb{Z}^n$.

Απόδειξη. Η απόδειξη που θα δώσουμε οφείλεται στον Hajos. Υποθέτουμε ότι $|M| > 1$. Αν το M δεν είναι φραγμένο, παρατηρούμε ότι η τομή του M με μπάλα κατάλληλα μεγάλης ακτίνας εξακολουθεί να έχει όγκο μεγαλύτερο από 1. Υποθέτουμε λοιπόν, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι το M είναι φραγμένο. Θεωρούμε το θεμελιώδες παραλληλεπίπεδο του $\mathbb{Z}^n$

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i < 1, i = 1, \dots, n\}.$$

Το σύνολο U των $u \in \mathbb{Z}^n$ για τα οποία $(u + P) \cap M \neq \emptyset$ είναι πεπερασμένο: αν $(u + P) \cap M \neq \emptyset$ τότε $u \in M - P$ και το $M - P$ είναι φραγμένο, άρα έχουμε πεπερασμένες το πλήθος επιλογές για το u . Γράφουμε

$$U = \{u_1, \dots, u_r\}.$$

Για κάθε $j = 1, \dots, r$, ορίζουμε $M_j = (u_j + P) \cap M$. Τα σύνολα M_j είναι ξένα και η ένωσή τους είναι το M . Για κάθε $j = 1, \dots, r$ θεωρούμε τη μεταφορά $M'_j = M_j - u_j = P \cap (M - u_j) \subseteq P$. Παρατηρούμε ότι $|M'_j| = |M_j|$ για κάθε $j = 1, \dots, r$. Συνδυάζοντας αυτές τις παρατηρήσεις βλέπουμε ότι αν τα M'_j ήταν ξένα, τότε θα είχαμε

$$\begin{aligned} |P| &\geq |M'_1 \cup \dots \cup M'_r| = \sum_{j=1}^r |M'_j| = \sum_{j=1}^r |M_j| = \sum_{j=1}^r |(u_j + P) \cap M| \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} |(u + P) \cap M| = |M| > 1, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, υπάρχουν $i \neq j \in \{1, \dots, r\}$ και $z \in M'_i \cap M'_j$. Τότε, τα $x = z + u_i$ και $y = z + u_j$ ανήκουν στο M , και $x - y = u_i - u_j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. $\square$

Παρατήρηση 2.1.3. Το ίδιο ισχύει αν υποθέσουμε ότι το M είναι φραγμένο, κλειστό, και $|M| \geq 1$. Γιατί αν πάρουμε μια φθίνουσα ακολουθία $\lambda_r \rightarrow 1$, έχουμε ότι $|\lambda_r M| > 1$, άρα

υπάρχουν $x_r, y_r \in \lambda_r M$ ώστε $0 \neq x_r - y_r \in \mathbb{Z}^n$. Τότε, οι $(x_r), (y_r)$ έχουν υπακολουθίες $x_{k_r} \rightarrow x \in M, y_{k_r} \rightarrow y \in M$, και εύκολα ελέγχουμε ότι $x - y \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

Απόδειξη του θεωρήματος 2.1.1. Θεωρούμε το $M = K/2$. Το M είναι Jordan μετρήσιμο και, από την υπόθεσή μας, $|M| > 1$. Από το Λήμμα του Blichfeldt, υπάρχουν $x, y \in M$ ώστε $0 \neq x - y \in \mathbb{Z}^n$. Όμως, από τον ορισμό του M , υπάρχουν $w_1, w_2 \in K$ με $x = w_1/2$ και $y = w_2/2$. Το K είναι συμμετρικό ως προς το 0, άρα $-w_2 \in K$. Από την κυρτότητα του K συμπεραίνουμε ότι

$$x - y = \frac{w_1 + (-w_2)}{2} \in K.$$

Δηλαδή, $0 \neq x - y \in K \cap \mathbb{Z}^n$. □

2.1.1 Το επιχείρημα του Minkowski

Περιγράφουμε τώρα το αρχικό επιχείρημα του Minkowski.

Δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1. Θεωρούμε ένα κλειστό, συμμετρικό ως προς το 0, κυρτό σώμα K . Για κάθε $\lambda > 0$, θεωρούμε το σώμα λK . Αφού το K είναι φραγμένο, για μικρά λ έχουμε ότι $\lambda K \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$, και αφού το K περιέχει μια μπάλα με κέντρο το 0, για μεγάλα λ θα έχουμε ότι $\lambda K \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.

Αφού $0 \in \lambda K$, από την κυρτότητα του K έπεται ότι: αν $0 < \lambda < \lambda'$, τότε $\lambda K \subset \lambda' K$. Αφού το K είναι κλειστό, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda K = \bigcap \{\lambda' K : \lambda' > \lambda\}.$$

για κάθε $\lambda > 0$. Ειδικότερα, αν ορίσουμε

$$\lambda_1 = \inf\{\lambda > 0 : \lambda K \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset\},$$

τότε

$$(2.1.2) \quad \lambda_1 K \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset.$$

Δηλαδή, υπάρχει ελάχιστος $\lambda_1 > 0$ για τον οποίο το $\lambda_1 K$ περιέχει μη μηδενικό ακέραιο σημείο (το οποίο, βέβαια, θα βρίσκεται στο σύνορό του). Για την απόδειξη της (2.1.2), σταθεροποιούμε $\lambda_* > \lambda_1$ και θεωρούμε φθίνουσα ακολουθία $\lambda_* > \mu_n \rightarrow \lambda_1$. Το $\lambda_* K$ περιέχει πεπερασμένα το πλήθος μη μηδενικά ακέραια σημεία, και, για κάθε n , κάποιο από αυτά ανήκει στο $\mu_n K$. Υπάρχουν λοιπόν μη μηδενικό $u \in \mathbb{Z}^n$ και υπακολουθία μ_{k_n} ώστε $u \in \mu_{k_n} K$ για κάθε n . Τότε,

$$u \in \bigcap_n \mu_{k_n} K = \lambda_1 K.$$

Για κάθε $\lambda > 0$ θεωρούμε τα σύνολα $\lambda K + u, u \in \mathbb{Z}^n$. Για μικρά λ , τα σύνολα $\lambda K + u$ είναι ξένα ανά δύο. Με ένα επιχείρημα ανάλογο προς το προηγούμενο, δείχνουμε ότι υπάρχει ελάχιστος $\lambda_0 > 0$ για τον οποίο υπάρχει $u \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ώστε $\lambda_0 K \cap (\lambda_0 K + u) \neq \emptyset$.

Λήμμα 2.1.4. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K ισχύει η ισότητα $\lambda_1 = 2\lambda_0$.

Απόδειξη. Έστω $x \in \lambda_0 K \cap (\lambda_0 K + u)$, όπου $u \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Τότε, λόγω της συμμετρίας του K , έχουμε ότι $u - x \in \lambda_0 K$ και $x \in \lambda_0 K$, άρα $u \in 2\lambda_0 K$. Επομένως,

$$\lambda_1 \leq 2\lambda_0.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $u \in \lambda_1 K \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$, τότε, παρατηρώντας ότι $-u/2 \in (\lambda_1/2)K$ και χρησιμοποιώντας τη συμμετρία του K , γράφουμε

$$\frac{u}{2} = -\frac{u}{2} + u \in \frac{\lambda_1}{2}K \cap \left(\frac{\lambda_1}{2}K + u\right).$$

Έπεται ότι $\lambda_0 \leq \lambda_1/2$. □

Ο Minkowski ολοκλήρωνε το επιχείρημά του ως εξής: τα σύνολα $\lambda_0 K + u$, $u \in \mathbb{Z}^n$, έχουν ξένα εσωτερικά. Αυτό έχει σαν συνέπεια την ανισότητα $|\lambda_0 K| \leq 1$ (αλλιώς, το λήμμα του Blichfeldt θα μας οδηγούσε σε άτοπο, εξηγήστε γιατί). Σύμφωνα με το Λήμμα 2.1.4,

$$\lambda_1^n |K| = |\lambda_1 K| = |(2\lambda_0)K| = 2^n |\lambda_0 K| \leq 2^n.$$

Αν υποθέσουμε ότι το K δεν περιέχει μη μηδενικό ακέραιο σημείο, τότε $\lambda_1 > 1$, δηλαδή $|K| < 2^n$. Επομένως, κάθε κλειστό, συμμετρικό ως προς το 0 κυρτό σώμα K με όγκο $|K| \geq 2^n$, περιέχει μη μηδενικό $u \in \mathbb{Z}^n$.

Για την περίπτωση του ανοικτού K , υποθέτοντας ότι $|K| > 2^n$, βρίσκουμε $\lambda < 1$ ώστε $\lambda^n |K| > 2^n$, οπότε $|\lambda \bar{K}| = \lambda^n |K| > 2^n$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα, βρίσκουμε μη μηδενικό ακέραιο σημείο $u \in \lambda \bar{K} \subset K$. □

Παρατήρηση 2.1.5. Το επιχείρημα του Minkowski (ειδικότερα η εισαγωγή των παραμέτρων λ_0, λ_1 και το Λήμμα 2.1.4 είναι σημαντικό για ιστορικούς λόγους. Τον οδήγησε στον ορισμό της νόρμας που επάγεται από το K και στον ορισμό των διαδοχικών ελαχίστων του K : Έστω K κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}(K)$. Η συνάρτηση στάθμης (ή συναρτησοειδές Minkowski) του K είναι η συνάρτηση $g_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$g_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}.$$

Αν το K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα, τότε η g_K είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και $K = \{x : g_K(x) \leq 1\}$.

Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι, για κάθε $i = 1, \dots, n$, υπάρχουν $\lambda > 0$ ώστε το λK να περιέχει τουλάχιστον i γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{Z}^n$. Ορίζουμε

$$\lambda_i = \inf\{\lambda > 0 : \dim(\lambda K \cap \mathbb{Z}^n) \geq i\},$$

όπου $\dim(\lambda K \cap \mathbb{Z}^n)$ είναι η διάσταση του υποχώρου που παράγεται από τα ακέραια σημεία του λK . Οι αριθμοί $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ είναι τα διαδοχικά ελάχιστα του K . Σύμφωνα με

το πρώτο θεώρημα του Minkowski, αφού $\lambda_1 K \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$, το $\lambda_1 K$ πρέπει να έχει όγκο το πολύ ίσο με 2^n :

$$\lambda_1^n |K| \leq 2^n.$$

Παίρνοντας υπ' όψιν του όλα τα διαδοχικά ελάχιστα $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ του K , ο Minkowski απέδειξε κάτι ισχυρότερο (το δεύτερο θεώρημα του Minkowski).

Θεώρημα 2.1.6. Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n |K| \leq 2^n.$$

2.2 Εφαρμογές στη θεωρία των αριθμών

2.2.1 Ομογενείς γραμμικές μορφές

Η πιο γνωστή εφαρμογή του θεωρήματος του Minkowski αφορά συστήματα ομογενών γραμμικών μορφών:

Θεώρημα 2.2.1. Έστω $\xi_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$, $i = 1, \dots, n$, ομογενείς γραμμικές μορφές με πραγματικούς συντελεστές a_{ij} και μη μηδενική ορίζουσα Δ . Αν $t_1, \dots, t_n > 0$ και $t_1 t_2 \dots t_n \geq |\Delta|$, τότε υπάρχει $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ώστε

$$|\xi_i(x_1, \dots, x_n)| \leq t_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο

$$P = \{x : |\xi_i(x_1, \dots, x_n)| \leq t_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Αν T είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που ορίζεται από τον πίνακα (a_{ij}) , τότε $P = T^{-1}(P_1)$, όπου

$$P_1 = \{y : |y_i| \leq t_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Άρα,

$$|P| = |T^{-1}(P_1)| = \frac{|P_1|}{|\Delta|} = 2^n \frac{t_1 t_2 \dots t_n}{|\Delta|} \geq 2^n.$$

Από το θεώρημα του Minkowski, υπάρχει $x \in P \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$. □

Εφαρμογή. Έστω $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Υπάρχουν ακέραιοι $u_1, \dots, u_{n+1}$ ώστε

$$|u_{n+1}a_i - u_i| \leq \frac{1}{u_{n+1}^{1/n}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\xi_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$ και

$$\xi_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}a_i - x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Τότε $|\Delta| = 1$, άρα για κάθε $t > 1$ υπάρχει $(u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ που ικανοποιεί τις

$$|u_{n+1}| \leq t \quad \text{και} \quad |u_{n+1}a_i - u_i| \leq t^{-1/n}.$$

Το u_{n+1} δεν μπορεί να είναι ίσο με μηδέν, γιατί τότε όλοι οι u_i , $i \leq n$ θα ήταν απολύτως μικρότεροι του 1, δηλαδή επίσης ίσοι με μηδέν. Επίσης, αντικαθιστώντας αν χρειαστεί όλους τους u_i με τους $-u_i$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u_{n+1} > 0$. Έπεται ότι

$$|u_{n+1}a_i - u_i| \leq \frac{1}{t^{1/n}} \leq \frac{1}{u_{n+1}^{1/n}}$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$. □

2.2.2 Το θεώρημα προσέγγισης του Dirichlet

Εφαρμόζουμε τώρα πιο προσεκτικά το θεώρημα του Minkowski στο πρόβλημα της προσέγγισης πραγματικών αριθμών από ρητούς (θεώρημα του Dirichlet).

Θεώρημα 2.2.2. Υπάρχει σταθερά $c > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $a \in \mathbb{R}$, υπάρχει οσοδήποτε μεγάλος $q \in \mathbb{N}$ και υπάρχει $p \in \mathbb{Z}$, ώστε

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{c}{q^2}.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο a είναι άρρητος (αν ο a είναι ρητός, τότε το πρόβλημα δεν έχει καμιά δυσκολία). Έστω $M > 0$. Αφού $a \notin \mathbb{Q}$, υπάρχει $Q > 1$ ώστε

$$t_M := \min\{|aq - p| : q \leq M, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}\} > \frac{1}{Q}.$$

Ορίζουμε

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |ax - y| \leq \frac{1}{Q}, |x| \leq Q \right\}.$$

Το K είναι παραλληλόγραμμο, με εμβαδόν $|K| = (2Q)(2/Q) = 4$. Από το θεώρημα του Minkowski, υπάρχει $(q, p) \in K \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\})$. Έχουμε $q \neq 0$, γιατί αλλιώς θα είχαμε $|p| \leq 1/Q < 1$, δηλαδή $p = 0$. Επίσης, λόγω της συμμετρίας του K , μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q > 0$ (δηλαδή, $q \in \mathbb{N}$). Αυτό σημαίνει ότι $0 < q \leq Q$ και $|aq - p| \leq 1/Q$, άρα

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qQ} \leq \frac{1}{q^2}.$$

Τέλος, από τον ορισμό του t_M , έχουμε ότι

$$|aq - p| \leq \frac{1}{Q} < t_M,$$

άρα $q > M$. □

Το Θεώρημα 2.2.2 γενικεύεται ως εξής:

Θεώρημα 2.2.3. Υπάρχει σταθερά $c > 0$ με την ιδιότητα: αν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, υπάρχει οσοδήποτε μεγάλος $q \in \mathbb{N}$ και υπάρχουν $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$, ώστε

$$\left| a_i - \frac{p_i}{q} \right| \leq \frac{c}{q^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Απόδειξη. Έστω $M > 0$. Η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν του Θεωρήματος 2.2.2: μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι $a_1, \dots, a_n$ δεν είναι όλοι ρητοί. Το παραλληλεπίπεδο στο οποίο εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Minkowski, είναι το

$$K = \left\{ (x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |a_i x - y_i| \leq \frac{1}{Q^{1/n}}, |x| \leq Q \right\},$$

όπου $Q > 1$ αρκετά μεγάλος ώστε να ικανοποιείται η

$$t_M := \min \left\{ \max_{i \leq n} |a_i q - p_i| : q \leq M, q \in \mathbb{N}, p_i \in \mathbb{Z} \right\} > \frac{1}{Q^{1/n}}.$$

Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση. □

2.2.3 Γινόμενο γραμμικών μορφών

Έστω $\xi_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$, $i = 1, \dots, n$, ομογενείς γραμμικές μορφές με πραγματικούς συντελεστές a_{ij} και μη μηδενική ορίζουσα Δ . Παίρνοντας $t_1 = \dots = t_n = |\Delta|^{1/n}$ στο Θεώρημα 3.2.1, βλέπουμε ότι υπάρχει $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ώστε

$$\prod_{i=1}^n |\xi_i(x_1, \dots, x_n)| \leq |\Delta|.$$

Θα δώσουμε ένα καλύτερο άνω φράγμα για το γινόμενο των ξ_i .

Θεώρημα 2.2.4. Αν ξ_i και Δ όπως παραπάνω, υπάρχει $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ώστε

$$\prod_{i=1}^n |\xi_i(x_1, \dots, x_n)| \leq \frac{n!}{n^n} |\Delta|.$$

Απόδειξη. Το χωρίο $\{x : \prod_{i=1}^n |\xi_i(x)| \leq r\}$, $r > 0$, δεν είναι κυρτό, περιέχει όμως το

$$K_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |\xi_i(x)| \leq nr^{1/n} \right\},$$

γιατί, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, για κάθε $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\prod_{i=1}^n |\xi_i(x)| \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\xi_i(x)| \right)^n.$$

Αν T είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που ορίζεται από τις ξ_i , τότε $K_r = T^{-1}(K_r^1)$, όπου

$$K_r^1 = \left\{ y : \sum_{i=1}^n |y_i| \leq nr^{1/n} \right\}.$$

Άρα,

$$|K_r| = \frac{|K_r^1|}{|\det T|} = \frac{2^n n^n r}{n! |\Delta|}.$$

Ο όγκος του K_r θα είναι ίσος με 2^n αν $r = r_0 = n! |\Delta| / n^n$, και τότε, το θεώρημα του Minkowski μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει $x \in K_{r_0} \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ για το οποίο

$$\prod_{i=1}^n |\xi_i(x)| \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\xi_i(x)| \right)^n \leq r_0 = \frac{n!}{n^n} |\Delta|.$$

□

2.2.4 Τετραγωνικές μορφές

Θεώρημα 2.2.5. Έστω $A = (a_{ij})$ συμμετρικός, θετικά ορισμένος $n \times n$ πίνακας. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή

$$T(x_1, \dots, x_n) = T(x) = \langle Ax, x \rangle.$$

Αν $D = \det(a_{ij})$ είναι n διακρίνουσα της T , μπορούμε να βρούμε $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ώστε

$$T(u_1, \dots, u_n) \leq \frac{4}{\pi} \left(\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 D \right)^{1/n}.$$

Απόδειξη. Υπάρχει συμμετρικός, θετικά ορισμένος S ώστε $S^2 = A$. Για κάθε $r > 0$ ορίζουμε

$$K_r = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x) \leq r\}.$$

Έχουμε $T(x) \leq r$ αν και μόνο αν $\|Sx\|_2^2 \leq r$. Δηλαδή, $K_r = \sqrt{r} S^{-1}(B_2^n)$. Επομένως,

$$|K_r| = \frac{r^{n/2}}{\det(S)} \omega_n = \frac{r^{n/2}}{\sqrt{D}} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Επιλέγουμε $r_0 > 0$ έτσι ώστε να έχουμε ότι $|K_{r_0}| = 2^n$. Τότε, από το Θεώρημα του Minkowski, μπορούμε να βρούμε $(u_1, \dots, u_n) \in K_{r_0} \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$, δηλαδή,

$$T(u_1, \dots, u_n) \leq r_0 = \frac{4}{\pi} \left(\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 D \right)^{1/n}.$$

□

2.2.5 Το θεώρημα του Lagrange

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Minkowski, θα αποδείξουμε το εξής θεώρημα του Lagrange.

Θεώρημα 2.2.6. *Κάθε φυσικός αριθμός n γράφεται στη μορφή $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, όπου $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$.*

Αρχικά, παρατηρούμε ότι αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση που ο n είναι ελεύθερος τετραγώνων, δηλαδή, $n = p_1 \dots p_r$, όπου p_j διακεκριμένοι πρώτοι. Παρατηρήστε ότι κάθε φυσικός αριθμός n γράφεται στη μορφή $n = s^2 m$, όπου ο m είναι ελεύθερος τετραγώνων ή $m = 1$. Πράγματι, ο n αναλύεται στη μορφή $n = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$. Αν $a_j = 2t_j + v_j$ με $v_j \in \{0, 1\}$, αρκεί να θέσουμε $s = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$ και $m = p_1^{v_1} \dots p_r^{v_r}$.

Αν ο ισχυρισμός του θεωρήματος αληθεύει για τους φυσικούς που είναι ελεύθεροι τετραγώνων, και αν μας δοθεί τυχόν φυσικός αριθμός n , γράφουμε τον n στη μορφή $n = s^2 m$ όπου ο m είναι ελεύθερος τετραγώνων και, γνωρίζοντας ότι μπορούμε να γράψουμε τον m στη μορφή $m = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$ όπου $y_i \in \mathbb{Z}$, παίρνουμε

$$n = (ly_1)^2 + (ly_2)^2 + (ly_3)^2 + (ly_4)^2.$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $n = p_1 \dots p_r$, όπου p_j διακεκριμένοι πρώτοι.

Λήμμα 2.2.7. *Έστω p πρώτος. Υπάρχουν $a_p, b_p \in \mathbb{Z}$ ώστε*

$$a_p^2 + b_p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Απόδειξη. Αν $p = 2$, παίρνουμε $a_2 = 1$ και $b_2 = 0$. Αν ο p είναι περιτός πρώτος, ελέγχουμε ότι οι αριθμοί a^2 , $a = 0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}$, είναι ανισοϋπόλοιποι mod p , και το ίδιο ισχύει για τους $-1 - b^2$, $b = 0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}$. Αφού το πλήθος των a και b είναι $p + 1$, υπάρχουν δύο από αυτούς που ανήκουν στην ίδια κλάση mod p . Αυτό σημαίνει υποχρεωτικά ότι υπάρχουν $0 \leq a_p, b_p \leq \frac{p-1}{2}$ με την ιδιότητα

$$a_p^2 \equiv -1 - b_p^2 \pmod{p},$$

δηλαδή, $a_p^2 + b_p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. □

Λήμμα 2.2.8. *Έστω $n = p_1 \dots p_r$, όπου p_j διακεκριμένοι πρώτοι. Υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}$ ώστε*

$$a^2 + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα, για κάθε $j = 1, \dots, r$ υπάρχουν $a_j, b_j \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$a_j^2 + b_j^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p_j}.$$

Από το Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων, τα συστήματα

$$x \equiv a_j \pmod{p_j}, \quad j = 1, \dots, r$$

και

$$x \equiv b_j \pmod{p_j}, \quad j = 1, \dots, r$$

έχουν λύσεις a και b αντίστοιχα. Τότε,

$$a^2 + b^2 + 1 \equiv a_j^2 + b_j^2 + 1 \equiv \pmod{p_j}$$

για κάθε $j = 1, \dots, r$. Αφού οι p_j είναι διακεκριμένοι πρώτοι, έπεται ότι $a^2 + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$. $\square$

Συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος 2.2.6. Θα λέμε **πλέγμα** κάθε σύνολο της μορφής $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$, όπου $T \in GL(n)$ (ο T είναι αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$). Αν για κάποιο πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ και κάποιο συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$|K| \geq 2^n |\det T|,$$

τότε υπάρχει $v \neq 0$ ώστε $v \in K \cap \Lambda$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε το συμμετρικό κυρτό σώμα $K_1 = T^{-1}(K)$, τότε $|K_1| = |K|/|\det T| \geq 2^n$. Από το θεώρημα του Minkowski υπάρχει $u \neq 0$ ώστε $u \in K_1 \cap \mathbb{Z}^n$. Θέτοντας $v = T(u)$ έχουμε ότι $v \neq 0$, $v \in T(K_1) = K$ και $v \in T(\mathbb{Z}^n) = \Lambda$.

Από το Λήμμα 2.2.8 υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}$ ώστε $n \mid (a^2 + b^2 + 1)$. Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ που ορίζεται από τις

$$T(e_1) = (1, 0, a, -b), \quad T(e_2) = (0, 1, b, a), \quad T(e_3) = (0, 0, n, 0), \quad T(e_4) = (0, 0, 0, n).$$

Ο T είναι αντιστρέψιμος και $|\det T| = n^2$. Αν $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{Z}^n$ τότε

$$T(u) = (u_1, u_2, au_1 + bu_2 + nu_3, -bu_1 + au_2 + nu_4).$$

Θεωρούμε το πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ και τη μπάλα $B = \{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 2n\}$. Ο όγκος της είναι ίσος με

$$|B| = 2n^2 \pi^2 > 16n^2 = 2^4 |\det T|.$$

Από το θεώρημα του Minkowski, υπάρχει $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Lambda \setminus \{0\}$ ώστε

$$0 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 2n.$$

Δηλαδή, υπάρχει $u \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ώστε

$$(2.2.1) \quad 0 < u_1^2 + u_2^2 + (au_1 + bu_2 + nu_3)^2 + (-bu_1 + au_2 + nu_4)^2 < 2n.$$

Όμως, αν θέσουμε $U = u_1^2 + u_2^2 + (au_1 + bu_2 + nu_3)^2 + (-bu_1 + au_2 + nu_4)^2$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} U &\equiv u_1^2 + u_2^2 + (au_1 + bu_2)^2 + (-bu_1 + au_2)^2 \pmod{n} \\ &\equiv u_1^2 + u_2^2 + (a^2 + b^2)(u_1^2 + u_2^2) \pmod{n} \\ &\equiv (a^2 + b^2 + 1)(u_1^2 + u_2^2) \pmod{n} \\ &\equiv 0 \pmod{n} \end{aligned}$$

Άρα, $n \mid U$. Από την (2.2.1) συμπεραίνουμε ότι $n = U = u_1^2 + u_2^2 + (au_1 + bu_2 + nu_3)^2 + (-bu_1 + au_2 + nu_4)^2$. $\square$

2.3 Ακέραια σημεία σε ελλειψοειδή

Ένα συμμετρικό κυρτό σώμα E στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ελλειψοειδές* αν υπάρχει αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός T ($T \in GL(n)$) ώστε $E = T(B_2^n)$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}_n$ την κλάση όλων των ελλειψοειδών του $\mathbb{R}^n$ που δεν περιέχουν στο εσωτερικό τους κανένα σημείο του $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Το πρόβλημα που θα μάς απασχολήσει σε αυτή την ενότητα είναι να δοθούν εκτιμήσεις για την ποσότητα

$$\alpha_n = \sup\{|E| : E \in \mathcal{E}_n\}.$$

2.3.1 Η μέθοδος του Blichfeldt

Ο Blichfeldt έδωσε το ακόλουθο άνω φράγμα για την α_n .

Θεώρημα 2.3.1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει η ανισότητα

$$\alpha_n \leq \frac{n+2}{2} 2^{n/2}.$$

Για την απόδειξη της ανισότητας κάνουμε πρώτα την εξής αναγωγή. Θέλουμε να δείξουμε ότι:

Για κάθε ελλειψοειδές E με όγκο $|E| > \frac{n+2}{2} 2^{n/2}$ ισχύει $E \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.

Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι:

Για κάθε πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ στον $\mathbb{R}^n$ με $|B_2^n| > \frac{n+2}{2} |\det T|$ ισχύει $B_2^n \cap (\Lambda \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.

Η απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο προτάσεων αφήνεται ως άσκηση.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1. Θεωρούμε λοιπόν ένα πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο ικανοποιεί την

$$(2.3.1) \quad |B_2^n| > \frac{n+2}{2} |\det T|.$$

Αν $v_i = T(e_i)$, $i = 1, \dots, n$, θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i v_i : 0 \leq t_i < 1 \right\}.$$

Παρατηρήστε ότι $Q = T(P)$, όπου $P = \{x : 0 \leq x_i < 1, i = 1, \dots, n\}$ είναι το θεμελιώδες παραλληλεπίπεδο του $\mathbb{Z}^n$. Συνεπώς,

$$|Q| = |T(P)| = |\det T| |P| = |\det T|.$$

Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \sum_{u \in \Lambda} \int_{u+Q} f(x) dx = \sum_{u \in \Lambda} \int_Q f(u+y) dy \\ &= \int_Q \left(\sum_{u \in \Lambda} f(u+y) \right) dy. \end{aligned}$$

Αν λοιπόν η f ικανοποιεί την

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx > |Q|,$$

τότε

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\sum_{u \in \Lambda} f(u+y) \right) dy > 1,$$

και αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$(2.3.2) \quad \sum_{u \in \Lambda} f(u+y) > 1.$$

Λήμμα 2.3.2. *Η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2\|x\|_2^2 & , \quad 0 \leq \|x\|_2 < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & , \quad \|x\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

ικανοποιεί την

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx > |Q|.$$

Απόδειξη. Θέτοντας $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int_{rB_2^n} \left(1 - \frac{\|x\|_2^2}{r^2}\right) dx = |rB_2^n| - \frac{1}{r^2} \int_{rB_2^n} \int_0^{\|x\|_2} 2t dt dx \\
 &= |rB_2^n| - \frac{1}{r^2} \int_0^r 2t \int_{t \leq \|x\|_2 \leq r} dx dt = |rB_2^n| - \frac{1}{r^2} \int_0^r 2t (|rB_2^n| - |tB_2^n|) dt \\
 &= |rB_2^n| - |rB_2^n| \frac{1}{r^2} \int_0^r 2t \left(1 - \frac{t^n}{r^n}\right) dt = |rB_2^n| - |rB_2^n| \frac{1}{r^2} \int_0^r \left(2t - \frac{2t^{n+1}}{r^n}\right) dt \\
 &= |rB_2^n| - |rB_2^n| \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) = \frac{2}{n+2} |rB_2^n| = \frac{2}{n+2} \frac{1}{2^{n/2}} |B_2^n| \\
 &> |\det T| = |Q|,
 \end{aligned}$$

όπου στο τέλος αντικαταστήσαμε $r = 1/\sqrt{2}$ και χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι $|B_2^n| > \frac{n+2}{2} |\det T|$ που κάναμε για το Λ στην (2.3.1). $\square$

Τώρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την (2.3.2) για τη συγκεκριμένη συνάρτηση f : υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$(2.3.3) \quad \sum_{u \in \Lambda \cap B(-y, 1/\sqrt{2})} (1 - 2\|u + y\|_2^2) > 1.$$

Το σύνολο U των $u \in \Lambda$ που ικανοποιούν την $\|u + y\|_2 < 1/\sqrt{2}$ είναι πεπερασμένο. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ και τότε η (2.3.3) παίρνει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^m (1 - 2\|u_i + y\|_2^2) > 1,$$

δηλαδή

$$(2.3.4) \quad \sum_{i=1}^m \|u_i + y\|_2^2 < \frac{m-1}{2}.$$

Ο Blichfeldt ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος μέσω της ακόλουθης ανισότητας:

Λήμμα 2.3.3. Αν $y, u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \|u_i - u_j\|_2^2 \leq 2m \sum_{i=1}^m \|u_i + y\|_2^2.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα στην περίπτωση $y = 0$:

$$(2.3.5) \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \|u_i - u_j\|_2^2 \leq 2m \sum_{i=1}^m \|u_i\|_2^2.$$

Κατόπιν εφαρμόζουμε αυτή την ειδική περίπτωση για τα $u_1 + y, \dots, u_m + y$.

Για την απόδειξη της (2.3.5), γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \|u_i - u_j\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\|u_i\|_2^2 - 2\langle u_i, u_j \rangle + \|u_j\|_2^2) \\ &= 2m \sum_{i=1}^m \|u_i\|_2^2 - 2 \left\langle \sum_{i=1}^m u_i, \sum_{j=1}^m u_j \right\rangle \\ &= 2m \sum_{i=1}^m \|u_i\|_2^2 - 2 \left\| \sum_{i=1}^m u_i \right\|_2^2 \\ &\leq 2m \sum_{i=1}^m \|u_i\|_2^2. \end{aligned}$$

□

Επιστρέφουμε στην (2.3.4): χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.3.3 παίρνουμε

$$(2.3.6) \quad \sum_{i,j=1}^m \|u_i - u_j\|_2^2 \leq 2m \sum_{i=1}^m \|u_i + y\|_2^2 < 2m \frac{m-1}{2} = m(m-1).$$

Όμως, το πλήθος των μη μηδενικών όρων $\|u_i - u_j\|_2^2$ (με $i \neq j$) στο αριστερό μέλος της (2.3.6) είναι ίσο με $m(m-1)$. Συνεπώς, υπάρχουν $i \neq j$ ώστε $\|u_i - u_j\|_2^2 < 1$. Δηλαδή, το $v = u_i - u_j$ ανήκει στο Λ , είναι μη μηδενικό, και

$$\|v\|_2 = \|u_i - u_j\|_2 < 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι $v \in B_2^n \cap (\Lambda \setminus \{0\})$. Δηλαδή, δείξαμε ότι για κάθε πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ στον $\mathbb{R}^n$ με $|B_2^n| > \frac{n+2}{2} |\det T|$ ισχύει $B_2^n \cap (\Lambda \setminus \{0\}) \neq \emptyset$. □

2.3.2 Ελλειψοειδή χωρίς ακέραια σημεία

Σε αυτή την ενότητα εξετάζουμε το αντίστροφο πρόβλημα: να βρεθεί ελλειψοειδές με όσο γίνεται μεγαλύτερο όγκο, το οποίο δεν περιέχει ακέραια σημεία στο εσωτερικό του. Το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα οφείλεται στον K. Ball και χρησιμοποιεί το λήμμα του Bang:

Λήμμα 2.3.4. Έστω $x_1, \dots, x_m$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, και $w_1, \dots, w_m$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Υπάρχει επιλογή προσήμων $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ ώστε το $u = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i w_i x_i$ να ικανοποιεί τις

$$|\langle u, x_i \rangle| \geq w_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \{-1, 1\}^m$, θέτουμε $u(\varepsilon) = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i w_i x_i$. Επιλέγουμε εκείνο το $u = u(\varepsilon^*)$ που έχει το μεγαλύτερο μήκος (αν υπάρχουν περισσότερα από ένα τέτοια $u(\varepsilon)$, επιλέγουμε οποιοδήποτε από αυτά).

Για κάθε $j = 1, \dots, m$, ορίζουμε

$$u_j = u(\varepsilon^*) - 2\varepsilon_j^* w_j x_j.$$

Κάθε u_j είναι της μορφής $u(\varepsilon)$, με $\varepsilon_i = \varepsilon_i^*$ αν $i \neq j$, και $\varepsilon_j = -\varepsilon_j^*$. Άρα,

$$\begin{aligned} \|u(\varepsilon^*)\|_2^2 &\geq \|u_j\|_2^2 = \|u(\varepsilon^*) - 2\varepsilon_j^* w_j x_j\|_2^2 \\ &= \|u(\varepsilon^*)\|_2^2 - 4w_j \varepsilon_j^* \langle u(\varepsilon^*), x_j \rangle + 4w_j^2 \|x_j\|_2^2. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$|\langle u(\varepsilon^*), x_j \rangle| \geq \varepsilon_j^* \langle u(\varepsilon^*), x_j \rangle \geq \frac{4w_j^2 \|x_j\|_2^2}{4w_j} = w_j,$$

για κάθε $j = 1, \dots, m$. □

Η ακριβής διατύπωση του θεωρήματος του Ball είναι η εξής:

Θεώρημα 2.3.5. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ελλειψοειδής E στον $\mathbb{R}^n$ που δεν περιέχει σημεία του $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, και έχει όγκο

$$|E| > 2(n-1) - \varepsilon.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την κλάση όλων των ελλειψοειδών της μορφής

$$E_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle^2 + \|x\|_2^2 < R^2\}, \quad u \in \mathbb{R}^n, R > 0.$$

Για κάθε $R > 0$, προσπαθούμε αρχικά να βρούμε $u = u_R \in \mathbb{R}^n$, ώστε το E_R να μην περιέχει ακέραια σημεία εκτός από το 0. Δηλαδή, ζητάμε για κάθε $z \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ να ισχύει

$$\langle u, z \rangle^2 + \|z\|_2^2 \geq R^2.$$

Η ανισότητα αυτή ικανοποιείται προφανώς αν $\|z\|_2 \geq R$. Περιοριζόμαστε λοιπόν στα $0 < \|z\|_2 < R$, και ζητάμε

$$\left| \left\langle u, \frac{z}{\|z\|_2} \right\rangle \right| \geq \sqrt{\frac{R^2}{\|z\|_2^2} - 1}.$$

Θέτουμε $w_z = \sqrt{(R/\|z\|_2)^2 - 1}$, κρατάμε ένα μόνο $\tilde{z}$ από τα $\pm z$ για κάθε $0 < \|z\|_2 < R$, και εφαρμόζουμε το Λήμμα του Bang: υπάρχουν $\varepsilon_{\tilde{z}} \in \{-1, 1\}$, ώστε

$$\left| \left\langle \sum_{\tilde{z}} \varepsilon_{\tilde{z}} w_{\tilde{z}} \frac{\tilde{z}}{\|\tilde{z}\|_2}, \frac{\tilde{z}}{\|\tilde{z}\|_2} \right\rangle \right| \geq w_{\tilde{z}}, \quad 0 < \|z\|_2 < R.$$

Ισοδύναμα, υπάρχουν $\varepsilon_z \in \{-1, 1\}$ ώστε το διάνυσμα

$$u = u(R) = \frac{1}{2} \sum_{0 < \|z\|_2 < R} \varepsilon_z w_z \frac{z}{\|z\|_2}$$

να ικανοποιεί τις

$$\left| \left\langle u, \frac{z}{\|z\|_2} \right\rangle \right| \geq w_z, \quad 0 < \|z\|_2 < R.$$

Γι' αυτήν την επιλογή του u έχουμε εξασφαλίσει ότι $E_R \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$. Για τον υπολογισμό του όγκου του E_R , χρειαζόμαστε μια εκτίμηση για το μήκος του u . Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε το μοναδιαίο διάνυσμα ϑ στη διεύθυνση του u . Αν $K(R)$ είναι το μήκος του u , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} K(R) = \|u\|_2 = \langle u, \vartheta \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{0 < \|z\|_2 < R} \varepsilon_z \frac{\langle z, \vartheta \rangle}{\|z\|_2} w_z \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{0 < \|z\|_2 < R} \frac{|\langle z, \vartheta \rangle|}{\|z\|_2} \sqrt{\frac{R^2}{\|z\|_2^2} - 1} =: \tilde{K}(R). \end{aligned}$$

Θέτουμε $v = z/R$. Τότε,

$$\tilde{K}(R) = \frac{1}{2} \sum_{v \in \frac{1}{R} \mathbb{Z}^n \cap B_2^n \setminus \{0\}} \frac{|\langle v, \vartheta \rangle|}{\|v\|_2} \sqrt{\frac{1}{\|v\|_2^2} - 1}.$$

Καθώς το $R \rightarrow \infty$, το παραπάνω άθροισμα (πολλαπλασιασμένο επί R^{-n}) είναι ένα άθροισμα Riemann για το

$$\frac{1}{2} \int_{B_2^n} \frac{|\langle v, \vartheta \rangle|}{\|v\|_2} \sqrt{\frac{1}{\|v\|_2^2} - 1} dv.$$

Δηλαδή,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\tilde{K}(R)}{\omega_n R^n} = \frac{1}{2\omega_n} \int_{B_2^n} \frac{|\langle v, \vartheta \rangle|}{\|v\|_2} \sqrt{\frac{1}{\|v\|_2^2} - 1} dv.$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος, παίρνουμε πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\tilde{K}(R)}{\omega_n R^n} &= \frac{n\omega_n}{2\omega_n} \int_{S^{n-1}} \int_0^1 |\langle \varphi, \vartheta \rangle| \rho^{n-1} \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1} d\rho \sigma(d\varphi) \\ &= \frac{n}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle \varphi, \vartheta \rangle| \sigma(d\varphi) \cdot \int_0^1 \rho^{n-2} \sqrt{1 - \rho^2} d\rho. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του $\vartheta \in S^{n-1}$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $\vartheta = e_1$. Γράφουμε

$$\int_{B_2^n} |z_1| dz = n\omega_n \int_{S^{n-1}} |\langle \varphi, e_1 \rangle| \sigma(d\varphi) \cdot \int_0^1 \rho^n d\rho = \frac{n\omega_n}{n+1} \int_{S^{n-1}} |\langle \varphi, e_1 \rangle| \sigma(d\varphi),$$

και

$$\int_{B_2^n} |z_1| dz = 2 \int_0^1 \omega_{n-1} t (1 - t^2)^{(n-1)/2} dt,$$

οπότε,

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} |\langle \varphi, \vartheta \rangle| \sigma(d\varphi) &= \frac{2\omega_{n-1} \int_0^1 t(1-t^2)^{(n-1)/2} dt}{(n\omega_n)/(n+1)} \\ &= \frac{2(n+1)\omega_{n-1}}{n\omega_n} \left[-\frac{1}{n+1} (1-t^2)^{(n+1)/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{2\omega_{n-1}}{n\omega_n}. \end{aligned}$$

Τέλος,

$$\int_0^1 \rho^{n-2} \sqrt{1-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}-1} (1-t)^{\frac{3}{2}-1} dt = \frac{\Gamma((n-1)/2)\Gamma(3/2)}{2\Gamma((n+2)/2)}.$$

Παίρνοντας υπ' όψιν μας την $\omega_k = \pi^{k/2}/\Gamma((k/2)+1)$, καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\tilde{K}(R)}{\omega_n R^n} &= \frac{2\omega_{n-1}}{n\omega_n} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2}) \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \\ &= \frac{2}{n} \frac{\pi^{(n-1)/2} \Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\pi^{n/2} \Gamma(\frac{n-1}{2}+1)} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2}) \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{2\Gamma(\frac{n}{2})} \\ &= \frac{1}{2(n-1)}. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι, για μεγάλα R ,

$$\frac{\omega_n R^n}{\tilde{K}(R)} > 2(n-1) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι $\lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{K}(R) = +\infty$, αλλιώς θα είχαμε

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\tilde{K}(R)}{\omega_n R^n} = 0.$$

Από την άλλη πλευρά, ο όγκος του E_R είναι ίσος με τον όγκο του

$$E'_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle K(R)e_1, x \rangle^2 + \|x\|_2^2 < R^2\},$$

ο οποίος υπολογίζεται εύκολα: το E'_R έχει $(n-1)$ ημιάξονες ίσους με R , και έναν ίσο με $R/\sqrt{1+K^2(R)}$. Άρα,

$$|E_R| = \frac{\omega_n R^n}{\sqrt{1+K^2(R)}} \geq \frac{\omega_n R^n}{\sqrt{1+\tilde{K}^2(R)}},$$

το οποίο για μεγάλα R είναι μεγαλύτερο από

$$\frac{\omega_n R^n}{\tilde{K}(R)} - \frac{\varepsilon}{2} > 2(n-1) - \varepsilon.$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει ότι υπάρχουν ελλειψοειδή χωρίς μη τετρωμένα ακέραια σημεία, τα

οποία έχουν όγκο οσοδήποτε κοντά στο $2(n-1)$. □

Άμεση συνέπεια είναι το ακόλουθο κάτω φράγμα για την α_n :

Θεώρημα 2.3.6. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geq 2(n-1)$.

Παρατήρηση 2.3.7. Στην κατεύθυνση του θεωρήματος του Blichfeldt, το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα είναι αυτό των Kabatjanskii και Levenstein:

$$\alpha_n \leq (1.32)^n \simeq 2^{[0.401+o_n(1)]n}.$$

2.4 Εφαρμογές της ανάλυσης Fourier στην κυρτή γεωμετρία

2.4.1 Η απόδειξη του Siegel για το πρώτο θεώρημα του Minkowski

Ο Siegel απέδειξε έναν γενικό τύπο από τον οποίο προκύπτει ως πόρισμα το πρώτο θεώρημα του Minkowski. Η απόδειξη αυτού του τύπου χρησιμοποιεί την ταυτότητα του Parseval. Η ιδέα είναι η εξής:

Έστω K ανοικτό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, χ η χαρακτηριστική συνάρτηση του $K/2$, και

$$\varphi(x) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} \chi(u+x).$$

Τότε, η $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ είναι περιοδική ως προς κάθε μεταβλητή, με περίοδο 1. Αν $P = \{x : 0 \leq x_i < 1, i = 1, \dots, n\}$ είναι το σύνηθες θεμελιώδες παραλληλεπίπεδο του $\mathbb{Z}^n$, η ταυτότητα του Parseval μας δίνει

$$\int_P \varphi^2(x) dx = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} |\alpha(u)|^2,$$

όπου

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= \int_P \varphi(x) e^{-2\pi i \langle u, x \rangle} dx = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} \int_P \chi(u+x) e^{-2\pi i \langle u, x \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) e^{-2\pi i \langle u, x \rangle} dx, \end{aligned}$$

είναι οι συντελεστές Fourier της φ .

Θεώρημα 2.4.1. Έστω K ανοικτό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ που δεν περιέχει μη μηδενικό ακέραιο σημείο. Αν ορίσουμε φ και α όπως παραπάνω, τότε

$$2^n = |K| + \frac{4^n}{|K|} \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\alpha(u)|^2.$$

Απόδειξη. Αφού $K \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$, τα σύνολα $u + \frac{1}{2}K$, $u \in \mathbb{Z}^n$, είναι ξένα, επομένως

$$u \neq u' \implies \chi(x+u)\chi(x+u') = 0.$$

Έπεται ότι $\varphi^2 = \varphi$ στον $\mathbb{R}^n$, άρα

$$\alpha(0) = \int_P \varphi(x) dx = \int_P \varphi^2(x) dx = |\alpha(0)|^2 + \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\alpha(u)|^2.$$

Όμως,

$$\alpha(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) dx = \frac{|K|}{2^n},$$

άρα

$$\frac{|K|}{2^n} = \frac{|K|^2}{4^n} + \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\alpha(u)|^2,$$

και το ζητούμενο προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας με $4^n/|K|$. $\square$

Πόρισμα 2.4.2. Έστω K ανοικτό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $K \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$, τότε $|K| \leq 2^n$.

2.4.2 Η απόδειξη του Hurwitz για την ισοπεριμετρική ανισότητα στο επίπεδο

Χρησιμοποιώντας μεθόδους ανάλυσης Fourier, ο Hurwitz απέδειξε την ακόλουθη ισοπεριμετρική ανισότητα:

Θεώρημα 2.4.3. Έστω K χωρίο στο επίπεδο του οποίου το σύνορο είναι μια απλή κλειστή και λεία καμπύλη. Τότε,

$$4\pi A(K) \leq P^2(K),$$

όπου $A(K)$ είναι το εμβαδόν του K και $P(K)$ είναι η περίμετρος του K . Ισότητα ισχύει μόνο αν το K είναι δίσκος.

Αρχικές παρατηρήσεις. Υποθέτουμε ότι το χωρίο K έχει σαν σύνορό του μια λεία απλή κλειστή καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Με αυτό εννοούμε ότι αν $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, τότε οι x' και y' είναι συνεχείς και επιπλέον $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ για κάθε t , το οποίο εξασφαλίζει ότι η καμπύλη έχει σε κάθε σημείο εφαπτόμενο διάνυσμα το οποίο μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο.

Το μήκος της καμπύλης γ δίνεται από την

$$P = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Θα ορίσουμε πρώτα μια νέα παραμετρικοποίηση της καμπύλης γ : Θεωρούμε την απεικόνιση $s : [a, b] \rightarrow [0, P]$ με

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2} du.$$

Η s είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση του t , συνεπώς ορίζεται η αντίστροφή της s^{-1} στο $[0, P]$ και μπορούμε να θεωρήσουμε την καμπύλη $\gamma_1 : [0, P] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\gamma_1(s) = \gamma(t)$ όπου

$s = s(t)$. Τότε, αν $x_1(s) = x(t)$ και $y_1(s) = y(t)$ έχουμε ότι

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}$$

και

$$\frac{dy_1}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι η γ_1 έχει την ιδιότητα

$$(dx_1/ds)^2 + (dy_1/ds)^2 = 1$$

για κάθε t . Έχουμε δηλαδή παραμετροποιήσει την καμπύλη ως προς μήκος τόξου.

Το εμβαδόν του χωρίου K υπολογίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος του Green: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $Q(x, y) = x$ και $P(x, y) = -y$. Αν με γ_1 συμβολίσουμε και την εικόνα της καμπύλης γ_1 (το σύνορο δηλαδή του K), τότε

$$\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy = \int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

και για τις συγκεκριμένες P και Q παίρνουμε

$$A(K) = \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} xdy - ydx.$$

Έπεται ότι

$$A(K) = \frac{1}{2} \int_0^P [x_1(s)y_1'(s) - y_1(s)x_1'(s)]ds$$

και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε

$$A(K) = \int_0^P x_1(s)y_1'(s)ds.$$

Θα κάνουμε ακόμα μια αλλαγή μεταβλητής: θέτουμε $2\pi s = P\theta$, οπότε $\theta \in [0, 2\pi]$ και αν $\gamma_2(\theta) = \gamma_1(s) = (x_2(\theta), y_2(\theta))$, έχουμε ότι

$$(2.4.1) \quad [x_2'(\theta)]^2 + [y_2'(\theta)]^2 = \frac{P^2}{4\pi^2}$$

για κάθε θ , και

$$(2.4.2) \quad A(K) = \int_0^{2\pi} x_2(\theta)y_2'(\theta)d\theta.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.3. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύνορο του K είναι η εικόνα μιας καμπύλης $\gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία ικανοποιεί τις (2.4.1) και (2.4.2).

Οι συναρτήσεις $x_2(\theta)$ και $y_2(\theta)$ είναι συνεχείς άρα έχουν σειρές Fourier, και επειδή είναι

και παραγωγίσιμες οι σειρές Fourier τους συγκλίνουν σε αυτές:

$$x_2(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta)$$

και

$$y_2(\vartheta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos k\vartheta + d_k \sin k\vartheta).$$

Επειδή οι x'_2 και y'_2 είναι συνεχείς, έχουν σειρές Fourier

$$x'_2(\vartheta) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (kb_k \cos k\vartheta - ka_k \sin k\vartheta)$$

και

$$y'_2(\vartheta) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (kd_k \cos k\vartheta - kc_k \sin k\vartheta).$$

Η ταυτότητα του Parseval μας δίνει

$$\int_0^{2\pi} [x'_2(\vartheta)]^2 d\vartheta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2)$$

και

$$\int_0^{2\pi} [y'_2(\vartheta)]^2 d\vartheta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (c_k^2 + d_k^2).$$

Συνδυάζοντας με την (2.4.1) παίρνουμε

$$P^2(K) = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2).$$

Από την άλλη πλευρά, η (2.4.2) μας δίνει

$$A(K) = \int_0^{2\pi} x_2(\vartheta) y'_2(\vartheta) d\vartheta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k (a_k d_k - b_k c_k).$$

Αφαιρώντας, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (2.4.3) \quad P^2 - 4\pi A &= 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) - 2k(a_k d_k - b_k c_k) \right) \\ &= 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k[(a_k - d_k)^2 + (b_k + c_k)^2] + 2\pi^2 \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - k) (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Η ανισότητα λοιπόν ισχύει και μένει να εξετάσουμε πότε μπορεί να ισχύει ισότητα. Από την (2.4.3) είναι φανερό ότι για $k \geq 2$ πρέπει να έχουμε ότι $a_k = b_k = c_k = d_k = 0$ (αφού $k^2 - k > 0$

αν $k \geq 2$). Επιπλέον, το πρώτο από τα δύο αθροίσματα πρέπει να μηδενίζεται κι αυτό, άρα $a_1 = d_1$ και $b_1 = -c_1$. Δηλαδή,

$$x_2(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \vartheta + b_1 \sin \vartheta$$

και

$$y_2(\vartheta) = \frac{c_0}{2} - b_1 \cos \vartheta + a_1 \sin \vartheta.$$

Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\left(x_2(\vartheta) - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y_2(\vartheta) - \frac{c_0}{2}\right)^2 = a_1^2 + b_1^2,$$

δηλαδή η καμπύλη γ_2 περιγράφει κύκλο, και το K είναι δίσκος. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ισοπεριμετρικές ανισότητες και συγκέντρωση του μέτρου

3.1 Μετρικοί χώροι πιθανότητας

3.1.1 Ορισμός και παραδείγματα

Ορισμός 3.1.1 (μετρικός χώρος πιθανότητας). Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Αν μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στη σ -άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ των Borel υποσυνόλων του (X, d) , τότε η τριάδα (X, d, μ) λέγεται μετρικός χώρος πιθανότητας.

Παραδείγματα 3.1.2. 1. Η σφαίρα S^{n-1} . Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$$

στον $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένη με τη γεωδαισιακή μετρική ρ : η απόσταση $\rho(x, y)$ δύο σημείων $x, y \in S^{n-1}$ είναι η κυρτή γωνία $\angle xoy$ στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x, y . Η S^{n-1} γίνεται χώρος πιθανότητας με το μοναδικό αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο σ : για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq S^{n-1}$ θέτουμε

$$\sigma(A) := \frac{|C(A)|}{|B_2^n|},$$

όπου B_2^n είναι η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα,

$$C(A) := \{sx : x \in A \text{ και } 0 \leq s \leq 1\},$$

και $|Q|$ είναι το n -διάστατο μέτρο Lebesgue του Q . Η ρ είναι όντως μετρική στην S^{n-1} (άσκηση).

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι αν $\rho(x, y) = \vartheta$ τότε

$$\|x - y\|_2 = 2 \sin \frac{\vartheta}{2},$$

συνεπώς η γεωδαισιακή και η Ευκλείδεια απόσταση των $x, y \in S^{n-1}$ συγκρίνονται μέσω της

$$\frac{2}{\pi} \rho(x, y) \leq \|x - y\|_2 \leq \rho(x, y).$$

2. *Ο χώρος του Gauss.* Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια μετρική $\|\cdot\|_2$ και το μέτρο πιθανότητας γ_n που έχει πυκνότητα τη συνάρτηση

$$g_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\|x\|_2^2/2}.$$

Δηλαδή, αν A είναι ένα σύνολο Borel στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\gamma_n(A) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|x\|_2^2/2} dx.$$

Το γ_n είναι το n -διάστατο μέτρο του Gauss και ο χώρος πιθανότητας $\Gamma_n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2, \gamma_n)$ είναι ο n -διάστατος χώρος του Gauss.

Το μέτρο του Gauss έχει δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες: από τη μία πλευρά είναι μέτρο γινόμενο, π.χ. συγκεκριμένα $\gamma_n = \gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_1$. Από την άλλη πλευρά είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς: αν $U \in O(n)$ και A είναι ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned} \gamma_n(U(A)) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{U(A)} e^{-\|x\|_2^2/2} dx = \frac{|\det U|}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|Uy\|_2^2/2} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|y\|_2^2/2} dy = \gamma_n(A). \end{aligned}$$

3. *Ο διακριτός κύβος.* Θεωρούμε το σύνολο $E_2^n = \{-1, 1\}^n$, το οποίο ταυτίζουμε με το σύνολο των κορυφών του κύβου $Q_n = [-1, 1]^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Στον E_2^n ορίζουμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ_n που δίνει μάζα 2^{-n} σε κάθε σημείο. Δηλαδή, αν A είναι ένα υποσύνολο του E_2^n , τότε

$$\mu_n(A) = \frac{|A|}{2^n},$$

όπου με $|A|$ (αλλά και με $\text{card}(A)$) συμβολίζουμε τον πληθάνημο ενός πεπερασμένου συνόλου.

Ο E_2^n γίνεται μετρικός χώρος με απόσταση την

$$d_n(x, y) = \frac{1}{n} \text{card}\{i \leq n : x_i \neq y_i\} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

3.1.2 Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα

Ορισμός 3.1.3 (t -περιοχή). Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Για κάθε μη κενό $A \in \mathcal{B}(X)$ και για κάθε $t > 0$ ορίζουμε την t -περιοχή του A ως εξής:

$$A_t = \{x \in X : d(x, A) \leq t\}.$$

Ορισμός 3.1.4 (επιφάνεια κατά Minkowski). Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω μ ένα (όχι αναγκαστικά πεπερασμένο) μέτρο στη Borel σ -άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$. Η επιφάνεια ενός Borel υποσυνόλου A του X ορίζεται ως εξής:

$$\partial(A) = \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mu(A_t \setminus A)}{t},$$

όπου A_t είναι η t -περιοχή του A . Αν $\mu(A) < \infty$ (το οποίο φυσικά ισχύει αν ο (X, d, μ) είναι μετρικός χώρος πιθανότητας) τότε

$$\partial(A) = \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mu(A_t) - \mu(A)}{t}.$$

Σε κάθε μετρικό χώρο πιθανότητας μπορούμε να διατυπώσουμε το ισοπεριμετρικό πρόβλημα:

Για δοσμένο $0 < \alpha < 1$, να βρεθεί το

$$\inf\{\partial(A) : A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) \geq \alpha\}$$

και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σύνολα A για τα οποία πιάνεται αυτό το infimum.

Μπορούμε επίσης να διατυπώσουμε αντίστοιχο πρόβλημα για το μέτρο των t -περιοχών, σταθεροποιώντας $t > 0$:

Για δοσμένα $0 < \alpha < 1$ και $t > 0$, να βρεθεί το

$$\inf\{\mu(A_t) : A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) \geq \alpha\}$$

και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σύνολα A για τα οποία πιάνεται αυτό το infimum.

Το infimum παίρνεται πάνω από όλα τα $A \in \mathcal{B}(X)$ για τα οποία $\mu(A) \geq \alpha$ (και όχι $\mu(A) = \alpha$) για καθαρά τεχνικούς λόγους: στο γενικό πλαίσιο που συζητάμε, μπορεί, για κάποια τιμή του α , να μην υπάρχουν σύνολα $A \in \mathcal{B}(X)$ ώστε $\mu(A) = \alpha$.

Οι λύσεις του δεύτερου προβλήματος μπορεί να είναι διαφορετικές για διαφορετικές τιμές του t . Στα κλασικά όμως παραδείγματα δεν εξαρτώνται από το t και αυτό σημαίνει ότι είναι και λύσεις του πρώτου προβλήματος. Είναι μάλιστα, όπως θα δούμε, πολύ «συμμετρικά υποσύνολα» του X , το οποίο σημαίνει ότι μπορούμε σχετικά εύκολα να υπολογίσουμε το μέτρο της t -περιοχής τους και την επιφάνειά τους.

3.2 Κλασικές ισοπεριμετρικές ανισότητες

Σε αυτήν την ενότητα θα συζητήσουμε το ισοπεριμετρικό πρόβλημα για τα κλασικά παραδείγματα μετρικών χώρων πιθανότητας που ορίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα: την Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} , τον χώρο του Gauss Γ_n και τον διακριτό κύβο E_2^n .

3.2.1 Ανισότητα Brunn-Minkowski και η ισοπεριμετρική ανισότητα

Ορισμός 3.2.1 (άθροισμα Minkowski). Έστω A και B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

και για κάθε $t \geq 0$,

$$tA = \{ta \mid a \in A\}.$$

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο $|\cdot|$ στον $\mathbb{R}^n$:

Θεώρημα 3.2.2 (ανισότητα Brunn-Minkowski). Έστω K και T δύο μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$|K + T|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |T|^{1/n}.$$

Παρατηρήσεις 3.2.3. Στην περίπτωση που τα K και T είναι κυρτά σώματα (κυρτά συμπαγή σύνολα με μη κενό εσωτερικό), ισότητα στην ανισότητα Brunn-Minkowski μπορεί να ισχύει μόνο αν τα K και T είναι ομοιοθετικά (δηλαδή, αν $K = aT + x$ για κάποιον $a \geq 0$ και κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$).

Η ανισότητα Brunn-Minkowski εκφράζει με μια έννοια το γεγονός ότι ο όγκος είναι **κοίλη** συνάρτηση ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski. Για τον λόγο αυτό συχνά γράφεται στην ακόλουθη μορφή: Αν K, T είναι μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και αν $\lambda \in (0, 1)$, τότε

$$|\lambda K + (1 - \lambda)T|^{1/n} \geq \lambda|K|^{1/n} + (1 - \lambda)|T|^{1/n}.$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία ανισότητα σε συνδυασμό με την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, μπορούμε ακόμα να γράψουμε:

$$|\lambda K + (1 - \lambda)T| \geq |K|^\lambda |T|^{1-\lambda}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski μπορούμε να δώσουμε την απάντηση στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα στον $\mathbb{R}^n$:

Ανάμεσα σε όλα τα μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ που έχουν δεδομένο όγκο α , η μπάλα όγκου α έχει ελάχιστη επιφάνεια.

Ο ορισμός της επιφάνειας που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτός του Minkowski, ο οποίος βασίζεται στην έννοια της t -περιοχής: θυμηθείτε ότι αν A είναι ένα μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αν $t > 0$, η t -περιοχή του A είναι το σύνολο $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq t\}$,

όπου $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|_2 : a \in A\}$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση του x από το σύνολο A . Παρατηρήστε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$A_t = A + tB_2^n.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της επιφάνειας κατά Minkowski, αν A είναι ένα μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένο όγκο, η επιφάνεια $\partial(A)$ του A ορίζεται από την

$$\partial(A) = \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{|A_t| - |A|}{t}.$$

Μπορεί να ελέγξει κανείς ότι αν το A είναι κυρτό σώμα, τότε το $\liminf$ στο δεξιό μέλος είναι όριο.

Η απάντηση στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα για τον Ευκλείδειο χώρο δίνεται από το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.4. *Αν A είναι μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένο όγκο, τότε*

$$\partial(A) \geq n|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n}.$$

Πράγματι, άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.2.4 είναι το εξής.

Θεώρημα 3.2.5. *Έστω A μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένο όγκο και έστω $r > 0$ τέτοιος ώστε $|A| = |rB_2^n|$. Τότε,*

$$\partial(A) \geq \partial(rB_2^n).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\omega_n = |B_2^n|$. Αφού $|A| = \omega_n r^n$, από το Θεώρημα 3.2.4 έχουμε ότι

$$\partial(A) \geq n\omega_n^{(n-1)/n}r^{n-1}\omega_n^{1/n} = n\omega_n r^{n-1}.$$

Όμως, έχουμε ότι $(rB_2^n)_t = rB_2^n + tB_2^n = (r+t)B_2^n$, και από τον ορισμό της επιφάνειας έπεται ότι

$$\partial(rB_2^n) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|(r+t)B_2^n| - |rB_2^n|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\omega_n(r+t)^n - \omega_n r^n}{t} = n\omega_n r^{n-1}.$$

Άρα, $\partial(A) \geq \partial(rB_2^n)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.4. Από την ανισότητα Brunn–Minkowski έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{|A_t| - |A|}{t} &= \frac{|A + tB_2^n| - |A|}{t} \\ &\geq \frac{\left(|A|^{1/n} + |tB_2^n|^{1/n}\right)^n - |A|}{t} \\ &= \frac{|A| + nt|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n} + O(t^2) - |A|}{t} \\ &= n|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n} + O(t), \end{aligned}$$

και παίρνοντας το όριο καθώς $t \rightarrow 0^+$ βλέπουμε ότι

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{|A_t| - |A|}{t} \geq n|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n}.$$

Από τον ορισμό της επιφάνειας προκύπτει το συμπέρασμα. $\square$

Παρατηρήστε ότι αυτό που δείξαμε είναι ακόμα ισχυρότερο: για κάθε $t > 0$, ανάμεσα σε όλα τα μη κενά Borel υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου που έχουν δεδομένο όγκο, η μπάλα έχει τη «μικρότερη t -επέκταση».

Πρόταση 3.2.6. Έστω B μια μπάλα στον $\mathbb{R}^n$. Αν A είναι ένα μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $|A| = |B|$, τότε $|A_t| \geq |B_t|$ για κάθε $t > 0$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} |A + tB|^{1/n} &\geq |A|^{1/n} + |tB|^{1/n} = |A|^{1/n} + t|B|^{1/n} \\ &= (1+t)|B|^{1/n} = |B + tB|^{1/n}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο. $\square$

3.2.2 Ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στη σφαίρα διατυπώνεται ως εξής:

Δίνονται $\alpha \in (0, 1)$ και $t > 0$. Ανάμεσα σε όλα τα Borel υποσύνολα A της σφαίρας για τα οποία $\sigma(A) = \alpha$, να βρεθούν εκείνα για τα οποία ελαχιστοποιείται η επιφάνεια $\sigma(A_t)$ της t -περιοχής του A .

Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.7 (ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα). Έστω $\alpha \in (0, 1)$ και έστω

$$B(x, r) = \{y \in S^{n-1} : \rho(x, y) \leq r\}$$

μια μπάλα στην S^{n-1} με ακτίνα $r > 0$ που επιλέγεται ώστε $\sigma(B(x, r)) = \alpha$. Τότε, για κάθε $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = \alpha$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε ότι

$$\sigma(A_t) \geq \sigma(B(x, r)_t) = \sigma(B(x, r+t)).$$

Δηλαδή, για οποιοδήποτε δοσμένο μέτρο α και οποιοδήποτε $t > 0$ οι γεωδαισιακές μπάλες μέτρου α δίνουν τη λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος.

Η απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας γίνεται με σφαιρική συμμετρικοποίηση και επαγωγή ως προς τη διάσταση. Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση $\alpha = 1/2$. Αν $\sigma(A) = 1/2$

και $t > 0$, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του A_t χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα:

$$\sigma(A_t) \geq \sigma\left(B(x, \frac{\pi}{2} + t)\right)$$

για κάθε $t > 0$ και $x \in S^{n-1}$. Εκτιμώντας από κάτω το δεξιό μέλος αυτής της ανισότητας οδηγούμαστε στο εξής:

Θεώρημα 3.2.8. *Εστω $A \subseteq S^{n+1}$ με $\sigma(A) = \frac{1}{2}$ και έστω $t > 0$. Τότε,*

$$\sigma(A_t) \geq 1 - \sqrt{\pi/8} \exp(-t^2 n/2).$$

Απόδειξη. Λόγω της σφαιρικής ισοπεριμετρικής ανισότητας, αρκεί να φράξουμε από κάτω το $\sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + t))$. Παρατηρήστε ότι

$$\sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + t)) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}+t} \sin^n \vartheta d\vartheta}{\int_0^\pi \sin^n \vartheta d\vartheta},$$

οπότε θέτοντας $h(t, n) = 1 - \sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + t))$, ζητάμε άνω φράγμα για την

$$h(t, n) = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}+t}^\pi \sin^n \vartheta d\vartheta}{\int_0^\pi \sin^n \vartheta d\vartheta} = \frac{\int_t^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi d\varphi}{2I_n},$$

όπου

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \varphi d\varphi.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = \varphi \sqrt{n}$ παίρνουμε

$$h(t, n) = \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_{t\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} \cos^n(s/\sqrt{n}) ds.$$

Συγκρίνοντας τα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων $\cos s$ και $\exp(-s^2/2)$ βλέπουμε ότι

$$\cos s \leq \exp(-s^2/2)$$

στο $[0, \pi/2]$, επομένως

$$\begin{aligned} h(t, n) &\leq \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_{t\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_0^{(\frac{\pi}{2}-t)\sqrt{n}} \exp(-(s+t\sqrt{n})^2/2) ds \\ &\leq \frac{\exp(-t^2 n/2)}{2\sqrt{n}I_n} \int_0^\infty \exp(-s^2/2) ds = \frac{\sqrt{\pi/8}}{\sqrt{n}I_n} \exp(-t^2 n/2). \end{aligned}$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\sqrt{n}I_n \geq 1$ για κάθε $n \geq 1$. Για

τον σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι από την αναδρομική σχέση $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ έπεται ότι

$$\sqrt{n+2}I_{n+2} = \sqrt{n+2}\frac{n+1}{n+2}I_n = \frac{n+1}{\sqrt{n+2}}I_n \geq \sqrt{n}I_n,$$

το οποίο σημαίνει ότι αρκεί να ελέγξουμε τις

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 1 \geq 1$$

και

$$\sqrt{2}I_2 = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \sqrt{2}\frac{\pi}{4} \geq 1.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 3.2.9. Αυτό που έχει σημασία σε σχέση με την εκτίμηση του θεωρήματος 3.2.8 είναι ότι, όσο μικρό $t > 0$ κι αν διαλέξουμε, η ακολουθία $\exp(-t^2n/2)$ τείνει στο 0 καθώς $n \rightarrow \infty$ και μάλιστα με πολύ γρήγορο ρυθμό (εκθετικά ως προς n). Συνεπώς, το ποσοστό της σφαίρας που μένει έξω από την t -περιοχή οποιουδήποτε υποσυνόλου A της S^{n+1} με $\sigma(A) = 1/2$ είναι «σχεδόν μηδενικό» αν η διάσταση n είναι αρκετά μεγάλη.

3.2.3 Ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss

Η ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss είναι η εξής.

Θεώρημα 3.2.10. Έστω $\alpha \in (0, 1)$, $\vartheta \in S^{n-1}$, και $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \vartheta \rangle \leq \lambda\}$ ένας ημίχωρος του $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(H) = \alpha$. Τότε, για κάθε $t > 0$ και για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(A) = \alpha$ ισχύει

$$\gamma_n(A_t) \geq \gamma_n(H_t).$$

Μια κλασική απόδειξη βασίζεται στην «παρατήρηση του Poincaré» και ουσιαστικά ανάγει το πρόβλημα στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα για τη σφαίρα. Αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο είναι η παρακάτω ανισότητα, η οποία είναι συνέπεια του Θεωρήματος 3.2.10.

Θεώρημα 3.2.11. Αν $\gamma_n(A) \geq 1/2$, τότε για κάθε $t > 0$

$$1 - \gamma_n(A_t) \leq \frac{1}{2} \exp(-t^2/2).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.2.10 γνωρίζουμε ότι

$$1 - \gamma_n(A_t) \leq 1 - \gamma_n(H_t)$$

όπου H ημίχωρος μέτρου $1/2$. Αφού το γ_n είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\}$, οπότε ολοκληρώνοντας πρώτα

ως προς $x_2, \dots, x_n$ βλέπουμε ότι

$$1 - \gamma_n(H_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-s^2/2} ds.$$

Παραγωγίζοντας δείχνουμε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = e^{x^2/2} \int_x^\infty e^{-s^2/2} ds$$

είναι φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Από την $F(t) \leq F(0)$ προκύπτει το συμπέρασμα. $\square$

3.2.4 Η ισοπεριμετρική ανισότητα στον διακριτό κύβο

Η t -περιοχή ενός $A \subseteq E_2^n$ είναι ως συνήθως το σύνολο $A_t = \{x \in E_2^n : d_n(x, A) \leq t\}$. Οι τιμές που μπορεί να πάρει η d_n είναι πεπερασμένες το πλήθος: $0, 1/n, 2/n, \dots, 1$. Επομένως, αυτές είναι οι τιμές του t για τις οποίες η t -περιοχή του A παρουσιάζει ενδιαφέρον, με την έννοια ότι το A_t παραμένει αμετάβλητο όταν το t παίρνει τιμές σε ένα διάστημα της μορφής $[k/n, (k+1)/n)$.

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα είναι λοιπόν το εξής. Μας δίνουν έναν φυσικό $m = 1, 2, \dots, 2^n$ και κάποιο $t = k/n$, $k = 1, \dots, n$. Για ποιο σύνολο A με πλήθος στοιχείων m είναι η k/n -περιοχή του A η μικρότερη δυνατή; Η απάντηση είναι ότι το A θα πρέπει να έχει όσο το δυνατόν «λιγότερα κενά». Αν περιέχει μία n -άδα $x = (x_1, \dots, x_n)$, τότε θα πρέπει να περιέχει κατά σειρά προτεραιότητας και τις «γειτονικές» της n -άδες, αυτές δηλαδή που διαφέρουν από την x σε μία συντεταγμένη, δύο συντεταγμένες, κ.ο.κ. (εφόσον το πλήθος των στοιχείων του A επαρκεί). Αυτό, γιατί η παραμικρή επέκταση του A θα τις συμπεριλάβει ούτως ή άλλως. Τα πιο οικονομικά σύνολα είναι οι d_n -μπάλες (οι λεγόμενες Hamming μπάλες του E_2^n). Αποδεικνύεται η ακόλουθη ισοπεριμετρική ανισότητα για τον E_2^n .

Θεώρημα 3.2.12. Έστω $A \subseteq E_2^n$ με $m = \sum_{k=0}^l \binom{n}{k}$ στοιχεία. Τότε, για κάθε $s = 1, \dots, n-l$, έχουμε ότι

$$\mu_n(A_{s/n}) \geq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{l+s} \binom{n}{k} = \mu_n(B(x, l/n)_{s/n}) = \mu_n(B(x, (l+s)/n)),$$

όπου x τυχόν στοιχείο του E_2^n .

Η ισοπεριμετρική αυτή ανισότητα οδηγεί σε μια προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα για τον E_2^n .

Θεώρημα 3.2.13. Αν $\mu_n(A) \geq 1/2$ και $t > 0$, τότε

$$\mu_n(A_t^c) \leq \frac{1}{2} \exp(-2t^2n).$$

Το Θεώρημα 3.2.13 ερμηνεύεται ως εξής: για να εκτιμήσουμε το $\mu_n(A_t)$ αρκεί να θέσουμε

$l = n/2$ και $s = tn$ στο θεώρημα 3.2.12. Τότε βλέπουμε ότι

$$\mu_n(A_t^c) \leq \frac{1}{2^n} \sum_{j=(\frac{1}{2}+t)n}^n \binom{n}{j},$$

το οποίο φθίνει εκθετικά στο 0 καθώς $n \rightarrow \infty$, γιατί οι «ακραίοι» διωνυμικοί συντελεστές είναι πολύ μικροί σε σύγκριση με τους «μεσαίους» όταν το n είναι μεγάλο.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.12 είναι συνδυαστική και γίνεται με επαγωγή ως προς n .

3.3 Συνάρτηση συγκέντρωσης

Ορισμός 3.3.1 (συνάρτηση συγκέντρωσης). Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Η *συνάρτηση συγκέντρωσης* του (X, d, μ) ορίζεται στο $(0, \infty)$ από την

$$\alpha_\mu(t) := \sup\{1 - \mu(A_t) : \mu(A) \geq 1/2\}.$$

Η συνάρτηση α_μ είναι φθίνουσα και, όπως δείχνει η επόμενη πρόταση, $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_\mu(t) = 0$.

Πρόταση 3.3.2. Σε κάθε μετρικό χώρο πιθανότητας (X, d, μ) ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_\mu(t) = 0.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $x \in X$ και $0 < \varepsilon \leq 1/2$. Από το γεγονός ότι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x, n)$ έπεται ότι υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu(B(x, r)) > 1 - \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ με $\mu(A) \geq 1/2$ έχουμε ότι $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$, απ' όπου έπεται ότι $B(x, r) \subseteq A_{2r}$. [Πράγματι, υπάρχει $a \in A$ ώστε $d(x, a) \leq r$ και τότε, για κάθε $y \in B(x, r)$ έχουμε ότι $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) \leq 2r$, δηλαδή $y \in A_{2r}$]. Τότε, για κάθε $t \geq 2r$ έχουμε ότι

$$1 - \mu(A_t) \leq 1 - \mu(A_{2r}) \leq 1 - \mu(B(x, r)) < \varepsilon,$$

άρα $\alpha_\mu(t) \leq \varepsilon$. □

Ορισμός 3.3.3 (συγκέντρωση του μέτρου). Λέμε ότι υπάρχει «συγκέντρωση του μέτρου» στον μετρικό χώρο πιθανότητας (X, d, μ) αν η $\alpha_\mu(t)$ φθίνει γρήγορα καθώς το $t \rightarrow \infty$. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Λέμε ότι το μ έχει *κανονική συγκέντρωση* στον (X, d) αν υπάρχουν σταθερές $C, c > 0$ ώστε, για κάθε $t > 0$,

$$\alpha_\mu(t) \leq Ce^{-ct^2}.$$

Τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας (πιο συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις που προκύπτουν από τις λύσεις των αντίστοιχων ισοπεριμετρικών προβλημάτων) δείχνουν ότι αυτό

ισχύει για τη σφαίρα, για τον διακριτό κύβο και για τον χώρο του Gauss. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.3.1 της συνάρτησης συγκέντρωσης, σε αυτούς τους χώρους έχουμε:

(i) Για τη σφαίρα (S^{n-1}, ρ, σ) ισχύει

$$\alpha_\sigma(t) \leq \sqrt{\pi/8} \exp(-t^2 n/2).$$

(ii) Για τον χώρο του Gauss $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2, \gamma_n)$ ισχύει

$$\alpha_{\gamma_n}(t) \leq \frac{1}{2} \exp(-t^2/2).$$

(iii) Για τον διακριτό κύβο (E_2^m, d_n, μ_n) ισχύει

$$\alpha_{\mu_n}(t) \leq \frac{1}{2} \exp(-2t^2 n).$$

(α) Λέμε ότι το μ έχει εκθετική συγκέντρωση στον (X, d) αν υπάρχουν σταθερές $C, c > 0$ ώστε, για κάθε $t > 0$,

$$\alpha_\mu(t) \leq C e^{-ct}.$$

Πολλές από τις εφαρμογές της συγκέντρωσης του μέτρου βασίζονται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.4. Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1, δηλαδή αν $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$, τότε

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - \text{med}(f)| > t\}) \leq 2\alpha_\mu(t),$$

όπου $\text{med}(f)$ είναι ο μέσος Lévy της f .

Σημείωση. Μέσος Lévy $\text{med}(f)$ της f είναι ένας αριθμός για τον οποίο

$$\mu(\{f \geq \text{med}(f)\}) \geq 1/2 \text{ και } \mu(\{f \leq \text{med}(f)\}) \geq 1/2.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.4. Θέτουμε $A = \{x : f(x) \geq \text{med}(f)\}$ και $B = \{x : f(x) \leq \text{med}(f)\}$. Αν $y \in A_t$ τότε υπάρχει $x \in A$ με $d(x, y) \leq t$, οπότε

$$f(y) = f(y) - f(x) + f(x) \geq -d(y, x) + \text{med}(f) \geq \text{med}(f) - t$$

αφού η f είναι 1-Lipschitz. Ομοίως, αν $y \in B_t$ τότε υπάρχει $x \in B$ με $d(x, y) \leq t$, οπότε

$$f(y) = f(y) - f(x) + f(x) \leq d(y, x) + \text{med}(f) \leq \text{med}(f) + t.$$

Δηλαδή, αν $y \in A_t \cap B_t$ τότε $|f(x) - \text{med}(f)| \leq t$. Με άλλα λόγια,

$$\{x \in X : |f(x) - \text{med}(f)| > t\} \subseteq (A_t \cap B_t)^c = A_t^c \cup B_t^c.$$

Όμως, από τον ορισμό της συνάρτησης συγκέντρωσης έχουμε ότι $\mu(A_t) \geq 1 - \alpha_\mu(t)$ και $\mu(B_t) \geq 1 - \alpha_\mu(t)$. Έπεται ότι

$$\mu(\{|f - \text{med}(f)| > t\}) \leq (1 - \mu(A_t)) + (1 - \mu(B_t)) \leq 2\alpha_\mu(t).$$

□

Πόρισμα 3.3.5. Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση Lipschitz με σταθερά $\|f\|_{\text{Lip}}$, δηλαδή αν $|f(x) - f(y)| \leq \|f\|_{\text{Lip}} d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$, τότε

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - \text{med}(f)| > t\}) \leq 2\alpha_\mu(t/\|f\|_{\text{Lip}}),$$

όπου $\text{med}(f)$ είναι μέσος Lévy της f .

Στην περίπτωση που η συνάρτηση συγκέντρωσης φθίνει πολύ γρήγορα, το Θεώρημα 3.3.4 δείχνει ότι οι 1-Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις είναι «σχεδόν σταθερές» σε «σχεδόν ολόκληρο τον χώρο». Ισχύει μάλιστα και το αντίστροφο.

Θεώρημα 3.3.6. Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν για κάποιο $\eta > 0$ και κάποιο $t > 0$ ισχύει

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - \text{med}(f)| > t\}) \leq \eta$$

για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, τότε $\alpha_\mu(t) \leq \eta$.

Απόδειξη. Έστω A Borel υποσύνολο του X με $\mu(A) \geq 1/2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = d(x, A)$. Η f είναι 1-Lipschitz και $\text{med}(f) = 0$ γιατί η f παίρνει μη αρνητικές τιμές και $\mu(\{x : f(x) = 0\}) \geq 1/2$. Από την υπόθεση παίρνουμε

$$\mu(\{x \in X : d(x, A) > t\}) \leq \eta,$$

δηλαδή $1 - \mu(A_t) \leq \eta$. Έπεται ότι $\alpha_\mu(t) \leq \eta$. □

3.4 Προσεγγιστικές ισοπεριμετρικές ανισότητες

3.4.1 Η συνάρτηση συγκέντρωσης της σφαίρας

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.8 βασίζεται πολύ ισχυρά στη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα. Για τις περισσότερες όμως εφαρμογές που έχουμε στο νου μας είναι αρκετή μια ανισότητα της μορφής

$$\sigma(A_t) \geq 1 - c_1 \exp(-c_2 t^2 n)$$

και όχι η ακριβής λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος. Θα δώσουμε μια απλή απόδειξη εκτίμησης «αυτού του τύπου» χωρίς να περάσουμε μέσα από την ισοπεριμετρική ανισότητα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski.

Λήμμα 3.4.1. *Θεωρούμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ στην Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n . Δηλαδή, $\mu(A) = |A|/|B_2^n|$ για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq B_2^n$. Αν $A, C \subseteq B_2^n$ είναι Borel σύνολα και*

$$d(A, C) := \min\{\|a - c\|_2 : a \in A, c \in C\} = \rho > 0,$$

τότε

$$\min\{\mu(A), \mu(C)\} \leq \exp(-\rho^2 n/8).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $\frac{A+C}{2}$. Από την ανισότητα Brunn-Minkowski παίρνουμε

$$\left| \frac{A+C}{2} \right| \geq \min\{|A|, |C|\}.$$

Συνεπώς,

$$\mu\left(\frac{A+C}{2}\right) \geq \min\{\mu(A), \mu(C)\}.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $a \in A$ και $c \in C$, ο κανόνας του παραλληλογράμμου δίνει

$$\|a + c\|_2^2 = 2\|a\|_2^2 + 2\|c\|_2^2 - \|a - c\|_2^2 \leq 4 - \rho^2,$$

επομένως

$$\frac{A+C}{2} \subseteq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} B_2^n.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\min\{\mu(A), \mu(C)\} \leq \mu\left(\frac{A+C}{2}\right) \leq \left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right)^{n/2} \leq \exp(-\rho^2 n/8).$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.8. Έστω $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = 1/2$ και έστω $t > 0$. Θέτουμε $C = S^{n-1} \setminus A_t$ και θεωρούμε τα υποσύνολα

$$A_1 = \{\rho a : a \in A, 1/2 \leq \rho \leq 1\} \text{ και } C_1 = \{\rho a : a \in C, 1/2 \leq \rho \leq 1\}$$

της B_2^n . Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$d(A_1, C_1) \geq \sin \frac{t}{2} \geq \frac{t}{\pi}.$$

Από το Λήμμα 3.4.1 συμπεραίνουμε ότι

$$|C_1| \leq \exp(-d^2 n/8) |B_2^n| \leq \exp(-t^2 n/(8\pi^2)) |B_2^n|.$$

Όμως, από τον ορισμό του σ έχουμε ότι $|B_2^n|\sigma(C) = |\tilde{C}|$ και $|C_1| = (1 - 2^{-n})|\tilde{C}|$. Έπεται ότι

$$\sigma(A_t^c) = \sigma(C) \leq \frac{1}{1 - 2^{-n}} \exp(-t^2 n / (8\pi^2)).$$

Δηλαδή,

$$\sigma(A_t) \geq 1 - c_1 \exp(-c_2 t^2 n)$$

όπου $c_1 = 2$ και $c_2 = 1/(8\pi^2)$. Αυτή είναι η ανισότητα του Θεωρήματος 3.2.8 αν εξαιρέσουμε τις ακριβείς τιμές των σταθερών c_1 και c_2 . $\square$

3.4.2 Η συνάρτηση συγκέντρωσης του χώρου του Gauss

Όπως και στην περίπτωση της σφαίρας, η απόδειξη της προσεγγιστικής ισοπεριμετρικής ανισότητας του Πορίσματος 3.2.11 χρησιμοποιεί ισχυρά την ισοπεριμετρική ανισότητα του Θεωρήματος 3.2.10. Μπορούμε όμως να αποδείξουμε απευθείας την προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα για το χώρο του Gauss.

Θεώρημα 3.4.2. Έστω A μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{d(x,A)^2/4} d\gamma_n(x) \leq \frac{1}{\gamma_n(A)},$$

όπου $d(x, A) = \inf\{\|x - y\|_2 : y \in A\}$. Επομένως, αν $\gamma_n(A) = 1/2$ τότε

$$1 - \gamma_n(A_t) \leq 2 \exp(-t^2/4)$$

για κάθε $t > 0$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $g_n(x)$ τη συνάρτηση $(2\pi)^{-n/2} \exp(-\|x\|_2^2/2)$, και θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = e^{d(x,A)^2/4} g_n(x), \quad g(x) = \chi_A(x) g_n(x), \quad m(x) = g_n(x).$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $y \in A$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (3.4.1) \quad (2\pi)^n f(x)g(y) &= e^{d(x,A)^2/4} e^{-\|x\|_2^2/2} e^{-\|y\|_2^2/2} \leq \exp\left(\frac{\|x-y\|_2^2}{4} - \frac{\|x\|_2^2}{2} - \frac{\|y\|_2^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\|x+y\|_2^2}{4}\right) = \left(\exp\left(-\frac{1}{2} \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2^2\right)\right)^2 \\ &= (2\pi)^n \left(m\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου και την $d(x, A) \leq \|x - y\|_2$. Παρατηρώντας ότι $g(y) = 0$ αν $y \notin A$, βλέπουμε ότι οι f, g, m ικανοποιούν τις υποθέσεις της

ανισότητας Prékopa-Leindler με $\lambda = 1/2$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{d(x,A)^2/4} g_n(dx) \right) \gamma_n(A) &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\gamma_n(x) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\gamma_n(x) \right) \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} m(x) d\gamma_n(x) \right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό του θεωρήματος. Για τον δεύτερο, παρατηρούμε ότι αν $\gamma_n(A) = 1/2$ τότε

$$e^{t^2/4} \gamma_n(x : d(x,A) > t) \leq \int e^{d(x,A)^2/4} \gamma_n(dx) \leq \frac{1}{\gamma_n(A)} = 2.$$

Δηλαδή, $\gamma_n(A_t^c) \leq 2 \exp(-t^2/4)$. □

3.4.3 Η συνάρτηση συγκέντρωσης του διακριτού κύβου

Θεωρούμε το σύνολο $E_2^n = \{-1, 1\}^n$, το οποίο ταυτίζουμε με το σύνολο των κορυφών του κύβου $Q_n = [-1, 1]^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Στο E_2^n ορίζουμε το κανονικό μέτρο πιθανότητας μ_n που δίνει μάζα 2^{-n} σε κάθε σημείο. Για κάθε μη κενό $A \subseteq E_2^n$ θέτουμε

$$\varphi_A(x) = \inf\{\|x - y\|_2 : y \in \text{conv}(A)\}.$$

Το βασικό θεώρημα αυτής της ενότητας είναι το εξής.

Θεώρημα 3.4.3. Για κάθε $A \subseteq E_2^n$,

$$\mathbb{E} \exp(\varphi_A^2/8) \leq \frac{1}{\mu_n(A)}.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς το πλήθος των σημείων του A . Αν $\text{card}(A) = 1$ δηλαδή $A = \{y\}$, τότε

$$\varphi_A(x) = \inf\{\|x - z\|_2 : z \in \text{conv}(A) = \{y\}\} = \|x - y\|_2.$$

Άρα,

$$\mathbb{E} \exp(\varphi_A^2/8) = \mathbb{E} \left(e^{\|x-y\|_2^2/8} \right) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in E_2^n} e^{\|x-y\|_2^2/8}.$$

Κάθε $x \in E_2^n$ διαφέρει από το y σε i θέσεις, $i = 0, 1, \dots, n$. Το πλήθος των $x \in E_2^n$ που διαφέρουν σε i θέσεις από το y είναι $\binom{n}{i}$. Παρατηρούμε ότι $\|x - y\|_2^2 = 4i$ όταν το x διαφέρει από το y σε i θέσεις. Άρα,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{\|x-y\|_2^2/8} &= \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} e^{i/2} = \frac{1}{2^n} (1 + e^{1/2})^n = \left(\frac{1 + e^{1/2}}{2} \right)^n \\ &\leq 2^n = \frac{1}{\mu_n(A)}, \end{aligned}$$

αφού $e^{1/2} \leq e \leq 3$.

Έστω τώρα ότι $\text{card}(A) \geq 2$. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $n = 1$. Αναγκαστικά έχουμε ότι $A = E_1$, επομένως $\varphi_A(x) = 0$ για κάθε $x \in E_1$. Άρα,

$$\mathbb{E} \exp(\varphi_A^2/8) = \mathbb{E} e^0 = 1 = 1/\mu_1(A).$$

Για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε $A \subseteq E_{n+1}$ με $\text{card}(A) \geq 2$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$A = (A_1 \times \{1\}) \cup (A_{-1} \times \{-1\})$$

όπου $A_1, A_{-1} \neq \emptyset$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\text{card}(A_{-1}) \leq \text{card}(A_1)$.

Λήμμα 3.4.4. Για κάθε $x \in E_2^n$,

$$\varphi_A((x, 1)) \leq \varphi_{A_1}(x).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\|x - y\|_2 : y \in \text{conv}(A_1)\} \subseteq \{\|(x, 1) - z\|_2 : z \in \text{conv}(A)\}.$$

Έστω $y \in \text{conv}(A_1)$. Τότε, $y = \sum_{i=1}^m t_i x_i$ όπου $t_i \geq 0$ με $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ και $x_i \in A_1$. Τότε όμως $(x_i, 1) \in A$ και

$$\sum_{i=1}^m t_i (x_i, 1) = \left(\sum_{i=1}^m t_i x_i, \sum_{i=1}^m t_i \right) = (y, 1),$$

δηλαδή $(y, 1) \in \text{conv}(A)$. Αφού $\|x - y\|_2 = \|(x, 1) - (y, 1)\|_2$ και

$$\|(x, 1) - (y, 1)\|_2 \in \{\|(x, 1) - z\|_2 : z \in \text{conv}(A)\},$$

έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 3.4.5. Για κάθε $x \in E_2^n$ και για κάθε $0 \leq a \leq 1$,

$$\varphi_A^2((x, -1)) \leq 4a^2 + a\varphi_{A_1}^2(x) + (1-a)\varphi_{A_{-1}}^2(x).$$

Απόδειξη. Έστω $z_i \in \text{conv}(A_i)$ ($i = 1, -1$). Τότε, όπως προηγουμένως, $(z_i, i) \in \text{conv}(A)$. Το $\text{conv}(A)$ είναι κυρτό, άρα

$$z := a(z_1, 1) + (1-a)(z_{-1}, -1) = (az_1 + (1-a)z_{-1}, 2a-1) \in \text{conv}(A).$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \|(x, -1) - z\|_2^2 &= \|(x - az_1 - (1-a)z_{-1}, -2a)\|_2^2 \\
 &= \|(x - az_1 - (1-a)z_{-1}, 0)\|_2^2 + \|(0, -2a)\|_2^2 \\
 &\leq (a\|x - z_1\|_2 + (1-a)\|x - z_{-1}\|_2)^2 + 4a^2 \\
 &\leq a\|x - z_1\|_2^2 + (1-a)\|x - z_{-1}\|_2^2 + 4a^2.
 \end{aligned}$$

Αφού τα $z_i \in \text{conv}(A_i)$ ήταν τυχόντα, έπεται ότι

$$\varphi_A^2(x, -1) \leq a\varphi_{A_1}^2(x) + (1-a)\varphi_{A_{-1}}^2(x) + 4a^2.$$

□

Χρησιμοποιώντας τα δύο Λήμματα, γράφουμε

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}e^{\varphi_A^2/8} &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_{n+1}} e^{\varphi_A^2(x)/8} \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\varphi_A^2((x,1))/8} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\varphi_A^2((x,-1))/8} \\
 &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\varphi_{A_1}^2(x)/8} + \frac{1}{2^{n+1}} e^{a^2/2} \sum_{x \in E_n} e^{a\varphi_{A_1}^2(x)/8 + (1-a)\varphi_{A_{-1}}^2(x)/8} \\
 &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\varphi_{A_1}^2(x)/8} \\
 &\quad + \frac{1}{2^{n+1}} e^{a^2/2} \left(\sum_{x \in E_n} e^{\varphi_{A_1}^2(x)/8} \right)^a \left(\sum_{x \in E_n} e^{\varphi_{A_{-1}}^2(x)/8} \right)^{1-a} \\
 &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(e^{\varphi_{A_1}^2/8}) + \frac{1}{2} e^{a^2/2} \left(\mathbb{E}(e^{\varphi_{A_1}^2/8}) \right)^a \left(\mathbb{E}(e^{\varphi_{A_{-1}}^2/8}) \right)^{1-a}.
 \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$u_1 = \mathbb{E}\left(e^{\varphi_{A_1}^2/8}\right) \quad , \quad v_1 = \frac{1}{\mu_n(A_1)}$$

και

$$u_{-1} = \mathbb{E}\left(e^{\varphi_{A_{-1}}^2/8}\right) \quad , \quad v_{-1} = \frac{1}{\mu_n(A_{-1})}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $u_1 \leq v_1$ και $u_{-1} \leq v_{-1}$. (επίσης, η $\text{card}(A_{-1}) \leq \text{card}(A_1)$ γράφεται $v_1 \leq v_{-1}$). Άρα η προηγούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}e^{\varphi_A^2/8} &\leq \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} e^{a^2/2} (u_1)^a (u_{-1})^{1-a} \\
 &\leq \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} e^{a^2/2} (v_1)^a (v_{-1})^{1-a} \\
 &\leq \frac{v_1}{2} [1 + e^{a^2/2} (v_1/v_{-1})^{a-1}].
 \end{aligned}$$

Η τελευταία ποσότητα ελαχιστοποιείται όταν $a = -\ln(v_1/v_{-1})$. Η τιμή $-\ln(v_1/v_{-1})$ είναι περιττου ίση με $1 - v_1/v_{-1}$. Επιλέγουμε $a_0 = 1 - v_1/v_{-1}$. Αφού $v_1 \leq v_{-1}$ έχουμε ότι $0 \leq a_0 \leq 1$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}(e^{\varphi_A^2/8}) \leq \frac{v_1}{2} [1 + e^{a_0^2/2} (1 - a_0)^{a_0-1}].$$

Λήμμα 3.4.6. Για κάθε $0 \leq a \leq 1$ έχουμε ότι

$$1 + e^{a^2/2} (1 - a)^{a-1} \leq \frac{4}{2 - a}.$$

Απόδειξη. Απλές πράξεις δείχνουν ότι η ανισότητα που ζητάμε είναι ισοδύναμη με την

$$g(a) = \ln(2 + a) - \ln(2 - a) - a^2/2 - (a - 1) \ln(1 - a) \geq 0.$$

Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $g'' \geq 0$ και $g'(0) = 0$. Άρα η g είναι αύξουσα στο $[0, 1]$. Αφού $g(0) = 0$, έπεται το ζητούμενο. $\square$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.4.6 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\varphi_A^2/8}) &\leq \frac{v_1}{2} \frac{4}{2 - a_0} = \frac{2v_1}{1 + v_1/v_{-1}} \\ &= \frac{2}{1/v_1 + 1/v_{-1}} = \frac{2}{\mu_n(A_1) + \mu_n(A_{-1})} \\ &= \frac{1}{\mu_{n+1}(A)}. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα είναι φανερή αφού $\mu_{n+1}(A_i \times \{i\}) = \mu_n(A_i)/2$, $i = \pm 1$. Έτσι ολοκληρώνονται το επαγωγικό βήμα και η απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.3. $\square$

Πόρισμα 3.4.7. Για όλα τα $t > 0$, έχουμε ότι

$$\mu_n(\varphi_A \geq t) \leq \frac{1}{\mu_n(A)} e^{-t^2/8}.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.4.3 έχουμε ότι $\mathbb{E} \exp(\varphi_A^2/8) \leq \frac{1}{\mu_n(A)}$. Άρα,

$$\begin{aligned} e^{t^2/8} \mu_n(\varphi_A \geq t) &\leq \int_{\{\varphi_A \geq t\}} e^{t^2/8} \leq \int_{\{\varphi_A \geq t\}} e^{\varphi_A^2/8} \\ &\leq \mathbb{E}(e^{\varphi_A^2/8}) \leq \frac{1}{\mu_n(A)}. \end{aligned}$$

$\square$

Έστω A μη κενό υποσύνολο του E_2^n . Η συνάρτηση φ_A του Θεωρήματος 3.4.3 και η

συνάρτηση απόστασης από το A

$$d_n(x, A) = \min \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| : y \in A \right\}$$

συγκρίνονται σύμφωνα με το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.4.8. Για κάθε μη κενό $A \subseteq E_2^n$ έχουμε ότι

$$(3.4.2) \quad 2\sqrt{n}d_n(x, A) \leq \varphi_A(x) \quad , \quad x \in E_2^n.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in E_2^n$. Για κάθε $y \in A$ ισχύει

$$(3.4.3) \quad \langle x - y, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i(x_i - y_i) = 2nd_n(x, y) \geq 2nd_n(x, A).$$

Από την (3.4.3) έπεται ότι για κάθε $y \in \text{conv}(A)$

$$\sqrt{n}\|x - y\|_2 \geq \langle x - y, x \rangle \geq 2nd_n(x, A).$$

Αυτό αποδεικνύει την (3.4.2). □

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω λήμματα δείχνουμε την προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα για τον E_2^n :

Θεώρημα 3.4.9. Έστω $A \subseteq E_2^n$ με $\mu_n(A) = 1/2$. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε ότι

$$\mu_n(A_t) \geq 1 - 2\exp(-t^2n/2).$$

Απόδειξη. Αν $x \notin A_t$, τότε $d_n(x, A) \geq t$ και το Λήμμα 3.4.8 δείχνει ότι $\varphi_A(x) \geq 2t\sqrt{n}$.

Ομως, από το Θεώρημα 3.4.3 έχουμε ότι

$$e^{t^2n/2} \mu_n(x : \varphi_A(x) \geq 2t\sqrt{n}) \leq \int_{E_2^n} \exp(\varphi_A^2(x)/8) d\mu_n(x) \leq \frac{1}{\mu_n(A)} = 2,$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\mu_n(A_t^c) \leq \mu_n(x : \varphi_A(x) \geq 2t\sqrt{n}) \leq 2\exp(-t^2n/2).$$

□

Το Θεώρημα 3.4.9 έχει σαν συνέπεια τη συγκέντρωση των κυρτών Lipschitz συναρτήσεων γύρω από τον μέσο Lévy τους.

Θεώρημα 3.4.10. Θεωρούμε μια κυρτή Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με σταθερά Lipschitz σ . Έστω M ένας μέσος Lévy της f στον E_2^n . Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε ότι

$$\mu_n(\{|f - M| \geq t\}) \leq 4e^{-t^2/8\sigma^2}.$$

Απόδειξη. Για τον M ισχύουν οι $\mu_n(\{f \geq M\}) \geq 1/2$ και $\mu_n(\{f \leq M\}) \geq 1/2$.

Θέτουμε $A = \{f \leq M\}$. Αφού η f είναι κυρτή, για κάθε $y \in \text{conv}A$ έχουμε ότι $f(y) \leq M$. Αν λοιπόν $f(x) \geq M + t$ για κάποιο $x \in E_2^n$, τότε

$$f(x) \geq M + t \geq f(y) + t$$

για κάθε $y \in \text{conv}(A)$. Άρα, $\sigma\|x - y\|_2 \geq |f(x) - f(y)| \geq t$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\varphi_A(x) \geq t/\sigma.$$

Από το Πόρισμα 3.4.7 και από την $\mu_n(A) \geq 1/2$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu_n(\{f \geq M + t\}) &\leq \mu_n(\{\varphi_A \geq t/\sigma\}) \\ &\leq \frac{1}{\mu_n(A)} e^{-t^2/8\sigma^2} \leq 2e^{-t^2/8\sigma^2}. \end{aligned}$$

Έστω $t > 0$ και $B = \{f \leq M - t\}$. Αν $u < t$, όπως πριν ελέγχουμε ότι

$$f(x) \geq M - t + u \implies \varphi_B(x) \geq u/\sigma$$

και με χρήση του Πορίσματος 3.4.7 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu_n(\{f(x) \geq M\}) &\leq \mu_n(\{f(x) \geq M - t + u\}) \\ &\leq \mu_n(\{\varphi_B \geq u/\sigma\}) \leq \frac{1}{\mu_n(B)} e^{-u^2/8\sigma^2} \end{aligned}$$

Όμως $1/2 \leq \mu_n(\{f(x) \geq M\})$, άρα

$$\mu_n(B) \leq 2e^{-u^2/8\sigma^2}.$$

Αφήνοντας το u να τείνει στο t παίρνουμε

$$\mu_n(B) \leq 2e^{-t^2/8\sigma^2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu_n(\{|f - M| > t\}) &= \mu_n(\{f \geq M + t\}) + \mu_n(\{f \leq M - t\}) \\ &\leq 2e^{-t^2/8\sigma^2} + 2e^{-t^2/8\sigma^2} = 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \end{aligned}$$

□

3.5 Το λήμμα των Johnson-Lindenstrauss

Σαν μια πρώτη εφαρμογή του φαινομένου της συγκέντρωσης του μέτρου στη σφαίρα, αποδεικνύουμε εδώ το λήμμα των Johnson-Lindenstrauss, το οποίο είναι πολύ χρήσιμο στη θεωρία των εμφυτεύσεων μετρικών χώρων σε χώρους με νόρμα.

Ορισμός 3.5.1 (παραμόρφωση). Μια απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ από τον μετρικό χώρο (X, d) στον μετρικό χώρο (Y, σ) λέγεται *ισομετρική εμφύτευση* αν διατηρεί τις αποστάσεις. Δηλαδή, αν $\sigma(f(x), f(y)) = d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$. Για πολλές εφαρμογές θα μας αρκούσε να πετύχουμε μια εμφύτευση του μετρικού χώρου (X, d) στον μετρικό χώρο (Y, d) (για παράδειγμα, στον Ευκλείδειο χώρο) η οποία να μην παραμορφώνει πολύ τις αποστάσεις. Ένας τρόπος να ορίσουμε την έννοια της *κατά προσέγγιση ισομετρικής εμφύτευσης* είναι ο εξής. Έστω $f : X \rightarrow Y$ μια εμφύτευση του μετρικού χώρου (X, d_X) στο μετρικό χώρο (Y, d_Y) . Η *παραμόρφωση* της f ορίζεται ως εξής:

$$\text{dist}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)} \cdot \sup_{x \neq y} \frac{d_X(x, y)}{d_Y(f(x), f(y))}.$$

Ειδικότερα, αν $f : X \rightarrow Y$ είναι μια εμφύτευση του μετρικού χώρου (X, d) στο χώρο με νόρμα $(Y, \|\cdot\|)$ τότε η *παραμόρφωση* της f ορίζεται ως εξής:

$$\text{dist}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x, y)} \cdot \sup_{x \neq y} \frac{d(x, y)}{\|f(x) - f(y)\|}.$$

Συμβολίζουμε με $c_Y(X)$ την ελάχιστη δυνατή παραμόρφωση με την οποία ο X μπορεί να εμφυτευτεί στον Y . Αν $c_Y(X) \leq \alpha$ τότε λέμε ότι ο X είναι α -εμφυτεύσιμος στον Y .

Σχετικά με το πρόβλημα της εμφύτευσης ενός πεπερασμένου μετρικού χώρου στον Ευκλείδειο χώρο, ο Bourgain απέδειξε το 1985 ότι κάθε μετρικός χώρος (X, d) με n σημεία εμφυτεύεται σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο με παραμόρφωση $O(\log n)$. Δηλαδή,

$$\sup_{|X|=n} c_2(X) \leq c \log n,$$

όπου $c_2(X) = c_{\ell_2}(X)$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα των Johnson-Lindenstrauss θα δούμε ότι η εμφύτευση μπορεί πάντα να γίνει σε Ευκλείδειο χώρο διάστασης $d = O(\log n)$.

Θεώρημα 3.5.2 (Johnson-Lindenstrauss). Έστω X ένα σύνολο n -σημείων σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο. Για κάθε $\varepsilon \in (0, 1]$ υπάρχει $(1 + \varepsilon)$ -εμφύτευση του X στον ℓ_2^k για κάποιον $k = O(\varepsilon^{-2} \log n)$.

Η απόδειξη θα βασιστεί στο Λήμμα του Lény.

Λήμμα 3.5.3. Αν $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια 1-Lipschitz συνεχής συνάρτηση τότε, για κάθε $t > 0$,

$$\sigma(f < \text{med}(f) - t) \leq e^{-t^2 n/2} \quad \text{και} \quad \sigma(f > \text{med}(f) + t) \leq e^{-t^2 n/2}.$$

Έστω $1 \leq k \leq n$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_k : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ που απεικονίζει κάθε $x \in S^{n-1}$ στο μήκος $f_k(x)$ της προβολής του πάνω στον υπόχωρο H_k που παράγεται από τα πρώτα k διανύσματα της συνήθους ορθοκανονικής βάσης του $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή,

$$f_k(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Λήμμα 3.5.4. Υπάρχει πραγματικός αριθμός $m = m(n, k)$ ώστε

$$(3.5.1) \quad \sigma(f_k < m - t) \leq e^{-t^2 n/2} \quad \text{και} \quad \sigma(f_k > m + t) \leq e^{-t^2 n/2}$$

για κάθε $t > 0$. Αν το n είναι μεγαλύτερο από κατάλληλη απόλυτη σταθερά και αν $k \geq 10 \log n$, τότε $m \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{n}}$.

Απόδειξη. Η (3.5.1) ισχύει με $m = \text{med}(f)$. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 3.5.3, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η f_k είναι 1-Lipschitz.

Μένει να δούμε το κάτω φράγμα για το m . Παρατηρήστε ότι

$$\int_{S^{n-1}} f_k^2 d\sigma = k \int_{S^{n-1}} x_1^2 d\sigma(x) = \frac{k}{n} \int_{S^{n-1}} \|x\|_2^2 d\sigma(x) = \frac{k}{n}.$$

Για κάθε $t > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \frac{k}{n} &= \int_{S^{n-1}} f_k^2 d\sigma \leq \sigma(f \leq m + t) \cdot (m + t)^2 + \sigma(f > m + t) \cdot \|f_k\|_\infty^2 \\ &\leq (m + t)^2 + e^{-t^2 n/2}. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $t = \sqrt{k/5n}$. Έχουμε υποθέσει ότι $k \geq 10 \log n$, απ' όπου έπεται ότι $\exp(-t^2 n/2) \leq \frac{1}{n}$. Άρα,

$$\frac{k}{n} \leq (m + t)^2 + \frac{1}{n},$$

δηλαδή,

$$m \geq \sqrt{\frac{k-1}{n}} - t \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{n}}$$

αν το n (οπότε και το k) είναι αρκετά μεγάλο. Ακριβέστερος υπολογισμός δείχνει ότι $m = \sqrt{k/n} + O(1/\sqrt{n})$ για κάθε k . $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.2. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το n είναι αρκετά μεγάλο. Έστω X ένα σύνολο n σημείων στον ℓ_2 . Θέτουμε $k = 200\varepsilon^{-2} \log n$. Αν $k \geq n$ τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, οπότε υποθέτουμε ότι $k < n$.

Έστω L ο τυχαίος k -διάστατος γραμμικός υπόχωρος του ℓ_2^n . Έστω $p_L : \ell_2^n \rightarrow L$ η ορθογώνια προβολή επί του L και έστω $m = m(n, k)$.

Έστω x και y στο X . Θα δείξουμε ότι η πιθανότητα (ως προς L) να μην ισχύει η

$$(3.5.2) \quad \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)m\|x - y\|_2 \leq \|p_L(x) - p_L(y)\|_2 \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)m\|x - y\|_2$$

είναι μικρότερη από $\frac{1}{n^2}$.

Θέτουμε $u = x - y$. Αφού κάθε p_L είναι γραμμική απεικόνιση, (3.5.2) γράφεται

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)m\|u\|_2 \leq \|p_L(u)\|_2 \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)m\|u\|_2,$$

και, επειδή όλοι οι όροι της ανισότητας είναι θετικά ομογενείς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|u\|_2 = 1$. Δηλαδή, για σταθερό $u \in S^{n-1}$ ζητάμε να ισχύει η

$$\mathbb{P}\left(L : \left|\|p_L(u)\|_2 - m\right| > \frac{\varepsilon m}{3}\right) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Όμως, η πιθανότητα αυτή είναι ακριβώς ίση με το

$$\sigma\left(x \in S^{n-1} : \left|f_k(x) - m\right| > \frac{\varepsilon m}{3}\right).$$

Από το Λήμμα 3.5.4, αυτό είναι μικρότερο από

$$2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m^2 n}{18}\right) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 k}{72}\right) < n^{-2}.$$

Αφού υπάρχουν λιγότερα από n^2 ζευγάρια σημείων $x, y \in X$, υπάρχει κάποιος L ώστε η (3.5.2) να ισχύει για κάθε $x, y \in X$. Τότε, η απεικόνιση $p_L : X \rightarrow L$ ορίζει μια εμφύτευση του X στον ℓ_2^k με παραμόρφωση $D \leq (1 + \varepsilon/3)/(1 - \varepsilon/3) < 1 + \varepsilon$ (αν $0 < \varepsilon < 1$). $\square$

Η εφαρμογή: Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος με n σημεία. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρει μια εμφύτευση $f : X \rightarrow \ell_2$ με παραμόρφωση $\text{dist}(f) = \alpha$. Θεωρώντας τον υπόχωρο του ℓ_2 που παράγουν τα $f(x_1), \dots, f(x_n)$ μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι η f εμφυτεύει τον X στον ℓ_2^n . Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.5.2 με $\varepsilon = 1/2$ για το σύνολο $f(X)$ στον ℓ_2^n βρίσκουμε $k \leq C \log n$ και εμφύτευση $h : f(X) \rightarrow \ell_2^k$ με παραμόρφωση $\text{dist}(h) < 2$. Τότε, η $f_1 = h \circ f : X \rightarrow \ell_2^k$ είναι μια (2α) -εμφύτευση του X στον ℓ_2^k . Με άλλα λόγια, ισχύει η εξής «αρχή αναγωγής της διάστασης»:

Αν ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος X εμφυτεύεται με παραμόρφωση α σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο, τότε εμφυτεύεται με παραμόρφωση 2α στον $\ell_2^{C \log |X|}$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Ειδικότερα, η συζήτηση που έγινε στην αρχή της ενότητας δείχνει ότι υπάρχει $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \geq 2$ μπορούμε να βρούμε $d \leq c \log n$ ώστε

$$\sup_{|X|=n} c_{\ell_2^d}(X) \leq c \log n.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ισοτροπική σταθερά κυρτών σωμάτων

4.1 Ισοτροπικά κυρτά σώματα

Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που έχει κέντρο βάρους το 0. Δηλαδή,

$$\int_K x_i dx = 0,$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$. Ο γραμμικός τελεστής $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την

$$M(y) = \int_K \langle x, y \rangle x dx$$

είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Ο πίνακας $M(K)$ με

$$[M(K)]_{ij} = \langle M e_i, e_j \rangle = \int_K x_i x_j dx$$

που αντιστοιχεί στον M λέγεται πίνακας αδρανείας του K . Ο M έχει τετραγωνική ρίζα: υπάρχει συμμετρικός και θετικά ορισμένος S τέτοιος ώστε $M = S^2$. Θεωρούμε την γραμμική εικόνα $\tilde{K} = S^{-1}(K)$ του K . Το $\tilde{K}$ έχει κέντρο βάρους το 0, και για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{K}} \langle x, y \rangle^2 dx &= |\det S|^{-1} \int_K \langle S^{-1}x, y \rangle^2 dx \\ &= |\det S|^{-1} \int_K \langle x, S^{-1}y \rangle^2 dx \\ &= |\det S|^{-1} \left\langle \int_K \langle x, S^{-1}y \rangle x dx, S^{-1}y \right\rangle \\ &= |\det S|^{-1} \langle M S^{-1}y, S^{-1}y \rangle = |\det S|^{-1} \|y\|_2^2. \end{aligned}$$

Ορισμός 4.1.1. Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν έχει όγκο $|K| = 1$, κέντρο

βάρους το 0, και ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$(4.1.1) \quad \int_K \langle x, y \rangle^2 dx = A \|y\|_2^2$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, όπου $A > 0$ σταθερά. Άμεσες συνέπειες της (4.1.1) είναι οι

$$\int_K x_i^2 dx = A, \quad i = 1, \dots, n$$

και

$$\int_K \|x\|_2^2 dx = nA.$$

Όπως είδαμε, κάθε κυρτό σώμα με κέντρο βάρους το 0 έχει γραμμική εικόνα που είναι ισοτροπική. Αρκεί να πάρουμε το $\tilde{K}$ όπως παραπάνω, και να κανονικοποιήσουμε τον όγκο του.

Λήμμα 4.1.2. Το K είναι ισοτροπικό σώμα με σταθερά A αν και μόνο αν

$$(4.1.2) \quad \int_K \langle x, Tx \rangle dx = A \cdot (\text{tr} T)$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι ισοτροπικό με σταθερά A . Εφαρμόζοντας την (4.1.1) πρώτα με $\vartheta = e_j$ και μετά με $\vartheta = (e_i + e_j)/\sqrt{2}$, βλέπουμε ότι

$$\int_K x_i x_j dx = A \cdot \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Αν $T = (t_{ij})$, τότε

$$\begin{aligned} \int_K \langle x, Tx \rangle dx &= \sum_{i,j=1}^n t_{ij} \int_K x_i x_j dx = \sum_{i,j=1}^n A \cdot t_{ij} \delta_{ij} \\ &= A \cdot \sum_{i=1}^n t_{ii} = A \cdot (\text{tr} T). \end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι ισχύει η (4.1.2) και την εφαρμόσουμε για τον $Tx = \langle x, \vartheta \rangle \vartheta$, $\vartheta \in S^{n-1}$, παίρνουμε

$$\int_K \langle x, \vartheta \rangle^2 dx = \int_K \langle x, Tx \rangle dx = A \cdot (\text{tr} T) = A \cdot \|\vartheta\|_2^2 = A.$$

□

Το επόμενο Θεώρημα δείχνει ότι μέσα στη γραμμική κλάση ενός κυρτού σώματος με κέντρο βάρους το 0 υπάρχει ένα ουσιαστικά ισοτροπικό σώμα, το οποίο χαρακτηρίζεται ως λύση ενός προβλήματος ελαχίστου.

Θεώρημα 4.1.3. Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K| = 1$ και κέντρο βάρους το 0. Το K είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν

$$\int_K \|x\|_2^2 dx \leq \int_{TK} \|x\|_2^2 dx$$

για κάθε $T \in SL(n)$. Κάθε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 έχει ισοτροπική γραμμική εικόνα. Επιπλέον, η ισοτροπική αυτή εικόνα είναι μονοσήμαντα ορισμένη αν εξαιρέσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι ισοτροπικό με σταθερά A . Έστω $T \in SL(n)$. Τότε,

$$\begin{aligned} \int_{TK} \|x\|_2^2 dx &= \int_K \|Tx\|_2^2 dx = \int_K \langle x, T^*Tx \rangle dx \\ &= A \cdot \text{tr}(T^*T) \geq nA = \int_K \|x\|_2^2 dx, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στη μορφή

$$\text{tr}(T^*T) \geq n[\det(T^*T)]^{1/n}$$

(το ίχνος είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών και η ορίζουσα το γινόμενο τους, και στη συγκεκριμένη περίπτωση οι ιδιοτιμές είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί). Ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $T^*T = I$, δηλαδή αν $T \in O(n)$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το K είναι λύση του προβλήματος ελαχίστου (τέτοιες λύσεις υπάρχουν: κάθε ισοτροπική θέση του K είναι όπως είδαμε μια τέτοια λύση). Έστω $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Για μικρά $\varepsilon > 0$, ο $I + \varepsilon T$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε ο $(I + \varepsilon T)/[\det(I + \varepsilon T)]^{1/n}$ διατηρεί τους όγκους. Άρα,

$$(4.1.3) \quad \int_K \|x\|_2^2 dx \leq \int_K \frac{\|x + \varepsilon Tx\|_2^2}{[\det(I + \varepsilon T)]^{2/n}} dx.$$

Παρατηρούμε ότι $\|x + \varepsilon Tx\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2\varepsilon \langle x, Tx \rangle + O(\varepsilon^2)$ και

$$[\det(I + \varepsilon T)]^{2/n} = 1 + 2\varepsilon \frac{\text{tr}T}{n} + O(\varepsilon^2)$$

καθώς $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Συνεπώς, η (4.1.3) παίρνει τη μορφή

$$\varepsilon \frac{\text{tr}T}{n} \int_K \|x\|_2^2 dx \leq \varepsilon \int_K \langle x, Tx \rangle dx + O(\varepsilon^2),$$

και παίρνοντας όριο καθώς $\varepsilon \rightarrow 0^+$ καταλήγουμε στην

$$\frac{\text{tr}T}{n} \int_K \|x\|_2^2 dx \leq \int_K \langle x, Tx \rangle dx.$$

Αφού ο T ήταν τυχόν, η παραπάνω ανισότητα ισχύει και για τον $-T$, και λόγω γραμμικότητας

παίρνουμε

$$\frac{\text{tr} T}{n} \int_K \|x\|_2^2 dx = \int_K \langle x, Tx \rangle dx$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Από το Λήμμα 4.1, το K είναι ισοτροπικό με σταθερά $A = \frac{1}{n} \int_K \|x\|_2^2 dx$.

Τέλος, αν έχουμε δύο ισοτροπικές θέσεις K, K' του ίδιου σώματος, τότε η μία είναι ορθογώνια εικόνα της άλλης. Για να το δούμε, παρατηρούμε ότι αν $K' = TK$, τότε ισχύει ισότητα στην

$$\int_K \|x\|_2^2 dx \leq \int_{TK} \|x\|_2^2 dx,$$

δηλαδή έχουμε ισότητα στην (4.1). Αυτό σημαίνει ότι $T^*T = I$, δηλαδή $T \in O(n)$. $\square$

Το Θεώρημα 4.1.3 (πιο συγκεκριμένα, η μοναδικότητα της ισοτροπικής θέσης ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς) εξασφαλίζει ότι η σταθερά

$$L_K^2 = \frac{1}{n} \min \left\{ \frac{1}{|TK|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{TK} \|x\|_2^2 dx \mid T \in GL(n) \right\}$$

είναι καλά ορισμένη και εξαρτάται μόνο από τη γραμμική κλάση του K . Επίσης, αν το K είναι ισοτροπικό, τότε για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\int_K \langle x, \vartheta \rangle^2 dx = L_K^2.$$

Η σταθερά L_K ονομάζεται σταθερά ισοτροπίας της γραμμικής κλάσης του K .

Το πρόβλημα της ισοτροπικής σταθεράς διατυπώθηκε από τον Bourgain:

Εικασία: Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε $L_K \leq C$ για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0.

Στην επόμενη ενότητα θα περιγράψουμε την απόδειξη του ακόλουθου άνω φράγματος για την ισοτροπική σταθερά.

Θεώρημα 4.1.4 (Bourgain, 1990). Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0, ισχύει η ανισότητα

$$L_K \leq c \sqrt[n]{n} \log n,$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Το 2024 οι Klartag και Talentez απέδειξαν ότι η εικασία ισχύει.

4.2 Ανισότητα Kahane-Khinchine για λογαριθμικά κοίλα μέτρα

Ορισμός 4.2.1. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ λέγεται λογαριθμικά κοίλη αν, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $\lambda \in (0, 1)$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda}.$$

Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{M}_n$ όλων των Borel μέτρων πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ που έχουν λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f_μ : η f_μ είναι λογαριθμικά κοίλη, το ολοκλήρωμά της ισούται με 1 και για κάθε σύνολο Borel A ισχύει

$$(4.2.1) \quad \mu(A) = \int_A f_\mu(x) dx.$$

Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας μ_K στον $\mathbb{R}^n$, θέτοντας

$$(4.2.2) \quad \mu_K(A) = |K \cap A| = \int_A \chi_K(x) dx$$

για κάθε Borel $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας την κυρτότητα του K ελέγχουμε εύκολα ότι η χ_K είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, άρα $\mu_K \in \mathcal{M}_n$.

Ορισμός 4.2.2. Ένα Borel μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικά κοίλο αν για κάθε A, B μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $\lambda \in (0, 1)$,

$$\mu(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq [\mu(A)]^\lambda [\mu(B)]^{1-\lambda}.$$

Η πρόταση που ακολουθεί δείχνει ότι η κλάση $\mathcal{M}_n$ περιέχεται στην κλάση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων.

Πρόταση 4.2.3. Αν $\mu \in \mathcal{M}_n$, τότε το μ είναι λογαριθμικά κοίλο.

Απόδειξη. Αφού $\mu \in \mathcal{M}_n$, υπάρχει $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ λογαριθμικά κοίλη, ώστε $\mu(A) = \int_A f(x) dx$. Έστω $\lambda \in (0, 1)$ και A, B μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu(\lambda A + (1 - \lambda)B) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\lambda A + (1-\lambda)B}(x) f(x) dx \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) f(x) dx \right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(x) f(x) dx \right)^{1-\lambda} \\ &= [\mu(A)]^\lambda [\mu(B)]^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Ορίζουμε $w(x) = \chi_A(x)f(x)$, $g(x) = \chi_B(x)f(x)$ και $h(x) = \chi_{\lambda A + (1-\lambda)B}(x)f(x)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι οι g, h, w ικανοποιούν τις υποθέσεις της ανισότητας Prékopa-Leindler, απ' όπου έπεται το ζητούμενο. $\square$

Σημείωση. Ένα θεώρημα του Borell δείχνει ότι κάθε μη εκφυλισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{M}_n$.

Θεώρημα 4.2.4. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο H . Τότε, το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και έχει μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f , δηλαδή $d\mu(x) = f(x) dx$.

Σκοπός μας εδώ είναι να αποδείξουμε την ανισότητα Kahane-Khintchine για λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής.

Θεώρημα 4.2.5. Έστω $\mu \in \mathcal{M}_n$. Αν $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί την $|g(tx)| = |t||g(x)|$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $|g(x+y)| \leq |g(x)| + |g(y)|$ για $x, y \in \mathbb{R}^n$, τότε, για κάθε $q > p \geq 1$, έχουμε

$$\left(\int |g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int |g|^q d\mu \right)^{1/q} \leq c \frac{q}{p} \left(\int |g|^p d\mu \right)^{1/p},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η απόδειξη θα βασιστεί στο λήμμα του Borell.

Λήμμα 4.2.6. Έστω $\mu \in \mathcal{M}_n$. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σύνολο A στον $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A) = \alpha \in (0, 1)$ και για κάθε $t > 1$ έχουμε ότι

$$1 - \mu(tA) \leq \alpha \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^{\frac{t+1}{2}}.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τη συμμετρία και την κυρτότητα του A ελέγχουμε ότι

$$\frac{2}{t+1} \mathbb{R}^n \setminus (tA) + \frac{t-1}{t+1} A \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A.$$

για κάθε $t > 1$. Κατόπιν, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το μ είναι λογαριθμικά κοίλο για να φτάσουμε το συμπέρασμα. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.5. Γράφουμε $\|g\|_p^p := \int |g|^p d\mu$. Τότε, το σύνολο

$$(4.2.3) \quad A = \{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| \leq 3\|g\|_p\}$$

είναι συμμετρικό και κυρτό. Επίσης, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$(4.2.4) \quad tA = \{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| \leq 3t\|g\|_p\}$$

και $\mu(A) \geq 1 - 3^{-p} \geq \frac{2}{3}$. Από το λήμμα του Borell βλέπουμε ότι

$$(4.2.5) \quad \mu(x : |g(x)| \geq 3t\|g\|_p) \leq \frac{1}{3} e^{-c_1 p(t-1)}$$

για κάθε $t > 1$, όπου $c_1 = \frac{\ln 2}{2}$. Τώρα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int |g|^q d\mu &= \int_0^\infty q s^{q-1} \mu(x : |g(x)| \geq s) ds \\ &\leq (3\|g\|_p)^q + \frac{1}{3} (3\|g\|_p)^q \int_1^\infty q t^{q-1} e^{-c_1 p(t-1)} dt \\ &\leq (3\|g\|_p)^q + \frac{e^{c_1 p}}{3} (3\|g\|_p)^q \int_0^\infty q t^{q-1} e^{-c_1 p t} dt \\ &\leq (3\|g\|_p)^q + \frac{e^{c_1 p}}{3} \left(\frac{3\|g\|_p}{c_1 p} \right)^q \Gamma(q+1). \end{aligned}$$

Από τον τύπο του Stirling και από την $(a+b)^{1/q} \leq a^{1/q} + b^{1/q}$ για κάθε $a, b > 0$ και $q \geq 1$, έπεται ότι $\|g\|_{L_q(\mu)} \leq c \frac{q}{p} \|g\|_{L_p(\mu)}$. $\square$

Παρατήρηση 4.2.7. Τα γραμμικά συναρτησοειδή και οποιαδήποτε ημινόρμα στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.5. Συνεπώς,

$$\|\langle \cdot, \vartheta \rangle\|_q \leq c q \|\langle \cdot, \vartheta \rangle\|_1$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ και $q \geq 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έπεται ότι

$$\|\langle \cdot, \vartheta \rangle\|_{\psi_1} \leq c \|\langle \cdot, \vartheta \rangle\|_1$$

για $\vartheta \in S^{n-1}$.

Βασικό ρόλο στο επιχείρημα του Bourgain παίζει η συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών $x \mapsto \langle x, \vartheta \rangle$ πάνω στο K , η οποία περιγράφεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.2.8. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$, και αν $\vartheta \in \mathbb{R}^n$, τότε για κάθε $p > 1$ ισχύει η αντίστροφη ανισότητα Hölder

$$\left(\int_K |\langle x, \vartheta \rangle|^p dx \right)^{1/p} \leq c p \int_K |\langle x, \vartheta \rangle| dx.$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της ανισότητας Brunn-Minkowski είναι ότι το μέτρο $\mu(A) = |A \cap K|$ είναι λογαριθμικά κοίλο. Επίσης, για κάθε $\vartheta \in \mathbb{R}^n$ η συνάρτηση $x \mapsto |\langle x, \vartheta \rangle|$ είναι ημινόρμα. Έτσι, το συμπέρασμα έπεται από την ανισότητα Kahane-Khintchine για λογαριθμικά κοίλα μέτρα (Θεώρημα 4.2.5). $\square$

Πόρισμα 4.2.9. Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα. Για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ και $p > 1$,

$$\left(\int_K |\langle x, \vartheta \rangle|^p dx \right)^{1/p} \leq c p L_K,$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Παίρνοντας το ανάπτυγμα Taylor της e^t και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.1.1 για $p = 1, 2, \dots$ βλέπουμε ότι ισχύει το εξής.

Πρόταση 4.2.10. Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ ισχύει

$$\int_K \exp(|\langle x, \vartheta \rangle|/CL_K) dx \leq 2,$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Παρατήρηση 4.2.11. Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται υποεκθετική με σταθερά $\alpha > 0$ αν για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq 2e^{-t/\alpha}.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι οι παρακάτω ιδιότητες είναι ισοδύναμες (με τις σταθερές α, β, γ να διαφέρουν το πολύ κατά μία απόλυτη σταθερά).

(i) Υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε: για κάθε $t > 0$,

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq 2e^{-t/\alpha}.$$

(ii) Υπάρχει $\beta > 0$ ώστε: για κάθε $p \geq 1$,

$$\|X\|_p \leq \beta p.$$

(iii) Υπάρχει $\gamma > 0$ ώστε

$$\mathbb{E}(e^{|X|/\gamma}) \leq 2.$$

Η συνεπαγωγή (ii) $\implies$ (iii) αποδεικνύεται εύκολα αν θεωρήσουμε το ανάπτυγμα Taylor της $e^{|X|/\gamma}$ (την χρησιμοποιήσαμε ήδη για να πάρουμε την Πρόταση 4.2.10 από το Πρόσχημα 4.2.9. Θα χρησιμοποιήσουμε τη συνεπαγωγή (iii) $\implies$ (i), η οποία είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Markov. Η μικρότερη σταθερά γ για την οποία ισχύει η (iii) ονομάζεται ψ_1 -νόρμα της X και συμβολίζεται με $\|X\|_{\psi_1}$. Η Πρόταση 4.2.10 μπορεί λοιπόν να διατυπωθεί στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή.

Πρόταση 4.2.12. Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ ισχύει ότι

$$\|\langle \cdot, \vartheta \rangle\|_{\psi_1} \leq CL_K,$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

4.3 Αριθμοί κάλυψης: η ανισότητα του Sudakov και η δυϊκή της

Ορισμός 4.3.1. Έστω A και B δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Ο αριθμός κάλυψης $N(A, B)$ του A από το B είναι ο ελάχιστος αριθμός μεταφορών του B που απαιτούνται για να καλυφθεί

το A :

$$N(A, B) = \min\{N \in \mathbb{N} \mid \exists x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n : A \subseteq \cup(x_i + B)\}.$$

Μια χρήσιμη παραλλαγή του $N(A, B)$ ορίζεται αν απαιτήσουμε από τα κέντρα x_i να ανήκουν στο A . Θέτουμε

$$\bar{N}(A, B) = \min\{N \in \mathbb{N} \mid \exists x_1, \dots, x_N \in A : A \subseteq \cup(x_i + B)\}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των αριθμών κάλυψης (οι αποδείξεις τους είναι απλές).

Λήμμα 4.3.2. Για κάθε ζεύγος κυρτών σωμάτων A, B και για κάθε αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ισχύει $N(A, B) = N(T(A), T(B))$.

Λήμμα 4.3.3. Αν A, B και C είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε $N(A, B) \leq N(A, C)N(C, B)$.

Λήμμα 4.3.4. Αν A, B και C είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε $N(A + C, B + C) \leq N(A, B)$

Λήμμα 4.3.5. Αν A και B είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε $N(A, 2(B \cap A)) \leq N(A, B)$.

Λήμμα 4.3.6. Αν D είναι μια Ευκλείδεια μπάλα, τότε $N(A, D \cap 2A) = N(A, D)$ για κάθε κυρτό σώμα A στον $\mathbb{R}^n$.

Ορίζουμε μία ακόμα παράμετρο $M(A, B)$ ως τον μέγιστο δυνατό πληθάριθμο ενός B -διαχωρισμένου συνόλου στο A , δηλαδή,

$$M(A, B) = \max\{N : \exists x_1, \dots, x_N \in A \text{ ώστε } \forall j \neq i, x_j \notin (x_i + B)\}.$$

Η παράμετρος αυτή συνδέεται στενά με τους αριθμούς κάλυψης. Ελέγχουμε εύκολα ότι

Λήμμα 4.3.7. $M(A, 2B) \leq N(A, B) \leq M(A, B)$.

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Σκοπός μας είναι να δώσουμε εκτιμήσεις για τους αριθμούς κάλυψης $N(K, tB_2^n)$ και $N(B_2^n, tK)$. Στις εκτιμήσεις αυτές, βασικό ρόλο παίζει το μέσο πλάτος του K

$$w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(x) d\sigma(x),$$

όπου $h_K(x) = \max\{\langle x, y \rangle : y \in K\}$ είναι η συνάρτηση στήριξης του K . Αρχικά, υποθέτουμε ότι το K είναι συμμετρικό.

Θεώρημα 4.3.8 (Sudakov). Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t > 0$,

$$\log N(K, tB_2^n) \leq cn \left(\frac{w(K)}{t} \right)^2,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θα πάρουμε την ανισότητα του Sudakov από την δυϊκή της, η οποία αποδείχθηκε από τον Talagrand.

Θεώρημα 4.3.9 (Talagrand). Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t > 0$,

$$\log N(B_2^n, tK) \leq cn \left(\frac{w(K^\circ)}{t} \right)^2,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το επιχείρημα του Talagrand χρησιμοποιεί το μέτρο του Gauss γ_n .

Λήμμα 4.3.10. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\gamma_n(K + z) \geq \exp(-\|z\|_2^2/2) \gamma_n(K).$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την συμμετρία του K βλέπουμε ότι

$$\gamma_n(K + z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K \exp(-\|z + x\|_2^2/2) dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K \exp(-\|z - x\|_2^2/2) dx,$$

άρα,

$$\gamma_n(K + z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K \frac{\exp(-\|z + x\|_2^2/2) + \exp(-\|z - x\|_2^2/2)}{2} dx.$$

Από την κυρτότητα της εκθετικής συνάρτησης συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \gamma_n(K + z) &\geq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K \exp(-[\|x + z\|_2^2 + \|x - z\|_2^2]/4) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K \exp(-\|x\|_2^2/2 - \|z\|_2^2/2) dx \\ &= \exp(-\|z\|_2^2/2) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K \exp(-\|x\|_2^2/2) dx \\ &= \exp(-\|z\|_2^2/2) \gamma_n(K). \end{aligned}$$

□

Απόδειξη της δυϊκής ανισότητας Sudakov. Έστω $x_1, \dots, x_N$ σύνολο σημείων της B_2^n , μεγιστικό ως προς τον περιορισμό

$$\|x_i - x_j\|_K > t, \quad i \neq j.$$

Τότε, τα σύνολα $x_i + \frac{t}{2}K$ έχουν ξένα εσωτερικά. Έπεται ότι, για κάθε $\lambda > 0$ τα σύνολα $\lambda x_i + \frac{\lambda t}{2}K$ έχουν ξένα εσωτερικά, και αφού το γ_n είναι μέτρο πιθανότητας,

$$\sum_{i=1}^N \gamma_n(\lambda x_i + \frac{\lambda t}{2}K) = \gamma_n\left(\bigcup_{i=1}^N (\lambda x_i + \frac{\lambda t}{2}K)\right) \leq 1.$$

Αφού $x_i \in B_2^n$, έχουμε $\|\lambda x_i\|_2 \leq \lambda$, $i = 1, \dots, N$. Από το προηγούμενο λήμμα παίρνουμε

$$\gamma_n(\lambda x_i + \frac{\lambda t}{2}K) \geq \exp(-\lambda^2/2) \gamma_n(\frac{\lambda t}{2}K) \quad , \quad i = 1, \dots, N.$$

Έτσι, προκύπτει άνω φράγμα για το N : Για κάθε $\lambda > 0$,

$$N \leq \frac{\exp(\lambda^2/2)}{\gamma_n(\frac{\lambda}{2}K)}.$$

Επιλέγουμε $\lambda > 0$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K \gamma_n(dx) &\leq c \sqrt{n} \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K \sigma(d\theta) \\ &= c \sqrt{n} w(K^\circ), \end{aligned}$$

και εφαρμόζοντας την ανισότητα Markov έχουμε

$$\gamma_n(\|x\|_K \geq \lambda t/2) \leq \frac{2}{\lambda t} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K \gamma_n(dx) \leq \frac{2c \sqrt{n}}{\lambda t} w(K^\circ),$$

δηλαδή,

$$1 - \gamma_n(\frac{\lambda t}{2}K) \leq \frac{2c \sqrt{n}}{\lambda t} w(K^\circ).$$

Αν επιλέξουμε $\lambda = 4c \sqrt{n} w(K^\circ)/t$, έχουμε

$$\gamma_n(2c \sqrt{n} w(K^\circ)K) \geq \frac{1}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$N \leq 2 \exp(8c^2 n w^2(K^\circ)/t^2).$$

Άρα,

$$\log N(B_2^n, tK) \leq \log \bar{N}(B_2^n, tK) \leq \log N \leq 8c^2 n \left(\frac{w(K^\circ)}{t} \right)^2.$$

□

Μια ισοδύναμη διατύπωση της δυϊκής ανισότητας Sudakov είναι η εξής:

$$\sup_{t>0} t \left(\log \bar{N}(B_2^n, tK) \right)^{1/2} \leq c \sqrt{n} w(K^\circ).$$

Εφαρμόζοντας αυτήν την ανισότητα για το K° , παίρνουμε

$$A := \sup_{t>0} t \left(\log \bar{N}(B_2^n, tK^\circ) \right)^{1/2} \leq c \sqrt{n} w(K).$$

Η Tomczak-Jaegermann παρατήρησε ότι οι αριθμοί κάλυψης $N(K, tB_2^n)$ και $N(B_2^n, tK^\circ)$ είναι ισοδύναμοι, με την εξής έννοια.

Θεώρημα 4.3.11. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν

$$B = \sup_{t>0} t \left(\log N(K, tB_2^n) \right)^{1/2},$$

τότε $B \leq 10A$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$2K \cap \left(\frac{t^2}{2} K^\circ \right) \subseteq tB_2^n.$$

Πράγματι, αν $x \in 2K$ και $x \in (t^2/2)K^\circ$, τότε

$$|x|^2 = \langle x, x \rangle \leq \|x\|_K \|x\|_{K^\circ} \leq 2 \frac{t^2}{2} = t^2.$$

Έπεται ότι

$$\overline{N}(K, tB_2^n) \leq \overline{N}(K, (2K) \cap \left(\frac{t^2}{2} K^\circ \right)).$$

Η επόμενη παρατήρηση είναι ότι

$$\overline{N}(K, (2K) \cap \left(\frac{t^2}{2} K^\circ \right)) = \overline{N}(K, \frac{t^2}{2} K^\circ).$$

Πράγματι, αν $x_1, \dots, x_N \in K$ και $K \subseteq \cup_{i \leq N} (x_i + \frac{t^2}{2} K^\circ)$, τότε για κάθε $y \in K$ υπάρχει $i \leq N$ ώστε $y - x_i \in \frac{t^2}{2} K^\circ$, και λόγω της $y - x_i \in 2K$ έχουμε $y \in (x_i + (2K) \cap (\frac{t^2}{2} K^\circ))$, δηλαδή

$$K \subseteq \cup_{i=1}^N (x_i + (2K) \cap \left(\frac{t^2}{2} K^\circ \right)).$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και τις βασικές ιδιότητες των αριθμών κάλυψης, γράφουμε

$$\begin{aligned} N(K, tB_2^n) &\leq \overline{N}(K, tB_2^n) \leq \overline{N}(K, \frac{t^2}{2} K^\circ) \\ &\leq N(K, \frac{t^2}{4} K^\circ) \leq N(K, 2tB_2^n) N(B_2^n, \frac{t}{8} K^\circ). \end{aligned}$$

Απλοί υπολογισμοί δείχνουν ότι

$$\begin{aligned} t^2 \log N(K, tB_2^n) &\leq \frac{1}{4} (2t)^2 \log N(K, 2tB_2^n) + 64(t/8)^2 \log N(B_2^n, \frac{t}{8} K^\circ) \\ &\leq \frac{1}{4} (2t)^2 \log N(K, 2tB_2^n) + 64A^2, \end{aligned}$$

και παίρνοντας το $\sup$ πάνω από όλα τα $t > 0$ καταλήγουμε στην $3B^2 \leq 256A^2$. $\square$

Απόδειξη της ανισότητας του Sudakov. Από την δυϊκή ανισότητα Sudakov και την προηγο-

ύμενη παρατήρηση, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$t^2 \log N(K, tB_2^n) \leq 100A^2 \leq cnw^2(K),$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. $\square$

Η ανισότητα Sudakov ισχύει και για μη συμμετρικά κυρτά σώματα.

Πρόταση 4.3.12. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t > 0$,

$$t^2 \log N(K, tB_2^n) \leq cnw^2(K),$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σώμα διαφορών $K - K$ του K . Τότε,

$$\begin{aligned} w(K - K) &= 2 \int_{S^{n-1}} h_{K-K}(u) \sigma(du) \\ &= 2 \int_{S^{n-1}} [h_K(u) + h_{-K}(u)] \sigma(du) \\ &= 2 \int_{S^{n-1}} [h_K(u) + h_K(-u)] \sigma(du) \\ &= 2w(K). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι υπάρχει μεταφορά του K η οποία περιέχεται στο $K - K$ και την ανισότητα Sudakov για το $K - K$, παίρνουμε

$$t^2 \log N(K, tB_2^n) \leq t^2 \log N(K - K, tB_2^n) \leq cnw^2(K - K) = 4cnw^2(K).$$

$\square$

4.4 Άνω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά

Σε αυτήν την ενότητα περιγράφουμε το άνω φράγμα του Bourgain για την ισοτροπική σταθερά. Ξεκινάμε με τα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη.

4.4.1 Μέση τιμή του maximum γραμμικών συναρτησοειδών σε κυρτά σώματα

Θεωρούμε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Από την Πρόταση 4.1.2 γνωρίζουμε ότι ικανοποιείται η ψ_1 -εκτίμηση

$$\|\langle \cdot, \vartheta \rangle\|_{\psi_1} \leq b \|\langle \cdot, \vartheta \rangle\|_1 \leq bL_K$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$, όπου $b > 0$ απόλυτη σταθερά.

Πρόταση 4.4.1. Αν $\vartheta_1, \dots, \vartheta_N \in S^{n-1}$, τότε

$$\int_K \max_{1 \leq i \leq N} |\langle x, \vartheta_i \rangle| dx \leq C b L_K (\log N),$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Για κάθε $t > 0$,

$$\begin{aligned} \text{Prob} \left(x \in K : \max_{1 \leq i \leq N} |\langle x, \vartheta_i \rangle| \geq t \right) &\leq \sum_{i=1}^N \text{Prob} (x \in K : |\langle x, \vartheta_i \rangle| \geq t) \\ &\leq 2N \exp(-(t/bL_K)^\alpha). \end{aligned}$$

Συνεπώς, για κάθε $A > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_K \max_{1 \leq i \leq N} |\langle x, \vartheta_i \rangle| dx &= \int_0^\infty \text{Prob} \left(x \in K : \max_{1 \leq i \leq N} |\langle x, \vartheta_i \rangle| \geq t \right) dt \\ &\leq A + \int_A^\infty \text{Prob} \left(x \in K : \max_{1 \leq i \leq N} |\langle x, \vartheta_i \rangle| \geq t \right) dt \\ &\leq A + 2N \int_A^\infty \exp(-t/bL_K) dt. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $A = 4bL_K(\log N)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_A^\infty \exp(-t/bL_K) dt &= 4bL_K(\log N) \int_1^\infty \exp(-4s \log N) ds \\ &\leq 4bL_K(\log N) \exp(-2 \log N) \int_1^\infty e^{-s} ds \\ &\leq 4bL_K(\log N) N^{-2}, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\exp(-4s \log N) \leq \exp(-2 \log N) \cdot e^{-s}$$

για κάθε $s \geq 1$. Έπεται ότι

$$\int_K \max_{1 \leq i \leq N} |\langle x, \vartheta_i \rangle| dx \leq C b L_K (\log N),$$

με $C = 12$. □

4.4.2 Διάσπαση Dudley-Fernique

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $0 \in K$ και γράφουμε R για την περιγεγραμμένη ακτίνα του K . Δηλαδή, $R = \max\{\|x\|_2 : x \in K\}$. Για κάθε $j \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε

ένα υποσύνολο N_j του K ώστε

$$|N_j| = N(K, (R/2^j)B_2^n),$$

και

$$K \subseteq \bigcup_{y \in N_j} (y + (R/2^j)B_2^n).$$

Από την ανισότητα του Sudakov έχουμε

$$(4.4.1) \quad \log |N_j| \leq cn \left(\frac{2^j w(K)}{R} \right)^2.$$

Ορίζουμε $N_0 = \{0\}$ και

$$W_j = N_j - N_{j-1} = \{y - y' \mid y \in N_j, y' \in N_{j-1}\}$$

για κάθε $j \geq 1$.

Λήμμα 4.4.2. Για κάθε $x \in K$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $z_j \in W_j \cap (3R/2^j)B_2^n$, $j = 1, \dots, m$ και $w_m \in (R/2^m)B_2^n$ ώστε

$$x = z_1 + \dots + z_m + w_m.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in K$. Από τον ορισμό του N_j , μπορούμε να βρούμε $y_j \in N_j$, $j = 1, \dots, m$, ώστε

$$\|x - y_j\|_2 \leq \frac{R}{2^j}.$$

Γράφουμε

$$x = 0 + (y_1 - 0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_m - y_{m-1}) + (x - y_m).$$

Θέτουμε $y_0 = 0$ και $w_m = x - y_m$, $z_j = y_j - y_{j-1}$ για $j = 1, \dots, m$. Τότε, $\|w_m\|_2 = \|x - y_m\|_2 \leq R/2^m$, και $z_j \in N_j - N_{j-1} = W_j$. Επίσης,

$$\|z_j\|_2 \leq \|x - y_j\|_2 + \|x - y_{j-1}\|_2 \leq \frac{R}{2^j} + \frac{R}{2^{j-1}} = \frac{3R}{2^j}.$$

Τέλος, $x = z_1 + \dots + z_m + w_m$. □

Θέτουμε $Z_j = W_j \cap (3R/2^j)B_2^n$. Τότε, παίρνοντας υπ' όψιν μας την (4.4.1), μπορούμε να διατυπώσουμε το εξής.

Θεώρημα 4.4.3. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, με $0 \in K$ και περιγεγραμμένη ακτίνα R . Υπάρχουν $Z_j \subseteq (3R/2^j)B_2^n$, $j \in \mathbb{N}$, ώστε

$$\log |Z_j| \leq cn \left(\frac{2^j w(K)}{R} \right)^2,$$

με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $x \in K$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $z_j \in Z_j$, $j = 1, \dots, m$ και $w_m \in (R/2^m)B_2^n$ ώστε $x = z_1 + \dots + z_m + w_m$.

4.4.3 Απόδειξη του άνω φράγματος

Θεώρημα 4.4.4. Αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$L_K \leq c \sqrt[n]{n} \log n,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θα δεχτούμε και θα χρησιμοποιήσουμε ένα βασικό θεώρημα του Pisier: υπάρχει συμμετρικός και θετικά ορισμένος $T \in SL(n)$ ώστε

$$w(TK) \leq c \sqrt{n} \log n.$$

Γράφουμε

$$nL_K^2 = \int_K \|x\|_2^2 dx \leq \frac{\text{tr} T}{n} \int_K \|x\|_2^2 = \int_K \langle x, Tx \rangle dx.$$

Συνεπώς,

$$nL_K^2 \leq \int_K \max_{y \in TK} |\langle y, x \rangle| dx.$$

Τώρα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 4.4.3 για το TK . Αν R είναι η περιγεγραμμένη ακτίνα του TK , για κάθε $j = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $Z_j \subset (3R/2^j)B_2^n$ ώστε

$$\log |Z_j| \leq cn \left(\frac{w(TK)2^j}{R} \right)^2,$$

και κάθε $y \in TK$ να γράφεται στην μορφή $y = z_1 + \dots + z_m + w_m$, όπου $z_j \in Z_j$ και $w_m \in (R/2^m)B_2^n$. Τότε,

$$\begin{aligned} \max_{y \in TK} |\langle y, x \rangle| &\leq \sum_{j=1}^m \max_{z \in Z_j} |\langle z, x \rangle| + \max_{w \in (R/2^m)B_2^n} |\langle w, x \rangle| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \frac{3R}{2^j} \max_{z \in Z_j} |\langle \bar{z}, x \rangle| + \frac{R}{2^m} \|x\|_2, \end{aligned}$$

όπου $\bar{z}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του z . Δεδομένου ότι $\int_K \|x\|_2 dx \leq \sqrt{n} L_K$, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} nL_K^2 &\leq \sum_{j=1}^m \frac{3R}{2^j} \int_K \max_{z \in Z_j} |\langle \bar{z}, x \rangle| dx + \frac{R}{2^m} \int_K \|x\|_2 dx \\ &\leq \sum_{j=1}^m \frac{3R}{2^j} \int_K \max_{z \in Z_j} |\langle \bar{z}, x \rangle| dx + \frac{R}{2^m} \sqrt{n} L_K. \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 4.4.1 παίρνουμε

$$(4.4.2) \quad nL_K^2 \leq \sum_{j=1}^m \frac{3R}{2^j} c'' nL_K \left(\frac{w(TK)2^j}{R} \right)^2 + \frac{R}{2^m} \sqrt{n} L_K.$$

Το άθροισμα στο δεξιό μέλος φράσσεται από

$$cL_K n w^2(TK) \frac{2^m}{R}.$$

Λύνοντας την εξίσωση

$$\frac{n w^2(TK) 2^m}{R} = \frac{R \sqrt{n}}{2^m}$$

βλέπουμε ότι η βέλτιστη τιμή του m ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{R}{2^m} = \sqrt[4]{n} w(TK).$$

Επιστρέφοντας στην (4.4.2), παίρνουμε

$$nL_K^2 \leq c_2 \sqrt{n} \sqrt[4]{n} w(TK) L_K.$$

Αφού $w(TK) \leq c_3 \sqrt{n} \log n$, έχουμε το συμπέρασμα. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ελάχιστο μέσο πλάτος

5.1 Συναρτήσεις Rademacher και Walsh

Ορισμός 5.1.1. (α) Εστω $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $E_2^n = \{-1, 1\}^n$. Το σύνολο $\{-1, 1\}$ είναι πολλαπλασιαστική ομάδα, επομένως και ο E_2^n είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό κατα συντεταγμένες.

(β) Για κάθε $i = 1, \dots, n$ ορίζουμε $r_i : E_2^n \rightarrow \{-1, 1\}$ με

$$r_i(\varepsilon) = r_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_n) = \varepsilon_i.$$

Οι r_i , $i = 1, \dots, n$, είναι οι συναρτήσεις Rademacher.

(γ) Εστω $\emptyset \neq A \subseteq \{1, \dots, n\}$. Ορίζουμε $w_A : E_2^n \rightarrow \{-1, 1\}$ με

$$w_A(\varepsilon) = \prod_{i \in A} r_i(\varepsilon).$$

Αν $A = \emptyset$, θέτουμε $w_A(\varepsilon) = 1$. Οι w_A , $A \subseteq \{1, \dots, n\}$, είναι οι συναρτήσεις Walsh. Παρατηρήστε ότι $r_i = w_{\{i\}}$.

Οι συναρτήσεις Walsh ικανοποιούν τα παρακάτω:

Πρόταση 5.1.2. (α) Κάθε w_A είναι ομοιομορφισμός ομάδων.

(β) Για κάθε A και κάθε $\varepsilon \in E_2^n$, $w_A^2(\varepsilon) = 1$.

(γ) Ισχύουν οι συνθήκες ορθογωνιότητας

$$\sum_A w_A(\varepsilon) w_A(\zeta) = 2^n \delta_{\varepsilon\zeta}$$

και

$$\sum_{\varepsilon} w_A(\varepsilon) w_B(\varepsilon) = 2^n \delta_{AB},$$

όπου $\delta_{xy} = 1$ αν $x = y$ και $\delta_{xy} = 0$ αν $x \neq y$.

Αν στον E_2^n ορίσουμε την ομοιόμορφη διακριτή κατανομή πιθανότητας, τότε γίνεται διακριτός χώρος πιθανότητας $(E_2^n, P(E_2^n), p)$. Θα συμβολίζουμε $d(\varepsilon) = dp(\varepsilon)$. Αν $f : E_2^n \rightarrow \mathbb{R}$, τότε

$$\int_{E_2^n} f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in E_2^n} f(\varepsilon).$$

Πιο γενικά, αν X χώρος Banach και $f : E_2^n \rightarrow X$, τότε ορίζουμε

$$\int_{E_2^n} f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in E_2^n} f(\varepsilon) \in X.$$

Ο χώρος των συναρτήσεων $f : E_2^n \rightarrow X$ γίνεται χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_{L_2(X; E_2^n)} = \|f\|_{L_2(X)} = \left(\int_{E_2^n} \|f(\varepsilon)\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε και την νόρμα

$$\|f\|_{L_1(X; E_2^n)} = \|f\|_{L_1(X)} = \int_{E_2^n} \|f(\varepsilon)\| d\varepsilon.$$

Πρόταση 5.1.3. Κάθε $f : E_2^n \rightarrow X$ γράφεται κατα μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$f(\varepsilon) = \sum_A w_A(\varepsilon) x_A,$$

για κάποια $x_A \in X$.

Απόδειξη. Για κάθε $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ ορίζουμε

$$x_A = \int_{E_2^n} w_A(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.1.2 (γ) βλέπουμε ότι για κάθε $\varepsilon \in E_2^n$

$$\begin{aligned} \sum_A w_A(\varepsilon) x_A &= \sum_A w_A(\varepsilon) \left(\int_{E_2^n} w_A(\zeta) f(\zeta) d\zeta \right) \\ &= \int_{E_2^n} f(\zeta) \left(\sum_A w_A(\varepsilon) w_A(\zeta) \right) d\zeta \\ &= f(\varepsilon). \end{aligned}$$

Για τη μοναδικότητα, ας υποθέσουμε ότι $f(\varepsilon) = \sum_A w_A(\varepsilon)y_A$ για κάποια $y_A \in X$. Τότε,

$$\begin{aligned} x_A &= \int_{E_2^n} w_A(\zeta)f(\zeta)d\zeta \\ &= \int_{E_2^n} \left(\sum_B w_B(\zeta)y_B \right) w_A(\zeta)d\zeta \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_B y_B \left(\sum_{\zeta \in E_2^n} w_B(\zeta)w_A(\zeta) \right) \\ &= y_A, \end{aligned}$$

πάλι από την Πρόταση 5.1.2(γ). □

Ορισμός 5.1.4. (α) Αν $f : E_2^n \rightarrow X$ και $g : E_2^n \rightarrow \mathbb{R}$, ορίζουμε τη *συνέλιξη* $f * g : E_2^n \rightarrow X$ των f και g ως εξής:

$$(f * g)(\varepsilon) = \int_{E_2^n} f(\varepsilon\zeta)g(\zeta)d\zeta.$$

(β) Η *Rademacher προβολή* της $f : E_2^n \rightarrow X$ είναι η συνάρτηση $\text{Rad}_n f : E_2^n \rightarrow X$ με

$$\text{Rad}_n f(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon)x_{\{i\}},$$

όπου $f = \sum w_A x_A$.

Πρόταση 5.1.5. Ορίζουμε $g : E_2^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon)$. Τότε, για κάθε $f : E_2^n \rightarrow X$, ισχύει

$$\text{Rad}_n f = f * g.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} (f * g)(\varepsilon) &= \int_{E_2^n} \left(\sum_A w_A(\varepsilon\zeta)x_A \right) \left(\sum_{i=1}^n r_i(\zeta) \right) d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_A x_A w_A(\varepsilon) \left(\int_{E_2^n} w_A(\zeta)r_i(\zeta)d\zeta \right) \\ &= \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon)x_{\{i\}} \\ &= \text{Rad}_n f(\varepsilon). \end{aligned}$$

□

Ορισμός 5.1.6. Εστω $f : E_2^n \rightarrow X$ και $\varphi : E_2^n \rightarrow X^*$. Ορίζουμε

$$\langle f(\varepsilon), \varphi(\varepsilon) \rangle = [\varphi(\varepsilon)](f(\varepsilon)).$$

Πρόταση 5.1.7. Εστω X χώρος Banach, X^* ο δυϊκός του, και H χώρος Hilbert. Για κάθε $f : E_2^n \rightarrow X$, $\varphi : E_2^n \rightarrow X^*$ και $h : E_2^n \rightarrow H$ ισχύουν τα εξής:

(α) Υπάρχει $\psi : E_2^n \rightarrow X^*$ με $\|\psi\|_{L_2(X^*)} = 1$ τέτοια ώστε

$$\|f\|_{L_2(X)} = \int_{E_2^n} \langle f(\varepsilon), \psi(\varepsilon) \rangle d\varepsilon.$$

(β) $\int_{E_2^n} \langle f(\varepsilon), \varphi(\varepsilon) \rangle d\varepsilon \leq \|f\|_{L_2(X)} \|\varphi\|_{L_2(X^*)}$.

(γ) Αν $h(\varepsilon) = \sum_A w_A(\varepsilon) x_A$ είναι η αναπαράσταση της h , τότε

$$\|h\|_{L_2(H)}^2 = \sum_A \|x_A\|_H^2.$$

Απόδειξη. (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2(X)} &= \left(\frac{\sum_{\varepsilon} \|f(\varepsilon)\|_X^2}{2^n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sum_{\varepsilon} \|f(\varepsilon)\|_X a_{\varepsilon}}{\sqrt{2^n}}, \end{aligned}$$

όπου $\{a_{\varepsilon}\}$ κατάλληλη ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_{\varepsilon} a_{\varepsilon}^2 = 1$.

Για κάθε $\varepsilon \in E_2^n$ υπάρχει $\tilde{\psi}(\varepsilon) \in X^*$ με $\|\tilde{\psi}(\varepsilon)\|_{X^*} = 1$ και

$$\|f(\varepsilon)\|_X = \langle f(\varepsilon), \tilde{\psi}(\varepsilon) \rangle.$$

Ορίζουμε $\psi(\varepsilon) = \tilde{\psi}(\varepsilon) a_{\varepsilon} 2^{\frac{n}{2}}$. Τότε,

$$\|\psi\|_{L_2(X^*)}^2 = \frac{\sum_{\varepsilon} \|\psi(\varepsilon)\|_{X^*}^2}{2^n} = \frac{\sum_{\varepsilon} \|\tilde{\psi}(\varepsilon)\|_{X^*}^2 a_{\varepsilon}^2 2^n}{2^n} = 1$$

και

$$\|f\|_{L_2(X)} = \int_{E_2^n} \langle f(\varepsilon), \psi(\varepsilon) \rangle d\varepsilon.$$

(β) Απλώς παρατηρούμε ότι

$$\int_{E_2^n} \langle f(\varepsilon), \varphi(\varepsilon) \rangle d\varepsilon \leq \int_{E_2^n} \|f(\varepsilon)\|_X \|\varphi(\varepsilon)\|_{X^*} d\varepsilon,$$

και χρησιμοποιούμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

(γ) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{E_2^n} \|h(\varepsilon)\|_H^2 &= \int_{E_2^n} \left\| \sum_A w_A(\varepsilon) x_A \right\|_H^2 = \int_{E_2^n} \left\langle \sum_A w_A(\varepsilon) x_A, \sum_B w_B(\varepsilon) x_B \right\rangle d\varepsilon \\ &= \sum_A \sum_B \langle x_A, x_B \rangle \int_{E_2^n} w_A(\varepsilon) w_B(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_A \langle x_A, x_A \rangle \\ &= \sum_A \|x_A\|_H^2. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\|h\|_{L^2(H)}^2 = \sum_A \|x_A\|_H^2.$$

□

5.2 Η ανισότητα του Pisier για την Rademacher προβολή

Η $\text{Rad}_n : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$ με $f \mapsto \text{Rad}_n f$ είναι γραμμικός τελεστής. Όπως θα δούμε, ο Rad_n είναι φραγμένος τελεστής. Σκοπός μας είναι να δώσουμε απόδειξη της εκτίμησης του G. Pisier για τη νόρμα $\|\text{Rad}_n(X)\|$ της Rademacher προβολής Rad_n :

Θεώρημα 5.2.1. Έστω X ένας n -διάστατος χώρος με νόρμα. Αν $f : E_2^n \rightarrow X$, τότε

$$\|\text{Rad}_n f\|_{L^2(X)} \leq c \log n \|f\|_{L^2(X)},$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Δηλαδή, $\|\text{Rad}_n(X)\| \leq c \log n$.

Η απόδειξη θα βασιστεί σε μια σειρά από βοηθητικά αποτελέσματα:

Πρόταση 5.2.2. Έστω X χώρος Banach, $f : E_2^n \rightarrow X$, $g : E_2^n \rightarrow \mathbb{R}$, και $g(\varepsilon) = \sum_A w_A(\varepsilon) c_A$ η αναπαράσταση της g . Τότε:

$$(α) \|f * g\|_{L^2(X)} \leq \|f\|_{L^2(X)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

(β) Αν ο $X = H$ είναι χώρος Hilbert, τότε

$$\|f * g\|_{L^2(H)} \leq \|f\|_{L^2(H)} \max_A |c_A|.$$

(γ) Αν $d(X, H)$ είναι η απόσταση Banach-Mazur του X από έναν χώρο Hilbert H τότε

$$\|f * g\|_{L^2(X)} \leq \|f\|_{L^2(X)} \max_A |c_A| d(X, H).$$

Απόδειξη. (α) Έχουμε $f * g : E_2^n \rightarrow X$. Τότε υπάρχει $\varphi : E_2^n \rightarrow X^*$ τέτοια ώστε $\|\varphi\|_{L^2(X^*)} = 1$ και

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^2(X)} &= \int_{E_2^n} \langle (f * g)(\varepsilon), \varphi(\varepsilon) \rangle d\varepsilon \\ &= \int_{E_2^n} g(\zeta) \int_{E_2^n} \langle f(\varepsilon\zeta), \varphi(\varepsilon) \rangle d\varepsilon d\zeta \\ &\leq \int_{E_2^n} |g(\zeta)| \int_{E_2^n} \|f(\varepsilon\zeta)\|_X \|\varphi(\varepsilon)\|_{X^*} d\varepsilon d\zeta \\ &\leq \int_{E_2^n} |g(\zeta)| \left(\int_{E_2^n} \|f(\varepsilon\zeta)\|_X^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{E_2^n} \|\varphi(\varepsilon)\|_{X^*}^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} d\zeta \\ &= \|f\|_{L^2(X)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι αν $f = \sum_A w_A x_A$, $g = \sum_A c_A w_A$ οι αναπαράστάσεις των f, g αντίστοιχα, τότε $f * g = \sum_A c_A x_A w_A$ αφού

$$\begin{aligned} (f * g)(\varepsilon) &= \int_{E_2^n} f(\varepsilon\zeta) \left(\sum_A w_A(\zeta) c_A \right) d\zeta \\ &= \sum_A \left(\int_{E_2^n} f(\varepsilon\zeta) w_A(\zeta) d\zeta \right) c_A \\ &= \sum_A \left(\int_{E_2^n} f(\varepsilon\zeta) w_A(\varepsilon\zeta) d\zeta \right) c_A w_A(\varepsilon) \\ &= \sum_A x_A c_A w_A(\varepsilon). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.1.7 της προηγούμενης ενότητας, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^2(H)} &= \left(\sum_A \|c_A x_A\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max_A |c_A| \left(\sum_A \|x_A\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\max_A |c_A| \right) \|f\|_{L^2(H)}. \end{aligned}$$

(γ) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $T : X \rightarrow H$ τέτοιος ώστε $\|T\| \|T^{-1}\| \leq (1 + \varepsilon) d(X, H)$.

Αφού $f * g = \sum_A c_A x_A w_A$, ισχύει ότι

$$T[(f * g)(\varepsilon)] = \sum_A w_A(\varepsilon) c_A T x_A.$$

Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L^2(X)} &= \|T^{-1} \circ T \circ (f * g)\|_{L^2(X)} \\
&\leq \|T^{-1}\| \|T \circ (f * g)\|_{L^2(H)} \\
&= \|T^{-1}\| \left(\sum_A \|c_A T x_A\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \max_A |c_A| \|T^{-1}\| \left(\int_{E_2^n} \|T(f(\varepsilon))\|_H^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \max_A |c_A| \|T^{-1}\| \|T\| \left(\int_{E_2^n} \|f(\varepsilon)\|_X^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_{L^2(X)} \max_A |c_A| (1 + \varepsilon) d(X, H).
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 5.2.3. Έχουμε δει ότι $\text{Rad}_n f = f * g$, όπου $g = \sum r_i$. Είναι φανερό ότι $\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{n}$, επομένως το μέρος (α) της Πρότασης 5.2.2 δίνει

$$\|\text{Rad}_n f\| \leq \sqrt{n} \|f\|.$$

Το μέρος (γ) της Πρότασης 5.2.2 δίνει την ίδια εκτίμηση αν $\dim X = n$: Από το Θεώρημα του John, $d(X, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$, και για την $g = \sum r_i$ προφανώς $\max_A |c_A| = 1$. Άρα,

$$\|\text{Rad}_n f\| \leq \sqrt{n} \|f\|.$$

Τέλος, αν ο $X = H$ είναι χώρος Hilbert, το μέρος (β) της Πρότασης 5.2.2 μας εξασφαλίζει ότι

$$\|\text{Rad}_n f\| \leq \|f\|.$$

Για την πολύ ισχυρότερη γενική εκτίμηση που παρέχει το Θεώρημα 5.2.1, ο Pisier συνδυάζει όλες αυτές τις πληροφορίες καθώς και μεθόδους από την κλασική αρμονική ανάλυση.

Πρώτα θα δείξουμε μια κλασική ανισότητα του Bernstein που εκτιμά την $\|Q'\|_\infty$ από την $\|Q\|_\infty$, όπου Q τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n .

Ορισμός 5.2.4. Ο πυρήνας του Fejér F_n είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$F_n(t) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikt}.$$

Οι βασικές ιδιότητες του F_n δίνονται στο Λήμμα που ακολουθεί:

Λήμμα 5.2.5. Αν $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, τότε

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2.$$

Δηλαδή, $F_n(t) \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επίσης, $\|F_n\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_n(t) dt = 1$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \sum_{k=-j}^j e^{ikt}.$$

Θέτουμε $z = e^{it}$, $z \neq 1$. Απλές πράξεις δείχνουν ότι

$$\begin{aligned} (n+1)F_n(t) &= \frac{1}{1-z} \left(\frac{1-\bar{z}^{n+1}}{1-\bar{z}} - \frac{z(1-z^{n+1})}{1-z} \right) \\ &= \frac{2-\bar{z}^{n+1}-z^{n+1}}{|1-z|^2} \\ &= \left(\frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Αφού $F_n \geq 0$, είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned} \|F_n\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1} \right) \int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = 1. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 5.2.6. Ορίζουμε $\psi_n(t) = 2nF_{n-1}(t) \sin(nt)$. Αν Q είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n , τότε

$$Q * \psi_n = -Q'.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε $Q(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}$. Τότε,

$$\begin{aligned} (Q * \psi_n)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2n \left(\sum_{k=-n}^n a_k e^{ik(t-s)} \right) \left(\sum_{l=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|l|}{n} \right) e^{ils} \right) \sin(ns) ds \\ &= \frac{2n}{2\pi} \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt} \sum_{l=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|l|}{n} \right) \int_0^{2\pi} e^{i(l-k)s} \sin(ns) ds. \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα μηδενίζεται, εκτός αν $|l-k| = n$, οπότε

$$\int_0^{2\pi} e^{ins} \sin(ns) ds = - \int_0^{2\pi} e^{-ins} \sin(ns) ds = i\pi.$$

Αφού $|k| \leq n$ και $|l| \leq n-1$, πρέπει να είναι $1 \leq k \leq n$ και $l = k-n$, ή $-n \leq k \leq -1$ και $l = k+n$. Επομένως,

$$\begin{aligned} (Q * \psi_n)(t) &= \frac{n}{\pi} \left(\sum_{k=1}^n a_k e^{ikt} (-i) \pi \left(1 - \frac{n-k}{n}\right) + \sum_{k=-n}^{-1} a_k e^{ikt} i \pi \left(1 - \frac{k+n}{n}\right) \right) \\ &= - \sum_{k \neq 0, |k| \leq n} a_k k i e^{ikt} = -Q'(t). \end{aligned}$$

□

Λήμμα 5.2.7. [ανισότητα του Bernstein] Αν Q είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n , τότε

$$\|Q'\|_{\infty} \leq 2n\|Q\|_{\infty}.$$

Απόδειξη. Από το προηγούμενο Λήμμα, $\|Q'\|_{\infty} = \|Q * \psi_n\|_{\infty}$. Ομως,

$$|(Q * \psi_n)(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q(t-s)| |\psi_n(s)| ds,$$

άρα

$$\|Q * \psi_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{2\pi} \|Q\|_{\infty} \int_0^{2\pi} |\psi_n(s)| ds.$$

Ομως,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi_n(s)| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2n F_{n-1}(s) ds = 2n.$$

Άρα,

$$\|Q'\|_{\infty} \leq 2n\|Q\|_{\infty}.$$

□

Πρόταση 5.2.8. Αν $P(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^k$, $b_k \in \mathbb{C}$, τότε $|P'(0)| \leq 4n \max_{|s| \leq \frac{1}{2}} |P(s)|$.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$Q(s) = P\left(\frac{\sin s}{2}\right) = \sum_{k=0}^n b_k \frac{(\sin s)^k}{2^k}.$$

Το Q είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n , και

$$Q'(0) = \frac{1}{2} P'(0).$$

Από την ανισότητα Bernstein,

$$|Q'(0)| \leq 2n\|Q\|_{\infty} = 2n \max_{|s| \leq \frac{1}{2}} |P(s)|.$$

Άρα,

$$|P'(0)| \leq 4n \max_{|s| \leq \frac{1}{2}} |P(s)|.$$

□

Πρόταση 5.2.9. Εστω $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$. Υπάρχει προσημασμένο μέτρο μ στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ που έχει κύμανση $\|\mu\| \leq 4l$ και ικανοποιεί τις

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t d\mu(t) = 1, \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k d\mu(t) = 0, \quad k = 0, 2, \dots, l.$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_l$ τον χώρο όλων των πολυωνύμων που έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο του l , και θεωρούμε το συναρτησοειδές $F : \mathcal{P}_l \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(p) = p'(0).$$

Τότε, η Πρόταση 5.2.8 μας δίνει

$$|F(p)| = |p'(0)| \leq 4l \max_{t \in [-1/2, 1/2]} |p(t)|, \quad p \in \mathcal{P}_l.$$

Από το θεώρημα Hahn-Banach, το F επεκτείνεται σε $\tilde{F} \in (C[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])^*$ με $\|\tilde{F}\| \leq 4l$.

Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει προσημασμένο μέτρο μ στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ με $\|\mu\| \leq 4l$, το οποίο ικανοποιεί τις

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k d\mu(t) = (t^k)'|_{t=0}, \quad k = 0, 1, \dots, l.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Απόδειξη της ανισότητας του Pisier. Θεωρούμε το μέτρο μ της Πρότασης 5.2.9, και ορίζουμε

$$g(\varepsilon) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^n (1 + tr_i(\varepsilon)) d\mu(t).$$

Παρατηρώντας ότι

$$\prod_{i=1}^n (1 + tr_i(\varepsilon)) = \sum_{k=0}^n t^k \sum_{|A|=k} w_A(\varepsilon),$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
 g(\varepsilon) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^n t^k \sum_{|A|=k} w_A(\varepsilon) d\mu(t) \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k d\mu(t) \right) \sum_{|A|=k} w_A(\varepsilon) \\
 &= \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) + \sum_{k=l+1}^n \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k d\mu(t) \right) \sum_{|A|=k} w_A(\varepsilon),
 \end{aligned}$$

από τις ιδιότητες του μ .

Θέτουμε $g_1(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon)$ και $g_2(\varepsilon) = \sum_{k=l+1}^n \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k d\mu(t) \right) \sum_{|A|=k} w_A(\varepsilon)$, οπότε $g(\varepsilon) = g_1(\varepsilon) + g_2(\varepsilon)$. Τότε,

$$\begin{aligned}
 \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{E_2^n} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^n (1 + tr_i(\varepsilon)) d\mu(t) \right| d\varepsilon \\
 &\leq \int_{E_2^n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^n (1 + tr_i(\varepsilon)) d\mu^+(t) d\varepsilon + \int_{E_2^n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^n (1 + tr_i(\varepsilon)) d\mu^-(t) d\varepsilon \\
 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{E_2^n} \prod_{i=1}^n (1 + tr_i(\varepsilon)) d\varepsilon \right) d|\mu|(t).
 \end{aligned}$$

Όμως,

$$\int_{E_2^n} \prod_{i=1}^n (1 + tr_i(\varepsilon)) d\varepsilon = 1,$$

άρα

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|\mu\| \leq 4l.$$

Επιπλέον, για την g_2 παρατηρούμε ότι αν $g_2 = \sum_A w_A c_A^{g_2} = \sum_{k=l+1}^n \sum_{|A|=k} w_A c_A^{g_2}$ η μοναδική αναπαράσταση της τότε

$$c_A^{g_2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k d\mu(t), \quad k = |A|.$$

Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned}
 \|\text{Rad}_n f\|_{L_2(X)} &= \|f * g_1\|_{L_2(X)} \\
 &= \|f * (g - g_2)\|_{L_2(X)} \\
 &= \|(f * g) - (f * g_2)\|_{L_2(X)} \\
 &\leq \|(f * g)\|_{L_2(X)} + \|(f * g_2)\|_{L_2(X)}.
 \end{aligned}$$

Ομως,

$$\begin{aligned}\|f * g\|_{L_2(X)} &\leq \|f\|_{L_2(X)} \|g\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L_2(X)} \|\mu\| \\ &\leq 4l \|f\|_{L_2(X)},\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\|f * g_2\|_{L_2(X)} &\leq \|f\|_{L_2(X)} \max_A |c_A^{g_2}| d(X, \ell_2^n) \\ &= \|f\|_{L_2(X)} \max_{l < k \leq n} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k d\mu(t) \right| d(X, \ell_2^n) \\ &\leq \|f\|_{L_2(X)} \frac{1}{2^{l+1}} \|\mu\| d(X, \ell_2^n) \\ &\leq \|f\|_{L_2(X)} \frac{4l}{2^{l+1}} d(X, \ell_2^n).\end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$,

$$\|\text{Rad}_n f\|_{L_2(X)} \leq \|f\|_{L_2(X)} \left(4l + 4l \frac{d(X, \ell_2^n)}{2^{l+1}} \right).$$

Επιλέγοντας το l έτσι ώστε $2^l \simeq d(X, \ell_2^n)$, παίρνουμε

$$\|\text{Rad}_n f\|_{L_2(X)} \leq 8l \|f\|_{L_2(X)} \leq c_1 \log d(X, \ell_2^n) \|f\|_{L_2(X)}.$$

Από το θεώρημα του John έχουμε ότι $d(X, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$. Δηλαδή $\log d(X, \ell_2^n) \leq c_2 \log n$. Άρα,

$$\|\text{Rad}_n f\|_{L_2(X)} \leq c \log n \|f\|_{L_2(X)}.$$

□

5.3 Το Λήμμα του Lewis και η ℓ -νόρμα

Ορισμός 5.3.1. Εστω α τυχούσα νόρμα στον $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Μπορούμε πάντα να ορίσουμε μια δυική νόρμα στον $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, θέτοντας

$$\alpha^*(v) = \sup\{\text{tr}(vu) : \alpha(u) \leq 1\}.$$

Λέμε τότε ότι οι α και α^* είναι δυικές ως προς το ίχνος. Το λήμμα του Lewis είναι μια τελείως γενική πρόταση που ισχύει για οποιαδήποτε νόρμα στον $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Πρόταση 5.3.2. Για κάθε νόρμα α στον $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, υπάρχει $u \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ τέτοιος ώστε $\alpha(u) = 1$ και $\alpha^*(u^{-1}) = n$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι $n \leq \alpha(v)\alpha^*(v^{-1})$ για κάθε $v \in GL_n$, αφού

$$\frac{n}{\alpha(v)} = \frac{1}{\alpha(v)} \operatorname{tr}(I_n) = \operatorname{tr}\left(v^{-1} \frac{v}{\alpha(v)}\right) \leq \alpha^*(v^{-1}).$$

Παίρνουμε $u \in GL_n$ με $\alpha(u) \leq 1$ έτσι ώστε $|\det u| = \max\{|\det v| : v \in GL_n, \alpha(v) \leq 1\}$. Τέτοιος u υπάρχει, αφού η ορίζουσα είναι συνεχής συνάρτηση ως προς τη φυσιολογική νόρμα, άρα και ως προς κάθε νόρμα στον $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Είναι επίσης φανερό ότι $\alpha(u) = 1$. Εστω $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, και $v \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ τυχών. Τότε, ο $(u + \varepsilon v)/\alpha(u + \varepsilon v)$ έχει α -νόρμα ίση με 1. Επομένως,

$$|\det(u + \varepsilon v)| \leq (\alpha(u + \varepsilon v))^n |\det u|.$$

Έπεται ότι

$$|\det[u^{-1}(u + \varepsilon v)]|^{\frac{1}{n}} \leq \alpha(u + \varepsilon v),$$

και, αφού η α είναι νόρμα,

$$|\det(I_n + \varepsilon u^{-1}v)|^{\frac{1}{n}} \leq \alpha(u) + \varepsilon \alpha(v) = 1 + \varepsilon \alpha(v).$$

Δηλαδή,

$$\frac{[\det(I_n + \varepsilon u^{-1}v)]^{\frac{1}{n}} - 1}{\varepsilon} \leq \alpha(v),$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0^+$ παίρνουμε

$$\frac{\operatorname{tr}(u^{-1}v)}{n} \leq \alpha(v).$$

Αφού ο v ήταν τυχών, αυτό σημαίνει ότι

$$\alpha^*(u^{-1}) \leq n.$$

□

Θα μελετήσουμε την ℓ -νόρμα στον $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, η οποία ορίστηκε από τους T. Figiel και N. Tomczak-Jaegermann. Έστω $\{e_i\}_{i=1}^n$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι n -διάστατος χώρος με νόρμα, ορίζουμε

$$\ell(u) = \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) u(e_i) \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}$$

για κάθε $u : \ell_2^n \rightarrow X$.

Πρόταση 5.3.3. Η ℓ είναι νόρμα στον $L(\ell_2^n, X)$.

Απόδειξη. (α) Προφανώς $\ell(u) \geq 0$, και αν $\ell(u) = 0$ τότε

$$\left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) u(e_i) \right\|^2 = 0$$

για κάθε $\varepsilon \in E_2^n$, δηλαδή $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(e_i) = 0$ για καθε επιλογή προσήμων ε_i . Τότε όμως $u(e_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$, δηλαδή $u = 0$.

(β) Εστω $\mu \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \ell(\mu u) &= \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) \mu u(e_i) \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\mu| \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) u(e_i) \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\mu| \ell(u). \end{aligned}$$

(γ) Για κάθε $u, v : \ell_2^n \rightarrow X$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \ell(u + v) &= \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) (u + v)(e_i) \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{E_2^n} \left(\left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) u(e_i) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) v(e_i) \right\| \right)^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) u(e_i) \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) v(e_i) \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \ell(u) + \ell(v). \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 5.3.4. Αν $u : \ell_2^n \rightarrow X$ ισομορφισμός, τότε $(u^{-1})^* : \ell_2^n \rightarrow X^*$. Αν λοιπόν $\|\cdot\|_*$ η νόρμα του X^* , έχει νόημα να γράφουμε

$$\ell((u^{-1})^*) = \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) (u^{-1})^*(e_i) \right\|_*^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Οι Figiel και Tomczak-Jaegermann συνέδεσαν το γενικό λήμμα του Lewis με την Rademacher προβολή, δίνοντας εκτίμηση της $\ell((u^{-1})^*)$ μέσω της $\ell^*(u^{-1})$:

Θεώρημα 5.3.5. Εστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ n -διάστατος χώρος με νόρμα. Υπάρχει $u : \ell_2^n \rightarrow X$ τέτοιος ώστε

$$\ell(u) \ell((u^{-1})^*) \leq n \|\text{Rad}_n(X)\|.$$

Απόδειξη. Από το λήμμα του Lewis μπορούμε να βρούμε ισομορφισμό $u : \ell_2^n \rightarrow X$ τέτοιον ώστε $\ell(u) \ell^*(u^{-1}) = n$, όπου

$$\ell^*(u^{-1}) = \sup\{\text{tr}(u^{-1}v) : \ell(v) \leq 1\}.$$

Έχουμε

$$\ell((u^{-1})^*) = \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon)(u^{-1})^*(e_i) \right\|_*^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ορίζουμε $f : E_2^n \rightarrow X^*$ με

$$f(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon)(u^{-1})^*(e_i).$$

Πρόταση 5.1.7, υπάρχει $\varphi : E_2^n \rightarrow X$ με ανάπτυγμα $\varphi(\varepsilon) = \sum_A w_A(\varepsilon)x_A$ και $\|\varphi\|_{L_2(X)} = 1$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \ell((u^{-1})^*) &= \int_{E_2^n} \langle f(\varepsilon), \varphi(\varepsilon) \rangle d\varepsilon \\ &= \int_{E_2^n} \left\langle \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon)(u^{-1})^*(e_i), \sum_A w_A(\varepsilon)x_A \right\rangle d\varepsilon \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_A \left(\int_{E_2^n} r_i(\varepsilon)w_A(\varepsilon) d\varepsilon \right) \langle (u^{-1})^*(e_i), x_A \rangle. \end{aligned}$$

Ομως,

$$\int_{E_2^n} r_i(\varepsilon)w_A(\varepsilon) d\varepsilon = 0$$

αν $A \neq \{i\}$. Άρα,

$$\ell((u^{-1})^*) = \sum_{i=1}^n \langle (u^{-1})^*(e_i), x_{\{i\}} \rangle.$$

Ορίζουμε τώρα $v = \ell_2^n \rightarrow X$, θέτοντας $v(e_i) = x_{\{i\}}$ και επεκτείνοντας γραμμικά. Τότε,

$$\begin{aligned} \ell((u^{-1})^*) &= \sum_{i=1}^n \langle (u^{-1})^*(e_i), v(e_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle e_i, (u^{-1}v)(e_i) \rangle \\ &= \text{tr}(u^{-1}v) \leq \ell^*(u^{-1})\ell(v). \end{aligned}$$

Θα εκτιμήσουμε την $\ell(v)$. Από τον ορισμό έχουμε

$$\begin{aligned}\ell(v) &= \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) v(e_i) \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) x_{\{i\}} \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\text{Rad}_n(\varphi)\|_{L_2(X)} \\ &\leq \|\text{Rad}_n(X)\| \|\varphi\|_{L_2(X)} \\ &= \|\text{Rad}_n(X)\|.\end{aligned}$$

Άρα

$$\ell((u^{-1})^*) \leq \ell^*(u^{-1}) \|\text{Rad}_n(X)\|.$$

Δηλαδή,

$$\ell(u) \ell((u^{-1})^*) \leq \ell(u) \ell^*(u^{-1}) \|\text{Rad}_n(X)\| = n \|\text{Rad}_n(X)\|.$$

□

Στη γλώσσα των κυρτών σωμάτων το προηγούμενο Θεώρημα μεταφράζεται ως εξής:

Θεώρημα 5.3.6. *Εστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ του K τέτοια ώστε*

$$\left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|_{\tilde{K}}^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|_{\tilde{K}^\circ}^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \leq n \|\text{Rad}_X\|.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.3.5 υπάρχει $u : \ell_2^n \rightarrow X$ τέτοιος ώστε

$$\ell(u) \ell((u^{-1})^*) \leq n \|\text{Rad}_X\|.$$

Θέτουμε $\tilde{K} = u^{-1}(K)$. Παρατηρήστε ότι

$$\left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) u(e_i) \right\|_K^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|_{\tilde{K}}^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}$$

και

$$\left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) (u^{-1})^*(e_i) \right\|_{\tilde{K}^\circ}^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|_{\tilde{K}^\circ}^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

5.4 Εκτίμηση του ελάχιστου μέσου πλάτους

Το μέσο πλάτος $w(K)$ ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K μπορεί να εκφραστεί στην μορφή

$$w(K) = c_n \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \right\|_* d\omega, (*)$$

όπου $\|\cdot\|$ η νόρμα που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το K , $\{e_i\}$ σταθερή ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, και $\{g_i\}$ ανεξάρτητες standard κανονικές τυχαίες μεταβλητές. Για τον σκοπό μας είναι προτιμότερο να δούμε την απόδειξη της ακόλουθης ανισότητας (η απόδειξη της $(*)$ είναι εντελώς ανάλογη):

Πρόταση 5.4.1. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ n -διάστατος χώρος Banach και K η μοναδιαία του μπάλα. Αν g_i είναι ανεξάρτητες standard κανονικές τυχαίες μεταβλητές $i = 1, 2, \dots, n$, τότε

$$w(K^\circ) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \right\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \right\|^2 d\omega &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|^2 e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx \\ &= \frac{n\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-1} \|r\vartheta\|^2 e^{-\frac{r^2}{2}} dr \sigma(d\vartheta) \\ &= \frac{n\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|^2 \sigma(d\vartheta) \int_0^\infty r^{n+1} e^{-\frac{r^2}{2}} dr \\ &= \frac{n\omega_n 2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|^2 \sigma(d\vartheta) \\ &\geq n \left(\int_{S^{n-1}} \|\vartheta\| \sigma(d\vartheta) \right)^2. \end{aligned}$$

□

Η πρόταση που ακολουθεί είναι γνωστή σαν Λήμμα των Maurey-Pisier, και μας επιτρέπει να περάσουμε από τις κανονικές σε Rademacher τυχαίες μεταβλητές:

Πρόταση 5.4.2. Για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$, αν g_i είναι ανεξάρτητες standard κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε κάποιον χώρο πιθανότητας Ω και r_i είναι οι Rademacher συναρτήσεις

στον E_2^n , ισχύει ότι

$$\begin{aligned} c \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \right\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_1 \sqrt{\log n} \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Για την πρώτη ανισότητα παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\int_{\Omega} |g_i(\omega)| d\omega = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) \left(\int_{\Omega} |g_i(\omega)| d\omega \right) e_i \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{E_2^n} \left\| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) |g_i(\omega)| e_i d\omega \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{E_2^n} \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) |g_i(\omega)| e_i \right\|^2 d\omega d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \right\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

αν πάρουμε υπόψη μας το γεγονός ότι οι g_i στον Ω και οι $r_i |g_i|$ στον $E_2^n \times \Omega$ έχουν την ίδια κατανομή.

Για τη δεύτερη ανισότητα τώρα, θέτουμε $h_i = g_i \chi_{\{|g_i| \leq \lambda\}}$ και $h'_i = g_i \chi_{\{|g_i| > \lambda\}}$ για $\lambda > 1$ το οποίο θα επιλέξουμε αργότερα. Άρα, $g_i = h_i + h'_i$ και

$$\left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \right\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n h_i(\omega) e_i \right\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n h'_i(\omega) e_i \right\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ορίζουμε $f : [-\lambda, \lambda]^n \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(t_1, \dots, t_n) = \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) t_i e_i \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι κυρτή, επομένως η μέγιστη τιμή της παίρνεται σε κορυφή

του $[-\lambda, \lambda]^n$. Ακόμα, η f είναι άρτια και η τιμή της σε όλες τις κορυφές είναι η ίδια. Άρα,

$$f(t_1, \dots, t_n) \leq f(\lambda, \dots, \lambda) = \lambda \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Λόγω της ανεξαρτησίας και συμμετρίας των h_i , οι h_i και $r_i h_i$ έχουν την ίδια κατανομή στους Ω και $E_2^n \times \Omega$ αντίστοιχα. Επομένως,

$$(5.4.1) \quad \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n h_i(\omega) e_i \right\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) h_i(\omega) e_i \right\|^2 d\varepsilon \right) d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \left(\int_{E_2^n} \lambda^2 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Για να εκτιμήσουμε το $\left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n h'_i(\omega) e_i \right\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$ θα υποθέσουμε πρώτα ότι η νόρμα δίνεται από εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή ότι βρισκόμαστε σε χώρο Hilbert. Τότε, πάλι λόγω ανεξαρτησίας και συμμετρίας των h'_i έχουμε

$$\left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n h'_i(\omega) e_i \right\|_H^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |h'_i(\omega)|^2 \|e_i\|_H^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ = \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} |h'_i(\omega)|^2 d\omega \right) \|e_i\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Θέτουμε $I_1 = \int_{\Omega} |h'_i(\omega)|^2 d\omega$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{4} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} < t e^{-\frac{t^2}{4}}$ για $t > 1$. Επομένως,

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} 4 \int_{\lambda}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{4}} dt \\ = \frac{16}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\lambda^2}{4}}^{\infty} e^{-s} ds = \frac{16}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

Αντικαθιστούμε και, χρησιμοποιώντας την συμμετρία των h'_i και τον κανόνα του παραλληλο-

γράμμου, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n h'_i(\omega) e_i \right\|_H^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{i=1}^n I_1 \|e_i\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c e^{-\frac{\lambda^2}{c'}} \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= c e^{-\frac{\lambda^2}{c'}} \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|_H^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας πάλι τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Αν τώρα ο χώρος είναι χώρος Banach, υπάρχει $u : \ell_2^n \rightarrow X$ με $\|u\| \|u^{-1}\| = d(X, \ell_2^n)$, οπότε (ανάλογα με την απόδειξη της (*))

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n h'_i(\omega) e_i \right\|_X^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{\Omega} \left\| u \left(\sum_{i=1}^n h'_i(\omega) u^{-1}(e_i) \right) \right\|_X^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\| \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n h'_i(\omega) u^{-1}(e_i) \right\|_{\ell_2^n}^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\| \|u^{-1}\| \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n h'_i(\omega) e_i \right\|_X^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\| \|u^{-1}\| c e^{-\frac{\lambda^2}{c'}} \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|_X^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= d(X, \ell_2^n) c e^{-\frac{\lambda^2}{c'}} \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|_X^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να εκτιμήσουμε το

$$\left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \right\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\lambda + d(X, \ell_2^n) c e^{-\frac{\lambda^2}{c'}} \right) \left\| \sum_{i=1}^n r_i e_i \right\|_{L_2(X)}.$$

Διαλέγουμε το λ έτσι ώστε $d(X, \ell_2^n) = e^{\frac{\lambda^2}{c'}}$. Τότε

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \right\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} &\leq c \sqrt{\log d(X, \ell_2^n)} \left\| \sum_{i=1}^n r_i e_i \right\|_{L_2(X; E_2^n)} \\ &\leq c_1 \sqrt{\log n} \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

Συνδυάζοντας τις δύο προτάσεις, παίρνουμε την εκτίμηση για το ελάχιστο μέσο πλάτος:

Θεώρημα 5.4.3. *Αν K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, υπάρχει γραμμική εικόνα του $\tilde{K}$ με όγκο $|\tilde{K}| = 1$ και μέσο πλάτος*

$$w(\tilde{K}) \leq c \sqrt{n} \|\text{Rad}_n(X)\| \log n,$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 5.4.1 γνωρίζουμε ότι

$$w(K^\circ) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \right\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}},$$

και από την Πρόταση 5.4.2,

$$\left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \right\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_1 \sqrt{\log n} \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Άρα

$$w(K^\circ) \leq \frac{c_1 \sqrt{\log n}}{\sqrt{n}} \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ομοια,

$$w(K) \leq \frac{c_1 \sqrt{\log n}}{\sqrt{n}} \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|_*^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Το ίδιο ισχύει για κάθε γραμμική εικόνα του K και το πολικό της (οι νόρμες βέβαια είναι αυτές που ορίζονται από τα δύο σώματα). Αν u η απεικόνιση του λήμματος του Lewis και $\tilde{K} = u^{-1}(K)$, $\tilde{K}^\circ = u^*(K)$, τότε

$$\begin{aligned} w(\tilde{K})w(\tilde{K}^\circ) &\leq \frac{c_1^2 \log n}{n} \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|_{\tilde{K}}^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) e_i \right\|_{(\tilde{K})^\circ}^2 d\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_1^2 c \log n \|\text{Rad}_n(X)\|. \end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι $|\tilde{K}| = 1$ μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned} w(\tilde{K}^\circ) &= 2 \int_{S^{n-1}} \|\vartheta\| \sigma(d\vartheta) \\ &\geq 2 \left(\int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|^{-n} \sigma(d\vartheta) \right)^{-1/n} \\ &= 2 \left(\frac{|D_n|}{|\tilde{K}|} \right)^{1/n} \\ &\geq \frac{c_3}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\frac{c_3}{\sqrt{n}} w(\tilde{K}) \leq w(\tilde{K}) w(\tilde{K}^\circ) \leq c_2 \log n \|\text{Rad}_n(X)\|,$$

δηλαδή

$$w(\tilde{K}) \leq c_4 \sqrt{n} \log n \|\text{Rad}_n(X)\|.$$

□

Η εκτίμηση του Pisier για την $\|\text{Rad}_n(X)\|$ μας δίνει μια πολύ καλή εκτίμηση για το ελάχιστο μέσο πλάτος:

Πόρισμα 5.4.4. Κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ έχει γραμμική εικόνα K με όγκο 1 και μέσο πλάτος $w(K) \leq c \sqrt{n} \log^2 n$.

Μπορεί μάλιστα κανείς να δείξει ότι ο ένας από τους δύο λογαρίθμους στο παραπάνω πόρισμα δεν είναι απαραίτητος. Αυτό που θα δούμε στη συνέχεια είναι ότι ούτε και η συμμετρία του K είναι απαραίτητη:

Θεώρημα 5.4.5. Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $o \in \text{int}(K)$. Υπάρχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ του K με όγκο 1, τέτοια ώστε

$$w(\tilde{K}) \leq c \sqrt{n} \log n.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σώμα διαφορών $K - K$ του K . Υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός T του $\mathbb{R}^n$ τέτοιος ώστε $|T(K - K)| = 1$ και

$$w(T(K - K)) \leq c \sqrt{n} \log n.$$

Παρατηρούμε ότι $T(K - K) = TK - TK$, και

$$\begin{aligned} w(TK - TK) &= 2 \int_{S^{n-1}} h_{TK-TK}(u) \sigma(du) \\ &= 2 \int_{S^{n-1}} [h_{TK}(u) + h_{-TK}(u)] \sigma(du) \\ &= 2 \int_{S^{n-1}} [h_{TK}(u) + h_{TK}(-u)] \sigma(du) \\ &= 2w(TK). \end{aligned}$$

Επίσης, από την ανισότητα των Rogers και Shephard, έχουμε

$$|TK| \geq 4^{-n} |TK - TK| = 4^{-n}.$$

Άρα, υπάρχει $c_1 \leq 4$ τέτοια ώστε το $\tilde{K} = c_1 TK$ να έχει όγκο 1. Σύμφωνα με τα παραπάνω,

$$w(\tilde{K}) \leq 4w(TK) \leq 2c \sqrt{n} \log n.$$

□

Παρατήρηση 5.4.6. Το μέσο πλάτος ενός κυρτού σώματος είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι ο T στο Θεώρημα 5.4.5 είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

5.5 Η θέση ελαχίστου μέσου πλάτους

Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ (χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $o \in \text{int}K$). Λέμε ότι το K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν $w(K) \leq w(TK)$ για κάθε $T \in SL_n$. Ένα απλό επιχείρημα συμπίεσης δείχνει ότι μέσα σε κάθε κλάση γραμμικά ισοδύναμων σωμάτων με τον ίδιο όγκο, υπάρχει αντιπρόσωπος με ελάχιστο μέσο πλάτος. Σκοπός μας είναι να βρούμε αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε το K να έχει ελάχιστο μέσο πλάτος. Για απλότητα υποθέτουμε ότι η h_K είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι το K είναι γνήσια κυρτό (λέμε τότε ότι το K είναι λείο).

Θεώρημα 5.5.1. Ένα λείο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν και μόνο αν

$$(5.5.1) \quad \int_{S^{n-1}} \langle \nabla h_K(u), Tu \rangle \sigma(du) = \frac{\text{tr} T}{2n} w(K)$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Επιπλέον, αυτή η θέση ελαχίστου μέσου πλάτους είναι μοναδική αν εξαιρέσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος. Έστω $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ και $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό. Τότε, ο $(I + \varepsilon T)^* / [\det(I + \varepsilon T)]^{1/n}$ διατηρεί τους όγκους, επομένως

$$\int_{S^{n-1}} h_K(u + \varepsilon Tu) \sigma(du) \geq [\det(I + \varepsilon T)]^{1/n} \int_{S^{n-1}} h_K(u) \sigma(du).$$

Όμως, $h_K(u + \varepsilon Tu) = h_K(u) + \varepsilon \langle \nabla h_K(u), Tu \rangle + O(\varepsilon^2)$ και $[\det(I + \varepsilon T)]^{1/n} = 1 + \varepsilon \frac{\text{tr} T}{n} + O(\varepsilon^2)$, οπότε αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0^+$ παίρνουμε

$$(5.5.2) \quad \int_{S^{n-1}} \langle \nabla h_K(u), Tu \rangle \sigma(du) \geq \frac{\text{tr} T}{2n} w(K).$$

Αντικαθιστώντας τον T με $-T$ στην (5.5.2), βλέπουμε ότι ισχύει ισότητα στην (5.5.1) για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η (*) ισχύει. Θεωρούμε $T \in SL_n$, και χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο T^* είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Τότε,

$$w(TK) = 2 \int_{S^{n-1}} h_{TK}(u) \sigma(du) = 2 \int_{S^{n-1}} h_K(T^*u) \sigma(du).$$

Όμως, το $\nabla h_K(u)$ είναι το μοναδικό σημείο του συνόρου του K στο οποίο το u είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του K . Ειδικότερα, $\nabla h_K(u) \in K$, και αυτό έχει σαν συνέπεια την

$$\langle \nabla h_K(u), z \rangle \leq h_K(z)$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Έπεται ότι

$$w(TK) \geq 2 \int_{S^{n-1}} \langle \nabla h_K(u), T^*u \rangle \sigma(du) = \frac{\text{tr} T^*}{n} w(K) \geq w(K).$$

Αυτό δείχνει ότι το K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος. Επιπλέον, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, μπορούμε να έχουμε ισότητα μόνο αν ο T είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Αυτό αποδεικνύει την μοναδικότητα της θέσης ελάχιστου μέσου πλάτους αν εξαιρέσουμε $U \in O(n)$. $\square$

Θεωρούμε το μέτρο ν_K στην S^{n-1} με πυκνότητα h_K ως προς το σ . Θα αποδείξουμε ότι ένα λείο κυρτό σώμα K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν και μόνο αν το ν_K είναι ισοτροπικό, δηλαδή αν το $\int_{S^{n-1}} \langle u, \vartheta \rangle^2 \nu_K(du)$ είναι ανεξάρτητο από το $\vartheta \in S^{n-1}$.

Για τον σκοπό αυτό δίνουμε πρώτα μερικούς ορισμούς. Εστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Γράφουμε $\hat{f}$ για τον περιορισμό της f στην S^{n-1} . Αν μια συνάρτηση F είναι ορισμένη στην S^{n-1} , η ακτινική επέκταση f της F στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ορίζεται μέσω της $f(x) = F(x/|x|)$. Αν η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στην S^{n-1} , ορίζουμε

$$\Delta_\circ F = \widehat{\Delta f} \quad \text{και} \quad \nabla_\circ F = \widehat{\nabla f},$$

όπου f είναι η ακτινική επέκταση της F . Ο $\Delta_\circ$ είναι ο τελεστής Laplace-Beltrami. Από τον τύπο του Green έχουμε

$$\int_{S^{n-1}} F \Delta_\circ G = \int_{S^{n-1}} G \Delta_\circ F = - \int_{S^{n-1}} \langle \nabla_\circ F, \nabla_\circ G \rangle.$$

Λήμμα 5.5.2. Έστω K λείο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$I_K(\vartheta) = \int_{S^{n-1}} \langle \nabla h_K(u), \vartheta \rangle \langle u, \vartheta \rangle \sigma(du) \quad , \quad \vartheta \in S^{n-1}.$$

Τότε,

$$\frac{w(K)}{2} + I_K(\vartheta) = (n+1) \int_{S^{n-1}} h_K(u) \langle u, \vartheta \rangle^2 \sigma(du)$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$.

Απόδειξη. Για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \langle x, \vartheta \rangle^2 / 2$. Άμεσος υπολογισμός δείχνει ότι

$$(5.5.3) \quad (\nabla \circ \hat{f})(u) = \langle u, \vartheta \rangle \vartheta - \langle u, \vartheta \rangle^2 u$$

και

$$(5.5.4) \quad (\Delta \circ \hat{f})(u) = 1 - n \langle u, \vartheta \rangle^2.$$

Αφού η h_K είναι θετικά ομογενής βαθμού 1, έχουμε $(\nabla \circ \hat{h}_K)(u) = \nabla h_K(u) - h_K(u)u$ και $h_K(u) = \langle \nabla h_K(u), u \rangle$, $u \in S^{n-1}$. Από την (5.5.3) προκύπτει ότι

$$\langle (\nabla \circ \hat{f})(u), (\nabla \circ \hat{h}_K)(u) \rangle = \langle \nabla h_K(u), \vartheta \rangle \langle u, \vartheta \rangle - h_K(u) \langle u, \vartheta \rangle^2.$$

Ολοκληρώνοντας πάνω στη σφαίρα και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green, βλέπουμε ότι

$$I_K(\vartheta) - \int_{S^{n-1}} h_K(u) \langle u, \vartheta \rangle^2 \sigma(du) = - \int_{S^{n-1}} h_K(u) (\Delta \circ \hat{f})(u) \sigma(du),$$

το οποίο είναι ίσο με

$$-\frac{w(K)}{2} + n \int_{S^{n-1}} h_K(u) \langle u, \vartheta \rangle^2 \sigma(du)$$

λόγω της (5.5.4). □

Θεώρημα 5.5.3. Ένα λείο κυρτό σώμα K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν και μόνο αν

$$\int_{S^{n-1}} h_K(u) \langle u, \vartheta \rangle^2 \sigma(du) = \frac{w(K)}{2n}$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ (ισοδύναμα, αν το v_K είναι ισοτροπικό).

Περιγραφή της απόδειξης. Εύκολα ελέγχουμε ότι η ισότητα του Θεωρήματος 5.5.1 ισχύει για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ αν και μόνο αν

$$I_K(\vartheta) = \frac{w(K)}{2n}$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Το ζητούμενο είναι τώρα συνέπεια του Θεωρήματος 5.5.1 και του Λήμματος 5.5.2. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ανισότητα Santaló και ανισότητα Bourgain-Milman

6.1 Γινόμενο όγκων

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Το γινόμενο όγκων του K είναι η ποσότητα

$$p(K) := |K| \cdot |K^\circ|.$$

Παρατηρήστε ότι το γινόμενο όγκων είναι αναλλοίωτο ως προς αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς: αν $T \in GL(n)$ τότε $[T(K)]^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ)$, άρα

$$p(T(K)) = |T(K)| \cdot |(T^{-1})^*(K^\circ)| = p(K) |\det T| \cdot |\det(T^{-1})^*| = p(K).$$

Η κλασική ανισότητα Blaschke–Santaló ισχυρίζεται ότι, ανάμεσα σε όλα τα συμμετρικά κυρτά σώματα, η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα (και όλα τα ελλειψοειδή) έχουν μέγιστο γινόμενο όγκων.

Θεώρημα 6.1.1 (ανισότητα Blaschke–Santaló). Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$|K||K^\circ| \leq |B_2^n|^2.$$

Στην Ενότητα 6.2 περιγράφουμε μια απόδειξη αυτής της ανισότητας. Οφείλεται στους Meyer–Pajor και χρησιμοποιεί τη μέθοδο της Steiner συμμετρικοποίησης.

Το πρόβλημα του ελαχίστου παραμένει ανοιχτό. Σύμφωνα με την *εικασία του Mahler*, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$(6.1.1) \quad |K||K^\circ| \geq \frac{4^n}{n!}.$$

Αν το ελάχιστο είναι όντως αυτό, τότε έχουμε ισότητα στην (6.1.1) αν το K είναι κύβος

(και σε μερικές ακόμα περιπτώσεις). Η εικασία του Mahler έχει επαληθευτεί για κάποιες ειδικές κλάσεις σωμάτων: τα ζωνοειδή και τα σώματα που είναι συμμετρικά ως προς τα κύρια υπερεπίπεδα.

Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι αν η εικασία του Mahler είναι σωστή, τότε για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\frac{c_1}{n} \leq \frac{4}{(n!)^{1/n}} \leq s(K) := (|K||K^\circ|)^{\frac{1}{n}} \leq |B_2^n|^{2/n} \leq \frac{c_2}{n}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Στην Ενότητα 6.3 θα δούμε ότι η ασθενέστερη αυτή μορφή της εικασίας είναι σωστή: η ποσότητα $s(K)$ είναι της τάξης του $1/n$ για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 6.1.2 (ανισότητα Bourgain-Milman). Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\frac{c_1}{n} \leq (|K||K^\circ|)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{c_2}{n},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.2 βασίζεται στην «ισομορφική συμμετρικοποίηση» και χρησιμοποιεί διάφορα εργαλεία της ασυμπτωτικής θεωρίας χώρων πεπερασμένης διάστασης (αριθμούς κάλυψης, εκτιμήσεις όγκων, ανισότητα του Pisier). Οι ίδιες ιδέες οδηγούν στην αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski του V. Milman, την οποία αποδεικνύουμε στην Ενότητα 6.4.

Θεώρημα 6.1.3. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει $U_K \in SL(n)$ ώστε: αν K_1, K_2 είναι συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και $t > 0$, τότε

$$|U_{K_1}(K_1) + tU_{K_2}(K_2)|^{1/n} \leq C(|K_1|^{1/n} + t|K_2|^{1/n}),$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

6.2 Ανισότητα Blaschke-Santaló

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\vartheta \in S^{n-1}$. Γράφουμε $P_{\vartheta^\perp}(K)$ για την ορθογώνια προβολή του K στον $\vartheta^\perp$ και ορίζουμε δύο συναρτήσεις $f, g : P_{\vartheta^\perp}(K) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \min\{t \in \mathbb{R} : x + t\vartheta \in K\} \quad \text{και} \quad g(x) = \max\{t \in \mathbb{R} : x + t\vartheta \in K\}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι κυρτή, η g είναι κοίλη και

$$K = \{x + t\vartheta : x \in P_{\vartheta^\perp}(K), f(x) \leq t \leq g(x)\}.$$

Ορίζουμε τώρα την Steiner συμμετρικοποίηση του K στη διεύθυνση του ϑ ως εξής:

$$S_{\vartheta}(K) = \left\{ x + t\vartheta : x \in P_{\vartheta^{\perp}}(K), |t| \leq \frac{g(x) - f(x)}{2} \right\}.$$

Δηλαδή, για κάθε $x \in P_{\vartheta^{\perp}}(K)$ θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στο ϑ με μήκος $g(x) - f(x)$ και μέσο το x , και παίρνουμε την ένωση όλων αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων.

Από τον ορισμό του, το $S_{\vartheta}(K)$ είναι συμμετρικό ως προς $\vartheta^{\perp}$ (αυτή η παρατήρηση δικαιολογεί τον όρο «συμμετρικοποίηση»). Οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού S_{ϑ} περιγράφονται στο επόμενο λήμμα:

Λήμμα 6.2.1. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\vartheta \in S^{n-1}$. Τότε, το $S_{\vartheta}(K)$ είναι κυρτό σώμα και $|S_{\vartheta}(K)| = |K|$.

Έστω K, L μη κενά, συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Η απόσταση Hausdorff των K και L είναι ο αριθμός

$$d_H(K, L) = \min\{\lambda \geq 0 : K \subseteq L + \lambda B_2^n \text{ και } L \subseteq K + \lambda B_2^n\}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η d_H είναι μετρική. Επιπλέον, διαδοχικές Steiner συμμετρικοποιήσεις φέρνουν οποιοδήποτε κυρτό σώμα οσοδήποτε κοντά σε Ευκλείδεια μπάλα.

Θεώρημα 6.2.2. Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την κλάση όλων των διαδοχικών Steiner συμμετρικοποιήσεων του K

$$\mathcal{S}(K) = \{S_{\vartheta_m} \circ \cdots \circ S_{\vartheta_1}(K) : \vartheta_i \in S^{n-1}, m \in \mathbb{N}\}.$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $C \in \mathcal{S}(K)$ τέτοιο ώστε $d_H(C, \rho B_2^n) < \varepsilon$, όπου $\rho = (|K|/|B_2^n|)^{1/n}$.

Το Θεώρημα 6.2.2 ανάγει την απόδειξη της ανισότητας Blaschke–Santaló στο εξής.

Θεώρημα 6.2.3 (Meyer–Pajor). Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\vartheta \in S^{n-1}$. Αν $K_1 = S_{\vartheta}(K)$ είναι η Steiner συμμετρικοποίηση του K στη διεύθυνση του ϑ , τότε

$$|K||K^{\circ}| \leq |K_1||K_1^{\circ}|.$$

Απόδειξη. Αφού η συμμετρικοποίηση Steiner διατηρεί τους όγκους, αρκεί να δείξουμε ότι $|K^{\circ}| \leq |K_1^{\circ}|$.

Για ευκολία υποθέτουμε ότι $\vartheta^{\perp} = \mathbb{R}^{n-1}$. Από τον ορισμό της συμμετρικοποίησης μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$S_{\vartheta}(K) = K_1 = \left\{ \left(x, \frac{t_1 - t_2}{2} \right) : x \in P_{\vartheta^{\perp}}K, (x, t_1) \in K, (x, t_2) \in K \right\}.$$

Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$ γράφουμε

$$A(t) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, t) \in A\}.$$

Ισχυρισμός 6.2.4. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\frac{K^\circ(s) + K^\circ(-s)}{2} \subseteq K_1^\circ(s).$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Έστω $y_1 \in K^\circ(s)$ και $y_2 \in K^\circ(-s)$. Αυτό σημαίνει ότι $(y_1, s) \in K^\circ$ και $(y_2, -s) \in K^\circ$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $(y_1 + y_2)/2 \in K_1^\circ(s)$, δηλαδή ότι $(\frac{y_1 + y_2}{2}, s) \in K_1^\circ$.

Έστω $(x, \frac{t_1 - t_2}{2}) \in K_1$, δηλαδή $(x, t_1) \in K$ και $(x, t_2) \in K$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\langle (x, \frac{t_1 - t_2}{2}), (\frac{y_1 + y_2}{2}, s) \rangle \leq 1.$$

Όμως, η ποσότητα αυτή είναι ίση με

$$\langle x, \frac{y_1 + y_2}{2} \rangle + \frac{st_1 - st_2}{2} = \frac{\langle (x, t_1), (y_1, s) \rangle + \langle (x, t_2), (y_2, -s) \rangle}{2} \leq 1.$$

□

Συνέχεια της απόδειξης του θεωρήματος. Από την ανισότητα Brunn-Minkowski,

$$|K_1^\circ(s)| \geq |K^\circ(s)|^{1/2} |K^\circ(-s)|^{1/2}.$$

Από τη συμμετρία του K° έχουμε $K^\circ(-s) = -K^\circ(s)$, άρα $|K^\circ(s)| = |K^\circ(-s)|$. Συνεπώς,

$$|K_1^\circ(s)| \geq |K^\circ(s)|$$

για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Με ολοκλήρωση συμπεραίνουμε ότι

$$|K_1^\circ| = \int_{-\infty}^{+\infty} |K_1^\circ(s)| ds \geq \int_{-\infty}^{+\infty} |K^\circ(s)| ds = |K^\circ|.$$

□

Θεώρημα 6.2.5 (ανισότητα Blaschke-Santaló). Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$|K||K^\circ| \leq |B_2^n|^2.$$

Απόδειξη. Έστω $S(K)$ η κλάση όλων των διαδοχικών Steiner συμμετριοποιήσεων του K . Με διαδοχικές εφαρμογές του Θεωρήματος 6.2.3 βλέπουμε ότι

$$|K||K^\circ| \leq |C||C^\circ|$$

για κάθε $C \in S(K)$. Από το Θεώρημα 6.2.2 υπάρχει ακολουθία $\{C_m\}$ στοιχείων της $S(K)$ με $d_H(C_m, \rho B_2^n) \rightarrow 0$, όπου $\rho = (|K|/|B_2^n|)^{1/n}$. Τότε, $d_H(C_m^\circ, (\rho B_2^n)^\circ) \rightarrow 0$ και από τη συνέχεια του όγκου ως προς την Hausdorff μετρική παίρνουμε

$$|K||K^\circ| \leq \lim_m |C_m||C_m^\circ| = |\rho B_2^n| |(\rho B_2^n)^\circ| = |B_2^n|^2.$$

□

6.3 Ισομορφική συμμετρικοποίηση και αντίστροφη ανισότητα Santaló

Σε αυτήν την ενότητα αποδεικνύουμε την αντίστροφη ανισότητα Santaló. Θέτουμε

$$s(K) := p(K)^{1/n} = (|K||K^\circ|)^{1/n}.$$

Θεώρημα 6.3.1 (Bourgain–Milman). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,*

$$s(K) \geq cs(B_2^n).$$

6.3.1 Βοηθητικές Προτάσεις

Θα χρησιμοποιήσουμε μια σειρά από εκτιμήσεις όγκων οι οποίες βασίζονται στους αριθμούς κάλυψης. Για την απόδειξη του θεωρήματος, αυτές οι εκτιμήσεις θα συνδυαστούν με την ανισότητα του Sudakov και τη δυϊκή της.

Λήμμα 6.3.2. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $s > 0$,*

$$|K| \leq N(K, sB_2^n) \cdot |K \cap sB_2^n|.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του αριθμού κάλυψης $N = N(K, sB_2^n)$ υπάρχουν $x_1, \dots, x_N \in K$ ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^N (x_i + sB_2^n)$, δηλαδή

$$K = \bigcup_{i=1}^N [(x_i + sB_2^n) \cap K].$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = |(x + sB_2^n) \cap K|^{1/n}$. Η f είναι άρτια και κοίλη στον φορέα της (δηλαδή στο $K - K$), άρα $\|f\|_\infty = f(0)$. Έπεται ότι

$$|(x_i + sB_2^n) \cap K| \leq |sB_2^n \cap K|, \quad i = 1, \dots, N.$$

Αθροίζοντας ως προς $i = 1, \dots, N$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} |K| &= \left| \bigcup_{i=1}^N [(x_i + sB_2^n) \cap K] \right| \leq \sum_{i=1}^N |(x_i + sB_2^n) \cap K| \\ &\leq N(K, sB_2^n) \cdot |K \cap sB_2^n|. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 6.3.3. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $B_2^n \subseteq bK$ για*

κάποιο $b \geq 1$. Τότε, για κάθε $s \geq 1$,

$$\left| \text{conv} \left(K \cup \frac{1}{s} B_2^n \right) \right| \leq cnb N(B_2^n, sK) |K|.$$

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι $N := N(B_2^n, sK) = N((1/s)B_2^n, K)$. Από τον ορισμό του N υπάρχουν $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\frac{1}{s} B_2^n \subseteq \bigcup_{i=1}^N (x_i + K).$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(x_i + K) \cap \frac{1}{s} B_2^n \neq \emptyset$, οπότε $x_i \in \frac{1}{s} B_2^n + K$ και από την $B_2^n \subseteq bK$ έπεται ότι $x_i \in \left(1 + \frac{b}{s}\right) K$ για κάθε $i = 1, \dots, N$.

Αν $0 \leq \alpha \leq 1$ και $\alpha + \beta = 1$, τότε

$$\begin{aligned} \alpha \left(\frac{1}{s} B_2^n \right) + \beta K &\subseteq \bigcup_{i=1}^N (\alpha x_i + \alpha K) + \beta K = \bigcup_{i=1}^N (\alpha x_i + (\alpha + \beta)K) \\ &= \bigcup_{i=1}^N (\alpha x_i + K). \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της κυρτής θήκης έχουμε ότι:

$$\text{conv} \left(\frac{1}{s} B_2^n \cup K \right) \subseteq \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha x_i + K).$$

Θεωρούμε $[2nb] + 1$ το πλήθος αριθμούς α_j , οι οποίοι είναι ισοκατανεμημένοι στο διάστημα $[0, 1]$. Για κάθε $z \in \text{conv} \left(\frac{1}{s} B_2^n \cup K \right)$ υπάρχουν α, α_j ώστε $|\alpha - \alpha_j| \leq \frac{1}{2bn}$ και

$$z \in \alpha x_i + K = (\alpha - \alpha_j) x_i + \alpha_j x_i + K,$$

άρα

$$z \in \alpha_j x_i + \left(\frac{1 + \frac{b}{s}}{2bn} + 1 \right) K.$$

Όμως $\frac{s+b}{2nbs} \leq \frac{1}{n}$, άρα

$$z \in \alpha_j x_i + \left(1 + \frac{1}{n} \right) K.$$

Έπεται ότι

$$\text{conv} \left(\frac{1}{s} B_2^n \cup K \right) \subseteq \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{j=1}^{[2bn]+1} \left\{ \alpha_j x_i + \left(1 + \frac{1}{n} \right) K \right\}.$$

Άρα,

$$\left| \text{conv} \left(\frac{1}{s} B_2^n \cup K \right) \right| \leq cbn N \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n |K| \leq cebn N(B_2^n, sK) |K|,$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Το επόμενο λήμμα περιγράφει το πολικό σώμα της τομής ή της κυρτής θήκης δύο συμμετρικών κυρτών σωμάτων. Για την απόδειξη χρησιμοποιήστε τους ορισμούς και κατάλληλο διαχωριστικό θεώρημα στον $\mathbb{R}^n$.

Λήμμα 6.3.4. Έστω A και B συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$(\alpha) [\operatorname{conv}(A \cup B)]^\circ = A^\circ \cap B^\circ.$$

$$(\beta) (A \cap B)^\circ = \operatorname{conv}(A^\circ \cup B^\circ).$$

Τέλος, θα χρειαστούμε ένα άνω φράγμα για την ποσότητα $b(K) = \max\{\|x\|_K : x \in S^{n-1}\}$ συναρτήσει της παραμέτρου $M(K)$.

Λήμμα 6.3.5. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $a(K), b(K)$ είναι οι μικρότεροι θετικοί αριθμοί για τους οποίους

$$\frac{1}{b(K)}\|x\|_K \leq |x| \leq a\|x\|_K$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, τότε $M(K) \leq b(K) \leq c\sqrt{n}M(K)$. Ειδικότερα, αν $M(K) = 1$ έχουμε $1 \leq b(K) \leq c\sqrt{n}$.

Απόδειξη. Για την αριστερή ανισότητα παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{b(K)} \int_{S^{n-1}} \|x\|_K d\sigma(x) \leq \int_{S^{n-1}} \|x\|_2 d\sigma(x) = 1,$$

δηλαδή $M(K) \leq b(K)$.

Για τη δεξιά ανισότητα θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής.

Ισχυρισμός 6.3.6. Αν $x_1, \dots, x_n \in X$ και $k \leq n$, τότε

$$\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^k g_i(\omega)x_i \right\| d\omega \leq \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega)x_i \right\| d\omega.$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Αρκεί να δείξουμε τον ισχυρισμό για $n = k + 1$. Γράφουμε

$$2 \sum_{i=1}^k g_i(\omega)x_i = \left(\sum_{i=1}^k g_i(\omega)x_i + g_{k+1}(\omega)x_{k+1} \right) + \left(\sum_{i=1}^k g_i(\omega)x_i - g_{k+1}(\omega)x_{k+1} \right)$$

και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα,

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^k g_i(\omega)x_i \right\| d\omega &\leq \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^{k+1} g_i(\omega)x_i \right\| d\omega + \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^k g_i(\omega)x_i - g_{k+1}(\omega)x_{k+1} \right\| d\omega \\ &= 2 \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^{k+1} g_i(\omega)x_i \right\| d\omega \end{aligned}$$

διότι, από τη συμμετρία της g_{k+1} , οι τυχαίες μεταβλητές

$$\sum_{i=1}^k g_i(\omega)x_i + g_{k+1}(\omega)x_{k+1} \text{ και } \sum_{i=1}^k g_i(\omega)x_i - g_{k+1}(\omega)x_{k+1}$$

έχουν την ίδια κατανομή. □

Ισχυρισμός 6.3.7. Αν $k \leq n$ και τα $x_1, \dots, x_k$ είναι ορθοκανονικά, τότε

$$\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^k g_i(\omega)x_i \right\| d\omega \simeq \sqrt{k} M(K \cap \text{span}\{x_1, \dots, x_k\}).$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες. □

Από τους δύο ισχυρισμούς έπεται ότι για κάθε k -διάστατο υπόχωρο F του $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\sqrt{k} M(K \cap F) \leq c \sqrt{n} M(K).$$

Ειδικότερα για $k = 1$ βλέπουμε ότι για κάθε $x \in S^{n-1}$ ισχύει $\|x\| \leq c \sqrt{n} M(K)$, δηλαδή $b(K) = \max\{\|x\| : x \in S^{n-1}\} \leq c \sqrt{n} M(K)$. □

6.3.2 Απόδειξη του Θεωρήματος

Απόδειξη. Αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας n -διάστατος χώρος με νόρμα, ορίζουμε $d_X := d(X, \ell_2^n)$. Ξεκινάμε με ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Από την ανισότητα του Pisier γνωρίζουμε ότι υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $T \in GL(n)$ ώστε το κυρτό σώμα $\tilde{K} = T(K)$ να έχει τις επιπλέον ιδιότητες $M(\tilde{K}) = 1$ και $M(\tilde{K}^\circ) \leq c \log(d_{X_K})$. Αφού $s(K) = s(\tilde{K})$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K ικανοποιεί τις δύο αυτές ανισότητες.

Από το Λήμμα 6.3.5 και από την υπόθεση ότι $M_K = 1$ προκύπτει ότι

$$1 \leq b(K) \leq c \sqrt{n}.$$

Θα αντικαταστήσουμε το K με ένα καινούργιο σώμα K_1 που θα έχει τον ίδιο περίπου όγκο με το K και η απόσταση Banach-Mazur $d_{X_{K_1}}$ θα είναι «πολύ μικρότερη» από την d_{X_K} . Επίσης, θα έχουμε εξίσου καλό έλεγχο για τον όγκο του K_1° , άρα οι ποσότητες $s(K_1)$ και $s(K)$ θα είναι συγκρίσιμες. Η διαδικασία αυτή λέγεται «ισομορφική συμμετρικοποίηση».

Για δοθέν $\alpha > 1$ (το οποίο θα επιλέξουμε αργότερα) θεωρούμε τους αριθμούς

$$\lambda^{up} = M^*(K)\alpha \text{ και } \lambda^{down} = M(K)\alpha = \alpha$$

και ορίζουμε

$$K_1 = \text{conv} \left[(K \cap \lambda^{up} B_2^n) \cup \frac{1}{\lambda^{down}} B_2^n \right].$$

Ισχυρισμός 6.3.8. *Ισχύει η ανισότητα*

$$|K_1| \geq |K| \exp\left(-\frac{cn}{\alpha^2}\right).$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Από τον ορισμό του K_1 και από το Λήμμα 6.3.2,

$$|K_1| \geq |K \cap \lambda^{up} B_2^n| \geq \frac{|K|}{N(K, \lambda^{up} B_2^n)}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Sudakov, παίρνουμε

$$|K_1| \geq |K| \cdot \exp\left(-cn \left(\frac{M^*(K)}{\lambda^{up}}\right)^2\right) = |K| \cdot \exp\left(-\frac{cn}{\alpha^2}\right).$$

□

Ισχυρισμός 6.3.9. *Ισχύει η ανισότητα*

$$|K_1| \leq |K| \exp\left(\frac{cn}{\alpha^2}\right).$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Από τον ορισμό του K_1 , το Λήμμα 6.3.3 και την δυϊκή ανισότητα Sudakov,

$$\begin{aligned} |K_1| &\leq \left| \text{conv}\left(K \cup \frac{1}{\lambda^{down}} B_2^n\right) \right| \\ &\leq cnb(K) N(B_2^n, \lambda^{down} K) \cdot |K| \\ &\leq cnb(K) |K| \cdot \exp\left(cn \left(\frac{M(K)}{\lambda^{down}}\right)^2\right) \\ &= cnb(K) |K| \cdot \exp\left(\frac{cn}{\alpha^2}\right). \end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να ενσωματώσουμε τον όρο $cnb(K)$ στη σταθερά c του εκθετικού όρου, διότι στην αναδρομική κατασκευή που θα ακολουθήσουμε θα επιλέγουμε κάθε φορά το α με τέτοιο τρόπο ώστε $\alpha \leq c \log n$. Έχουμε

$$cnb(K) \leq c_1 n^{3/2} \leq \exp\left(\frac{c'n}{\alpha^2}\right)$$

αφού για το $b(K)$ ισχύει $1 \leq b(K) \leq c \sqrt{n}$. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε:

$$|K_1| \leq |K| \cdot \exp\left(\frac{cn}{\alpha^2}\right).$$

□

Συνδυάζοντας τους δύο ισχυρισμούς παίρνουμε το εξής:

Ισχυρισμός 6.3.10. *Ισχύουν οι ανισότητες*

$$\exp\left(-\frac{cn}{\alpha^2}\right) \leq \frac{|K|}{|K_1|} \leq \exp\left(\frac{cn}{\alpha^2}\right).$$

Περνάμε τώρα στα πολικά σώματα. Από το Λήμμα 6.3.4, το πολικό K_1° του K_1 είναι το σύνολο

$$K_1^\circ = \text{conv}\left(K^\circ \cup \left(\frac{1}{\lambda^{up}} B_2^n\right)\right) \cap \lambda^{down} B_2^n.$$

Ισχυρισμός 6.3.11. *Ισχύουν οι ανισότητες*

$$\exp\left(-\frac{cn}{\alpha^2}\right) \leq \frac{|K^\circ|}{|K_1^\circ|} \leq \exp\left(\frac{cn}{\alpha^2}\right).$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Από τον ορισμό του K_1° και το Λήμμα 6.3.2,

$$|K_1^\circ| \geq |K^\circ \cap \lambda^{down} B_2^n| \geq \frac{|K^\circ|}{N(K^\circ, \lambda^{down} B_2^n)}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Sudakov, παίρνουμε

$$|K_1^\circ| \geq |K^\circ| \cdot \exp\left(-cn \left(\frac{M(K)}{\lambda^{down}}\right)^2\right) = |K^\circ| \cdot \exp\left(-\frac{cn}{\alpha^2}\right).$$

Επίσης, από τον ορισμό του K_1° , το Λήμμα 6.3.3 και τη δυϊκή ανισότητα Sudakov,

$$\begin{aligned} |K_1^\circ| &\leq \left| \text{conv}\left(K^\circ \cup \frac{1}{\lambda^{up}} B_2^n\right) \right| \\ &\leq cnb(K^\circ) N(B_2^n, \lambda^{up} K^\circ) \cdot |K^\circ| \\ &\leq cnb(K^\circ) |K^\circ| \cdot \exp\left(cn \left(\frac{M^*(K)}{\lambda^{up}}\right)^2\right) \\ &= cnb(K^\circ) |K^\circ| \cdot \exp\left(\frac{cn}{\alpha^2}\right). \end{aligned}$$

Όπως πριν, μπορούμε να ενσωματώσουμε τον όρο $2cnb(K^\circ)$ στη σταθερά c του εκθετικού όρου, δηλαδή

$$|K_1^\circ| \leq |K^\circ| \cdot \exp\left(\frac{cn}{\alpha^2}\right).$$

□

Παρατήρηση 6.3.12. Με την αντικατάσταση του K από το K_1 αυτό που καταφέρνουμε είναι να βελτιώσουμε την απόσταση $d_{X_{K_1}}$: Επειδή $\alpha > 1$, έπεται ότι

$$1 \leq M_K M_{K^\circ} \alpha^2 = \lambda^{up} \lambda^{down}, \quad \text{άρα} \quad \frac{1}{\lambda^{down}} \leq \lambda^{up},$$

οπότε από τον ορισμό του K_1 προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{\lambda^{down}} B_2^n \subseteq K_1 \subseteq \lambda^{up} B_2^n.$$

Άρα,

$$d_{X_{K_1}} \leq \lambda^{up} \lambda^{down} = M_K M_{K^\circ} \alpha^2 \leq c_p \alpha^2 \log(d_{X_K}),$$

όπου $c_p > 0$ η σταθερά στην ανισότητα του Pisier. Από το θεώρημα του John, για κάθε n -διάστατο χώρο X έχουμε

$$d_X \leq \sqrt{n}, \text{ άρα } \log d_X \leq \log n.$$

Αν λοιπόν επιλέξουμε $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3c_p}} \log n$, τότε

$$d_{X_{K_1}} \leq (\log n)^3$$

και ταυτόχρονα,

$$\exp\left(-\frac{c}{\alpha^2}\right) \leq \frac{s(K)}{s(K_1)} \leq \exp\left(\frac{c}{\alpha^2}\right).$$

Μπορούμε τώρα να περιγράψουμε την αναδρομική διαδικασία.

6.3.3 Αναδρομική διαδικασία

Θεωρούμε την ακολουθία α_j με

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3c_p}} \log n, \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3c_p}} \log(\log n) = \frac{1}{\sqrt{3c_p}} \log^{(2)} n, \dots, \alpha_t = \frac{1}{\sqrt{3c_p}} \log^{(t)} n,$$

όπου t είναι ο μικρότερος φυσικός με την ιδιότητα:

$$\alpha_t = \frac{1}{\sqrt{3c_p}} \log^{(t)} n < 2.$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε φτάσει στο K_s , για το οποίο μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι $M(K_s) = 1$ και $M^*(K_s) \leq c_p \log(d_{X_{K_s}})$. Επιλέγουμε $\alpha_{s+1} = \frac{1}{\sqrt{3c_p}} \log^{(s+1)} n$ και ορίζουμε

$$\lambda_{s+1}^{up} = M^*(K_s) \alpha_{s+1} \text{ και } \lambda_{s+1}^{down} = M(K_s) \alpha_{s+1}.$$

Τέλος, θεωρούμε το

$$K_{s+1} = \text{conv} \left[(K_s \cap \lambda_{s+1}^{up} B_2^n) \cup \frac{1}{\lambda_{s+1}^{down}} B_2^n \right].$$

Όπως πριν,

$$\begin{aligned} d_{X_{K_{s+1}}} &\leq M(K_s)M^*(K_s)\alpha_{s+1}^2 \leq \frac{1}{3c_p}(\log^{(s+1)} n)^2 c_p \log(d_{X_{K_s}}) \\ &\leq \frac{1}{3}(\log^{(s+1)} n)^2 \log[(\log^{(s)} n)^3] \\ &= (\log^{(s+1)} n)^3. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\exp\left(-\frac{c}{(\log^{(s+1)} n)^2}\right) \leq \frac{s(K_1)}{s(K_2)} \leq \exp\left(\frac{c}{(\log^{(s+1)} n)^2}\right)$$

άρα

$$\exp\left(-c \sum_{j=1}^{s+1} \alpha_j^{-2}\right) \leq \frac{s(K)}{s(K_2)} \leq \exp\left(c \sum_{j=1}^{s+1} \alpha_j^{-2}\right).$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, μετά από t βήματα καταλήγουμε σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K_t για το οποίο ισχύει:

$$d_{X_{K_t}} \leq (\log^{(t)} n)^3 \leq c_1.$$

Ακόμα ισχυρότερα, η κατασκευή δείχνει ότι υπάρχει $r > 0$ ώστε

$$rB_2^n \subseteq K_t \subseteq c_1 r B_2^n.$$

Από τις ιδιότητες του πολικού σώματος έχουμε ότι:

$$\frac{1}{c_1 r} B_2^n \subseteq K_t^\circ \subseteq \frac{1}{r} B_2^n$$

και από τον ορισμό του $s(K_t)$ βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{c_1} \cdot s(B_2^n) \leq s(K_t) \leq c_1 \cdot s(B_2^n).$$

Από όλη τη διαδικασία έχουμε έλεγχο για τους όγκους:

$$\exp\left(-c \sum_{j=1}^t \alpha_j^{-2}\right) \leq \frac{s(K)}{s(K_t)} \leq \exp\left(c \sum_{j=1}^t \alpha_j^{-2}\right).$$

Από τις δυο αυτές ανισότητες προκύπτει ότι

$$C^{-1} \exp\left(-c \sum_{j=1}^t \alpha_j^{-2}\right) \cdot s(B_2^n) \leq s(K) \leq C \exp\left(c \sum_{j=1}^t \alpha_j^{-2}\right) \cdot s(B_2^n).$$

Μένει να εκτιμήσουμε το άθροισμα $\sum_{j=1}^t \alpha_j^{-2} = \frac{1}{(\log n)^2} + \frac{1}{(\log(\log n))^2} + \dots + \frac{1}{(\log^{(t)} n)^2}$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $j < t$,

$$\alpha_{j+1} \leq \log(\alpha_j) \implies \alpha_j \geq \exp(\alpha_{j+1}) \implies \alpha_1 \geq \exp(\alpha_2) \geq \dots \geq \exp^{(j-1)}(\alpha_j).$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\sum_{j=1}^t \alpha_j^{-2} = \frac{1}{\alpha_t^2} + \frac{1}{\exp(2\alpha_t)} + \dots + \frac{1}{\exp^{(t)}(2\alpha_t)} \leq C_1.$$

Έπεται ότι:

Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_2 > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ να ισχύει

$$\frac{1}{C_2} \cdot s(B_2^n) \leq s(K) \leq C_2 \cdot s(B_2^n).$$

□

6.4 Η αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski

Σε αυτήν την ενότητα αποδεικνύουμε την αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski. Πρώτος μας στόχος είναι να δείξουμε την ύπαρξη του λεγόμενου M -ελλειροειδούς ενός συμμετρικού κυρτού σώματος.

Θεώρημα 6.4.1 (V. Milman). *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει ελλειροειδής E_K με όγκο $|E_K| = |K|$, το οποίο ικανοποιεί το εξής: για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P στον $\mathbb{R}^n$,*

$$C^{-n}|E_K + P| \leq |K + P| \leq C^n|E_K + P|$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρατήρηση 6.4.2. Αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου τα σώματα K, P είναι συμμετρικά ως προς το 0. Πράγματι, για κάθε κυρτό σώμα μπορούμε να ορίσουμε το $\hat{K} = \frac{1}{2}(K - K)$, όπου $K - K$ είναι το σώμα διαφορών του K . Από την ανισότητα των Rogers-Shephard προκύπτει ότι:

$$|K| \leq |\hat{K}| \leq 2^n |K|.$$

Αν δεχτούμε το θεώρημα για συμμετρικά κυρτά σώματα, υπάρχει ελλειροειδής $E_{\hat{K}}$ τέτοιο ώστε $|E_{\hat{K}}| = |\hat{K}|$ και

$$|\hat{K} + P| \leq C^n |E_{\hat{K}} + P|$$

για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P .

Επίσης υπάρχει $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ τέτοιο ώστε $|\alpha E_{\hat{K}}| = |K|$. Αν ορίσουμε

$$E_K = \alpha E_{\hat{K}},$$

τότε $|E_K| = |K|$. Για κάθε κυρτό σώμα P ,

$$\begin{aligned}
 |K + P| &\leq |\hat{K} + \hat{P}| \leq C^n \text{Vol}(E_{\hat{K}} + \hat{P}) \\
 &= C^n \left| \frac{1}{\alpha} E_K + \hat{P} \right| \leq \left(\frac{C}{\alpha} \right)^n |E_{\hat{K}} + \alpha \hat{P}| \\
 &\leq \left(\frac{C}{\alpha} \right)^n |E_{\hat{K}} + \hat{P}| \\
 &= \left(\frac{C}{\alpha} \right)^n \left| \left[\frac{1}{2}(E_{\hat{K}} - E_{\hat{K}}) + \frac{1}{2}(P - P) \right] \right| \\
 &= \left(\frac{C}{\alpha} \right)^n \left| \frac{1}{2}(E_{\hat{K}} + P) - \frac{1}{2}(E_{\hat{K}} + P) \right| \\
 &\leq \left(\frac{C}{\alpha} \right)^n 2^n \left| \frac{1}{2}(E_{\hat{K}} + P) \right| \\
 &= \frac{C^n}{\alpha^n} |E_{\hat{K}} + P| \\
 &\leq (2C)^n |E_{\hat{K}} + P|.
 \end{aligned}$$

Από εδώ και πέρα λοιπόν θα θεωρούμε ότι τα K, P ότι είναι συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.4.1. Η κατασκευή του ελλειψοειδούς E_K γίνεται με τη μέθοδο της ισομορφικής συμμετρικοποίησης που είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.1, με κάποιες όμως βασικές τροποποιήσεις.

Κάθε σώμα W που θα ορίζουμε θα έχει όγκο περίπου ίσο με $|B_2^n|$. Το πρώτο πράγμα που χρειαζόμαστε είναι έλεγχος για τον παράγοντα $b(W)$ που εμφανίζεται στο Λήμμα 6.3.5 (είναι μια ποσότητα που θέλουμε να είναι καλά φραγμένη). Γνωρίζουμε ότι $M_W \leq b(W) \leq c \sqrt{n} M_W$ όπου $b(W)$ ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο $B_2^n \subseteq b(W)K$. Άρα για να έχουμε φράγμα για το $b(W)$ χρειαζόμαστε φράγμα για το M_W . Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Pisier θα θεωρούμε το W να ικανοποιεί τις $|W| = |B_2^n|$ και

$$M_W M_{W^\circ} \leq \log n.$$

Από την ανισότητα του Urysohn,

$$M_{W^\circ} \geq \left(\frac{|K|}{|B_2^n|} \right)^{\frac{1}{n}} \simeq 1,$$

άρα

$$M_W \leq M_W M_{W^\circ} \leq \log n.$$

Έπεται ότι

$$b(W) \leq c \sqrt{n} M_W \leq \sqrt{n} \log n.$$

Περιγραφή του 1ου βήματος: Έστω $K = K_0$ συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K_0| = |B_2^n|$. Θεωρούμε γραμμικό μετασχηματισμό $T_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $|\det T_0| = 1$, τέτοιον ώστε για το K'_0 να

ισχύουν τα εξής:

$$(\alpha) \quad 1 \leq b \leq c \sqrt{n} \cdot \log n.$$

$$(\beta) \quad 1 \leq M_{K'_0} \leq c \cdot \log n.$$

$$(\gamma) \quad M_{K'_0} \cdot M_{(K'_0)^\circ} \leq \log d_{X_{K'_0}} \leq \log n.$$

Για $\alpha_1 = \log n$ θέτουμε

$$\lambda_1^{up} = M_{(K'_0)^\circ} \alpha_1 \text{ και } \lambda_1^{down} = M_{K'_0} \alpha_1$$

και θεωρούμε το σώμα

$$K_1 = \text{conv} \left[(K'_0 \cap \lambda_1^{up} B_2^n) \cup \frac{1}{\lambda_1^{down}} B_2^n \right].$$

Τότε,

$$d_{X_{K_1}} \leq \lambda_1^{up} \lambda_1^{down} = M_{K'_0} \cdot M_{(K'_0)^\circ} \alpha_1^2 \leq \log n (\log n)^2 = (\log n)^3.$$

Επίσης, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.3.5 και τη δυϊκή ανισότητα Sudakov έχουμε:

$$\begin{aligned} |K_1 + P| &\leq \left| \text{conv} \left(K'_0 \cup \frac{1}{\lambda_1^{down}} B_2^n \right) + P \right| \\ &\leq 2ebn N(B_2^n, \lambda_1^{down} K'_0) \cdot |K'_0 + P| \\ &\leq 2ebn \cdot \exp \left[cn \left(\frac{M_{K'_0}}{\lambda_1^{up}} \right)^2 \right] \cdot |K'_0 + P| \\ &= 2ebn \cdot \exp \left(\frac{cn}{\alpha_1^2} \right) \cdot |K'_0 + P| \\ &\leq \exp \left(\frac{cn}{\alpha_1^2} \right) \cdot |K'_0 + P|. \end{aligned}$$

Μπορούμε να απαλείψουμε τον όρο $2ebn$ αλλάζοντας την σταθερά c στον εκθετικό παράγοντα διότι $b \leq c \sqrt{n} \log n$ και όλα τα α_i στην κατασκευή που θα κάνουμε θα είναι το πολύ της τάξης του $\log n$.

Αντίστροφα, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.3.3 και την ανισότητα Sudakov, βλέπουμε ότι

για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει και το εξής:

$$\begin{aligned}
 |K_1 + P| &= \left| \text{conv} \left[(K'_0 \cap \lambda_1^{up} B_2^n) \cup \frac{1}{\lambda_1^{down}} B_2^n \right] + P \right| \\
 &\geq |(K'_0 \cap \lambda_1^{up} B_2^n) + P| \\
 &\geq \frac{|K'_0 + P|}{N(K'_0, \lambda_1^{up} B_2^n)} \\
 &\geq |K'_0 + P| \cdot \exp \left[-cn \left(\frac{M_{(K'_0)^\circ}}{\lambda_1^{up}} \right)^2 \right] \\
 &= |K'_0 + P| \cdot \exp \left(-\frac{cn}{\alpha_1^2} \right).
 \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δυο ανισότητες, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P έχουμε

$$\exp \left(-\frac{cn}{\alpha_1^2} \right) |K'_0 + P| \leq |K_1 + P| \leq \exp \left(\frac{cn}{\alpha_1^2} \right) |K'_0 + P|.$$

Άρα σε κάθε βήμα μπορούμε να ελέγχουμε την μεταβολή των όγκων.

Ειδικότερα, για $P = \{0\}$ έχουμε ότι:

$$\exp \left(-\frac{cn}{\alpha_1^2} \right) |K'_0| \leq |K_1| \leq \exp \left(\frac{cn}{\alpha_1^2} \right) |K'_0|,$$

δηλαδή

$$|K_0|^{1/n} = |K'_0|^{1/n} \simeq |K_1|^{1/n}.$$

Οι παραπάνω ανισότητες μας επιτρέπουν μια αναδρομική διαδικασία πανομοιότυπη με αυτήν του Θεωρήματος 6.3.1 και μάλιστα με επιλογή των α_i ακριβώς την ίδια. Με όμοιο τρόπο λοιπόν, για κάθε j φτάνουμε σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K_j τέτοιο ώστε: για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P στον $\mathbb{R}^n$,

$$(6.4.1) \quad \exp(-cn\alpha_j^{-2})|K'_{j-1} + P| \leq |K_j + P| \leq \exp(cn\alpha_j^{-2})|K'_{j-1} + P|.$$

Το $K'_j = T_j(K_j)$ ορίζεται στο τέλος κάθε βήματος έτσι ώστε $|K'_j| = |K_j|$ και $M_{K'_j} M_{(K'_j)^\circ} \leq \log d_{X_{K_j}}$.

Η διαδικασία σταματάει όταν $d_{X_{K_t}} \leq 5$. Επειδή το άθροισμα $\sum_{j=1}^t \alpha_j^{-2}$ είναι (ανεξάρτητα από το t) φραγμένο από μία σταθερά c_1 , παίρνοντας $P = \{0\}$ και πολλαπλασιάζοντας τις (6.4.1) κατά μέλη, βλέπουμε ότι:

$$|K_t|^{1/n} \simeq |K_0|^{1/n}$$

(το ίδιο ισχύει για κάθε K_j). Αφού $d_{X_{K_t}} \leq 5$, έχουμε ότι:

$$\alpha B_2^n \subseteq K_t \subseteq b B_2^n \text{ με } \frac{b}{\alpha} \leq 5.$$

Θεωρούμε $r > 0$ ώστε

$$|rB_2^n| = |K_t|.$$

Από την αρχική υπόθεση ότι $|K_0| = |B_2^n|$ και από τον έλεγχο που έχουμε για τους όγκους, έπεται ότι $\alpha, r, b \simeq 1$.

Τώρα, από τη σχέση $K_t \subseteq bB_2^n$, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα $P \subseteq \mathbb{R}^n$ έχουμε:

$$\begin{aligned} |K_t + P|^{1/n} &\leq |bB_2^n + P|^{1/n} \leq \left(\frac{b}{r}\right) |rB_2^n + P|^{1/n} \\ &\leq 5|rB_2^n + P|^{1/n} \end{aligned}$$

διότι εύκολα ελέγχουμε ότι $b/r \leq 8$. Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε το αντίστοιχο κάτω φράγμα. Θέτοντας $E_t = rB_2^n$ έχουμε βρεί ελλειψοειδές με $|E_t| = |K_t|$ ώστε, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα $P \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$5^{-n}|E_t + P| \leq |K_t + P| \leq 5^n|E_t + P|.$$

Τώρα, για κάθε P , από την ανισότητα για τη μεταβολή του όγκου κατά το $(t-1)$ -οστό βήμα έχουμε:

$$\begin{aligned} |K'_{t-1} + P|^{1/n} &\leq \exp\left(\frac{c}{\alpha_t^2}\right) |K_t + P|^{1/n} \\ &\leq 5 \cdot \exp\left(\frac{c}{\alpha_t^2}\right) |E_t + P|^{1/n} \end{aligned}$$

όπου $K'_{t-1} = T_{t-1}(K_{t-1})$. Αν θεωρήσουμε το ελλειψοειδές $E_{t-1} = T_{t-1}^{-1}(E_t)$, εφαρμόζοντας την προηγούμενη ανισότητα για το $T_{t-1}(P)$ παίρνουμε

$$|T_{t-1}(K_{t-1}) + T_{t-1}(P)|^{1/n} \leq 5 \cdot \exp\left(\frac{c}{\alpha_t^2}\right) |T_{t-1}(E_{t-1}) + T_{t-1}(P)|^{1/n}$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $|\det T_{t-1}| = 1$ βλέπουμε ότι

$$|K_{t-1} + P|^{1/n} \leq 5 \exp\left(\frac{c}{\alpha_t^2}\right) |E_{t-1} + P|^{1/n}.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$|E_{t-1}| = |T_{t-1}^{-1}(E_t)| = |E_t|$$

δηλαδή ο όγκος του ελλειψοειδούς παρέμεινε αμετάβλητος. Άρα για το K_{t-1} έχουμε βρεί ελλειψοειδές E_{t-1} με τις ζητούμενες ιδιότητες.

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία με βήματα προς τα πίσω και αφού οι όγκοι των ελλειψοειδών που προκύπτουν είναι ίσοι μεταξύ τους, φτάνουμε τελικά στο πρώτο βήμα και σε

μια ανισότητα της μορφής

$$|K_0 + P|^{1/n} \leq 5 \exp \left(c \sum_{j=1}^t \alpha_j^{-2} \right) |E_0 + P|^{1/n},$$

και επειδή το παραπάνω άθροισμα είναι ομοιόμορφα φραγμένο έχουμε

$$|K_0 + P|^{1/n} \leq C |E_0 + P|^{1/n}$$

για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P στον $\mathbb{R}^n$, όπου E_0 ελλειψοειδές με

$$|E_0| \simeq |K_0|.$$

Η αντίστροφη ανισότητα ελέγχεται με ανάλογο τρόπο. Με μια απλή (ομοιοθετική) τροποποίηση του E_0 και αντίστοιχη τροποποίηση της απόλυτης σταθεράς C , βλέπουμε ότι στο $K = K_0$ αντιστοιχεί ελλειψοειδές E_K με $|K| = |E_K|$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος. $\square$

Είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε την αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski:

Θεώρημα 6.4.3 (Milman). *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει $U_K \in SL(n)$ με την εξής ιδιότητα: αν K_1, K_2 είναι συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και αν $t > 0$, τότε*

$$|U_{K_1}(K_1) + tU_{K_2}(K_2)|^{1/n} \leq C \left(|K_1|^{1/n} + t|K_2|^{1/n} \right),$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 6.4.1, στο σώμα K_i , $i = 1, 2$ αντιστοιχεί ελλειψοειδές E_{K_i} ώστε

$$|E_{K_i}| = |K_i|$$

και, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P στον $\mathbb{R}^n$,

$$(6.4.2) \quad |K_i + P|^{1/n} \leq C |E_{K_i} + P|^{1/n}.$$

Θεωρούμε γραμμικούς μετασχηματισμούς $U_{K_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $|\det U_{K_i}| = 1$ ώστε

$$U_{K_i}(E_{K_i}) = r_i B_2^n.$$

Έστω P ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Εφαρμόζοντας την (6.4.2) για το $P'_i := U_{K_i}^{-1}(P)$ έχουμε

$$|K_i + P'_i|^{1/n} \leq C |E_{K_i} + P'_i|^{1/n} \implies |U_{K_i}(K_i) + P|^{1/n} \leq C |U_{K_i}(E_{K_i}) + P|^{1/n},$$

δηλαδή,

$$|U_{K_i}(K_i) + P|^{1/n} \leq C |r_i B_2^n + P|^{1/n}.$$

Παίρνοντας πρώτα $i = 1$ και $P = tU_{K_2}(K_2)$ και κατόπιν $i = 2$ και $P = r_1B_2^n$, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
 |U_{K_1}(K_1) + tU_{K_2}(K_2)|^{1/n} &\leq C|r_1B_2^n + tU_{K_2}(K_2)|^{1/n} \\
 &\leq C^2|r_1B_2^n + tr_2B_2^n|^{1/n} \\
 &= C^2\left[|r_1B_2^n|^{1/n} + t|r_2B_2^n|^{1/n}\right] \\
 &= C^2\left[|U_{K_1}(E_{K_1})|^{1/n} + t|U_{K_2}(E_{K_2})|^{1/n}\right] \\
 &= C^2\left[|E_{K_1}|^{1/n} + t|E_{K_2}|^{1/n}\right] \\
 &= C_1\left[|K_1|^{1/n} + t|K_2|^{1/n}\right],
 \end{aligned}$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ανισότητα Brascamp-Lieb

7.1 Εισαγωγή

Έστω $a = (a_1, \dots, a_n)$ μια ακολουθία μη αρνητικών αριθμών. Η φθίνουσα αναδιάταξη της a είναι η ακολουθία $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ που προκύπτει με μετάθεση των δεικτών ώστε να ικανοποιείται η

$$(7.1.1) \quad a_1^* \geq a_2^* \geq \dots \geq a_n^* \geq 0.$$

Ειδικότερα, αν οι a_j είναι διακεκριμένοι τότε η a^* προσδιορίζεται από την (7.1.1) και από το γεγονός ότι τα σύνολα $\{a_1, \dots, a_n\}$ και $\{a_1^*, \dots, a_n^*\}$ ταυτίζονται. Αν κάποιοι a_j είναι ίσοι, χρειάζεται να λάβουμε υπόψη μας το πλήθος των εμφανίσεων καθενός από τους όρους της a . Είναι απλό να δείξει κανείς ότι αν a και b είναι δύο n -άδες μη αρνητικών αριθμών τότε

$$(7.1.2) \quad \sum_{j=1}^n a_j b_j \leq \sum_{j=1}^n a_j^* b_j^*.$$

Ο ευκολότερος τρόπος για να δώσουμε αυστηρή απόδειξη είναι να γράψουμε

$$(7.1.3) \quad \sum_{j=1}^n a_j b_j = b_n \left(\sum_{j=1}^n a_j \right) + (b_{n-1} - b_n) \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j \right) + \dots + (b_1 - b_2) a_1$$

χρησιμοποιώντας άθροιση κατά μέρη ή επαγωγή. Στη συνέχεια παρατηρούμε αρχικά ότι υπάρχει μετάθεση τ του $\{1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε

$$(7.1.4) \quad \sum_{j=1}^n a_j b_j = \sum_{j=1}^n a_{\tau(j)} b_j^*.$$

Από την (7.1.3) έχουμε

$$(7.1.5) \quad \sum_{j=1}^n a_j b_j = \sum_{j=1}^n a_{\tau(j)} b_j^* = b_n^* \left(\sum_{j=1}^n a_{\tau(j)} \right) + (b_{n-1}^* - b_n^*) \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{\tau(j)} \right) + \cdots + (b_1^* - b_2^*) a_{\tau(1)}.$$

Όμως, αν $a_\tau = (a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(n)})$, έχουμε

$$(7.1.6) \quad \sum_{j=1}^k a_{\tau(j)} \leq \sum_{j=1}^k a_{\tau(j)}^* = \sum_{j=1}^k a_j^*.$$

Η ανισότητα είναι άμεση από τον ορισμό της φθίνουσας αναδιάταξης και η ισότητα ισχύει διότι $a^* = a_\tau^*$. Τότε, η (7.1.5) μας δίνει

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j b_j &= b_n^* \left(\sum_{j=1}^n a_{\tau(j)} \right) + (b_{n-1}^* - b_n^*) \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{\tau(j)} \right) + \cdots + (b_1^* - b_2^*) a_{\tau(1)} \\ &\leq b_n^* \left(\sum_{j=1}^n a_j^* \right) + (b_{n-1}^* - b_n^*) \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j^* \right) + \cdots + (b_1^* - b_2^*) a_1^* \\ &= \sum_{j=1}^n a_j^* b_j^*, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει πάλι λόγω της (7.1.3).

Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι αν $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$ τότε ισότητα στην (7.1.2) ισχύει μόνο αν $a = a^*$. Από την (7.1.3) προκύπτει επίσης το κάτω φράγμα

$$\sum_{j=1}^n a_j b_j \geq \sum_{j=1}^n a_j^* b_{n-j+1}^*.$$

Η ανισότητα αυτή έπεται και από την (7.1.2) αν θέσουμε $c = \max(b_j)$ και παρατηρήσουμε ότι για τους $d_j = c - b_j$ ισχύει $d_j^* = c - b_{n-j+1}^*$.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γενικεύσουμε την (7.1.2) σε ένα πολύ γενικότερο πλαίσιο από αυτό των πεπερασμένων αθροισμάτων γινομένων. Πιο συγκεκριμένα, θα θεωρήσουμε ολοκληρώματα γινομένων συναρτήσεων. Ξεκινάμε ορίζοντας τη γενίκευση της a^* στη συνεχή περίπτωση.

7.2 Συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη συνάρτησης

Ορισμός 7.2.1. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα

$$(7.2.1) \quad m_f(t) = \text{vol}_n(\{x : |f(x)| > t\}) < \infty$$

για κάθε $t > 0$. Τότε θα λέμε ότι η f έχει σύνολα στάθμης με πεπερασμένο μέτρο. Η συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη της f είναι η μοναδική κάτω ημισυνεχής συνάρτηση $f^* :$

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ που έχει τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

(i) Οι f^* και f έχουν την ίδια κατανομή: για κάθε $t > 0$,

$$m_{f^*}(t) = m_f(t).$$

(ii) Η f^* είναι ακτινικά συμμετρική, δηλαδή για κάθε $U \in O(n)$ και $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$f^*(Ux) = f^*(x).$$

(iii) Η f^* είναι φθίνουσα, δηλαδή αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $0 \leq |x| \leq |y|$ τότε

$$f^*(x) \geq f^*(y) \geq 0.$$

Σε ό,τι ακολουθεί, $|x|$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα του $x \in \mathbb{R}^n$ και ω_n είναι ο όγκος της Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας B_2^n .

Απόδειξη της ύπαρξης της f^ .* Εξηγούμε εν συντομία την ύπαρξη και τη μοναδικότητα. Μπορούμε να ορίσουμε την f^* απευθείας, θέτοντας

$$(7.2.2) \quad f^*(x) = \sup\{t > 0 : \omega_n |x|^n < m_f(t)\}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η f^* είναι ακτινικά συμμετρική, φθίνουσα και έχει την ίδια κατανομή με την f . Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε ότι, για κάθε $t > 0$, το σύνολο $\{x : f^*(x) > t\}$ είναι η ανοικτή μπάλα όγκου $m_f(t)$, το οποίο αποδεικνύει ότι η f^* είναι κάτω ημισυνεχής. Η μοναδικότητα είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι κάθε συνάρτηση g προσδιορίζεται από τα σύνολα στάθμης $L_r(g) := \{x : g(x) > r\}$. Έχουμε

$$g(x) = \sup\{r : x \in L_r(g)\}$$

και αφού η f^* είναι κάτω ημισυνεχής, τα σύνολα στάθμης $L_r(f^*)$ είναι ανοικτές μπάλες όγκου $m_f(r)$ με κέντρο το 0.

Οι ιδιότητες (ii) και (iii) είναι άμεσες συνέπειες της (7.2.2). □

Οι βασικές ιδιότητες της συμμετρικής φθίνουσας αναδιάταξης συνοψίζονται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 7.2.2. *Η απεικόνιση $f \mapsto f^*$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) Αν $0 \leq |f| \leq |g|$ τότε $0 \leq f^* \leq g^*$.

(ii) Αν G είναι μια θετική μονότονη συνάρτηση, τότε

$$\int G(|f(x)|) dx = \int G(f^*(x)) dx.$$

Ειδικότερα, για κάθε $p > 0$ έχουμε $f \in L^p$ αν και μόνο αν $f^* \in L^p$, και $\|f^*\|_p = \|f\|_p$.

(iii) Για κάθε $t > 0$

$$(\mathbf{1}_{\{|f|>t\}})^* = \mathbf{1}_{\{f^*>t\}}.$$

Γενικότερα, αν G είναι μια αύξουσα κάτω ημισυνεχής συνάρτηση στο $[0, \infty)$ τότε

$$(7.2.3) \quad (G \circ |f|)^* = G \circ f^*.$$

Απόδειξη. Αν $0 \leq |f| \leq |g|$ τότε έχουμε $m_g(t) \leq m_f(t)$ για κάθε $t > 0$, άρα η (7.2.2) δείχνει ότι $f^* \leq g^*$. Αυτό αποδεικνύει την (i), ενώ το γεγονός ότι οι f και f^* έχουν την ίδια κατανομή μας δίνει αμέσως την (ii).

Τέλος, για να αποδείξουμε την (iii) παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{f^*(x) > t\}$ είναι η ανοικτή μπάλα που έχει τον ίδιο όγκο με το $\{|f(x)| > t\}$. Για την τελευταία ισότητα παρατηρούμε ότι

$$\{x : (G \circ |f|)(x) > t\} = \{x : |f(x)| > \beta_G(t)\},$$

όπου

$$\beta_G(t) = \inf\{s : G(s) > t\}.$$

Συνεπώς, οι $(G \circ |f|)^*$ και $G \circ f^*$ είναι ισοκατανεμημένες, φθίνουσες και συμμετρικές. Αφού η σύνθεση μιας κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης με μια αύξουσα κάτω ημισυνεχή συνάρτηση είναι κάτω ημισυνεχής, οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες. $\square$

Παρατήρηση 7.2.3. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.2.2 (iii) και το γεγονός ότι αν η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ έχει σύνολα στάθμης με πεπερασμένο μέτρο τότε

$$|f(x)| = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{|f|>t\}}(x) dt,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$(7.2.4) \quad f^*(x) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{|f|>t\}}^*(x) dt.$$

Υπάρχουν πολλές γνωστές ανισότητες που αφορούν αναδιατάξεις συναρτήσεων. Η απλούστερη είναι η επόμενη.

Θεώρημα 7.2.4. Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ δύο μη-αρνητικές Borel μετρήσιμες συναρτήσεις με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου. Τότε,

$$(7.2.5) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)g^*(x)dx.$$

Απόδειξη. Αφού

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{f>t\}}(x) dt = f(x)$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{f>t\}}(x)\mathbf{1}_{\{g>s\}}(x)dx ds dt$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)g^*(x)dx = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{f^*>t\}}(x)\mathbf{1}_{\{g^*>s\}}(x)dx ds dt.$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$(7.2.6) \quad \text{vol}_n(\{f > t\} \cap \{g > s\}) \leq \text{vol}_n(\{f^* > t\} \cap \{g^* > s\})$$

για κάθε $t, s > 0$. Αν θέσουμε $F_t = \{f > t\}$ και $G_s = \{g > s\}$, τότε η (7.2.6) ανάγεται στην ανισότητα

$$\text{vol}_n(F_t \cap G_s) \leq \text{vol}_n(F_t^* \cap G_s^*).$$

Αυτή ισχύει προφανώς: τα σύνολα F_t^* και G_s^* είναι μπάλες με κέντρο το 0. Άρα κάποια από τις δύο περιέχεται στην άλλη. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(F_t^* \cap G_s^*) &= \min\{\text{vol}_n(F_t^*), \text{vol}_n(G_s^*)\} = \min\{\text{vol}_n(F_t), \text{vol}_n(G_s)\} \\ &\geq \text{vol}_n(F_t \cap G_s), \end{aligned}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της (7.2.5). $\square$

Παρατήρηση 7.2.5. Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Από τις $\|f - g\|_2^2 \geq \| |f| - |g| \|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 - 2\langle |f|, |g| \rangle$ και $\langle |f|, |g| \rangle \leq \langle f^*, g^* \rangle$ (που είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος) βλέπουμε ότι

$$\|f^* - g^*\|_2 \leq \|f - g\|_2.$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι το ίδιο ισχύει για τις L^p -νόρμες και γενικότερα για κάθε Orlicz νόρμα.

Θεώρημα 7.2.6. Έστω G μια μη αρνητική κυρτή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $G(0) = 0$. Αν f, g είναι μη αρνητικές συναρτήσεις με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου τότε

$$(7.2.7) \quad \int_{\mathbb{R}^n} G(f^*(x) - g^*(x)) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} G(f(x) - g(x)) dx.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $G_+ = G \cdot \mathbf{1}_{[0, \infty)}$ και $G_- = G \cdot \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}$. Οι G_+, G_- είναι κυρτές, οπότε λόγω συμμετρίας, αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο μόνο για την G_+ . Δηλαδή, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $G(y) = 0$ αν $y \leq 0$ (άρα, στα ολοκληρώματα της (7.2.7) θεωρούμε μόνο τα x για τα οποία $f(x) \geq g(x)$ ή $f^*(x) \geq g^*(x)$ αντίστοιχα). Θεωρούμε την αριστερή πλευρική παράγωγο D^-G , η οποία είναι μη αρνητική, αύξουσα και κάτω ημισυνεχής. Είναι γνωστό ότι

αν η F είναι κυρτή σε ένα ανοικτό διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ και $[a, b] \subset I$ τότε

$$F(b) - F(a) = \int_a^b (D^- F)(s) ds = \int_a^b (D^+ F)(s) ds.$$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$G(f(x) - g(x)) = \int_{g(x)}^{f(x)} (D^- G)(f(x) - s) ds = \int_0^\infty (D^- G)(f(x) - s) \mathbf{1}_{\{g \leq s\}}(x) ds,$$

διότι $(D^- G)(f(x) - s) = 0$ αν $s \geq f(x)$, αφού $G \equiv 0$ στο $(-\infty, 0]$. Συνεπώς,

$$\int_{\mathbb{R}} G(f(x) - g(x)) dx = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} (D^- G)(f(x) - s) \mathbf{1}_{\{g \leq s\}}(x) dx \right) ds,$$

και το θεώρημα θα προκύψει αν δείξουμε ότι

$$(7.2.8) \quad \int_{\mathbb{R}} (D^- G)(f(x) - s) \mathbf{1}_{\{g \leq s\}}(x) dx \geq \int_{\mathbb{R}} (D^- G)(f^*(x) - s) \mathbf{1}_{\{g^* \leq s\}}(x) dx$$

για κάθε $s \geq 0$. Σταθεροποιώντας το s , παρατηρούμε ότι η $y \mapsto (D^- G)(y - s)$ είναι αύξουσα κάτω ημισυνεχής συνάρτηση του y , και χρησιμοποιώντας την (7.2.3) παίρνουμε

$$((D^- G)(f(\cdot) - s))^* = (D^- G)(f^*(\cdot) - s).$$

Συνεπώς, για την (7.2.8) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε μη αρνητική συνάρτηση h με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου ισχύει

$$(7.2.9) \quad \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \mathbf{1}_{\{g \leq s\}}(x) dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} h^*(x) \mathbf{1}_{\{g^* \leq s\}}(x) dx.$$

Λόγω της (7.2.4) αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$(7.2.10) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{h > r\}} \mathbf{1}_{\{g \leq s\}} dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{h^* > r\}} \mathbf{1}_{\{g^* \leq s\}} dx.$$

Από το Θεώρημα 7.2.4 έχουμε

$$(7.2.11) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{h > r\}} \mathbf{1}_{\{g > s\}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{h^* > r\}} \mathbf{1}_{\{g^* > s\}} dx$$

και αφαιρώντας από την

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{h > r\}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{h^* > r\}} dx$$

παίρνουμε την (7.2.10). Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα για την $G(y) = |y|^p$, $p \geq 1$, παίρνουμε το ακόλουθο.

Πόρισμα 7.2.7. Για κάθε $p \geq 1$ και $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ισχύει

$$\|f^* - g^*\|_p \leq \|f - g\|_p.$$

Χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι $|1_A - 1_B| = 1_{A \Delta B}$, οπότε $\|1_A - 1_B\|_p = \text{vol}_n(A \Delta B)^{1/p}$, παίρνουμε επίσης το εξής.

Πόρισμα 7.2.8. Έστω (A_n) ακολουθία φραγμένων μετρήσιμων συνόλων και A_∞ φραγμένο μετρήσιμο σύνολο ώστε

$$\text{vol}_n(A_n \Delta A_\infty) \rightarrow 0.$$

Τότε, για κάθε $1 \leq p < \infty$ ισχύουν οι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|1_{A_n} - 1_{A_\infty}\|_p = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|1_{A_n}^* - 1_{A_\infty}^*\|_p = 0.$$

7.3 Ανισότητα Brascamp-Lieb-Luttinger

Μια γνωστή ανισότητα αναδιάταξης του Riesz ισχυρίζεται ότι αν $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, τότε

$$(7.3.1) \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)h(x-y) dy dx \leq \iint_{\mathbb{R}^2} f^*(x)g^*(y)h^*(x-y) dy dx.$$

Οι Brascamp, Lieb και Luttinger γενίκευσαν αυτή την ανισότητα ως εξής.

Θεώρημα 7.3.1. Έστω $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ μετρήσιμες συναρτήσεις και $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$. Τότε,

$$(7.3.2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j \rangle) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^*(\langle x, u_j \rangle) dx.$$

Σημείωση. Είναι φανερό ότι η (7.3.1) είναι ειδική περίπτωση της (7.3.2): αρκεί να πάρουμε $f_1 = f$, $f_2 = g$, $f_3 = h$ και $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$, $u_3 = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$.

7.3.1 Απόδειξη της ανισότητας Brascamp-Lieb-Luttinger

Το πρώτο βήμα της απόδειξης του Θεωρήματος 7.3.1 βασίζεται στην αρχή του Brunn.

Πρόταση 7.3.2. Το Θεώρημα 7.3.1 ισχύει αν κάθε f_j είναι χαρακτηριστική συνάρτηση κάποιου φραγμένου κλειστού διαστήματος.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $I_j = [b_j - c_j, b_j + c_j]$ και $f_j = 1_{I_j}$, $j = 1, \dots, m$. Ορίζουμε $f_j(\cdot|t)$ θέτοντας

$$f_j(x|t) = f_j(x + b_j t) = 1_{I_j - b_j t}(x),$$

όπου $I_j - b_j t = [(1-t)b_j - c_j, (1-t)b_j + c_j]$. Ορίζουμε επίσης $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j \rangle|t) dx.$$

Παρατηρώντας ότι $f_j(x|1) = 1_{[-c_j, c_j]}(x) = f_j^*(x)$, βλέπουμε ότι για την απόδειξη της πρότασης αρκεί να δείξουμε ότι $G(0) \leq G(1)$.

Θα αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο: η G είναι αύξουσα. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε το κεντρικά συμμετρικό πολύτοπο

$$K = \{\bar{x} = (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : -c_j \leq \langle x, u_j \rangle - b_j x_{n+1} \leq c_j\}.$$

Τότε,

$$\text{vol}_n(K \cap \{x_{n+1} = t\}) = \text{vol}_n(\{x \in \mathbb{R}^n : -c_j \leq \langle x, u_j \rangle - tb_j \leq c_j\}) = G(1-t).$$

Βλ Από την αρχή του Brunn, η $t \mapsto G(1-t)$ είναι φθίνουσα. □

Με ένα επαγωγικό επιχείρημα θα δείξουμε τώρα την (7.3.2) στην περίπτωση που οι f_j είναι χαρακτηριστικές συναρτήσεις πεπερασμένων ενώσεων κλειστών διαστημάτων.

Πρόταση 7.3.3. Το Θεώρημα 7.3.1 ισχύει αν κάθε f_j είναι χαρακτηριστική συνάρτηση μιας πεπερασμένης ένωσης φραγμένων κλειστών διαστημάτων.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f_j είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της ένωσης n_j ξένων κλειστών διαστημάτων: $f_j = 1_{A_j}$, όπου $A_j = \bigcup_{k=1}^{n_j} [b_{kj} - c_{kj}, b_{kj} + c_{kj}]$ και $b_{kj} + c_{kj} < b_{k+1,j} - c_{k+1,j}$, $k = 1, \dots, n_j - 1$.

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς το $N = \{n_1, \dots, n_m\}$. Λέμε ότι $M < N$ αν $m_j \leq n_j$ για κάθε j και υπάρχει i τέτοιος ώστε $m_i < n_i$. Η Πρόταση 7.3.2 καλύπτει την περίπτωση $N = \{1, 1, \dots, 1\}$. Υποθέτουμε ότι μας έχει δοθεί η N και ότι η πρόταση έχει αποδειχθεί για κάθε $M < N$.

Για κάθε $t \in [0, 1]$ ορίζουμε

$$f_{kj}(x|t) = 1_{[b_{kj}(1-t)-c_{kj}, b_{kj}(1-t)+c_{kj}]}(x) \quad (1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n_j)$$

Οι νέες αποστάσεις μεταξύ «διαδοχικών διαστημάτων» είναι οι

$$b_{k+1,j}(1-t) - c_{k+1,j} - b_{kj}(1-t) - c_{kj}$$

άρα είναι φθίνουσες συναρτήσεις του t . Ορίζουμε

$$f_j(x, t) = \sum_{k=1}^{n_j} f_{kj}(x|t) \quad (1 \leq j \leq m)$$

και θέτουμε

$$\tau = \min_{k,j} \left(1 - \frac{c_{kj} + c_{k+1,j}}{b_{k+1,j} - b_{kj}} \right).$$

Άρα, ο τ είναι ο μικρότερος t στο $(0, 1]$ για τον οποίο δύο διαδοχικά διαστήματα κάποιας $f_j(\cdot|t)$ θα ενωθούν. Αυτό σημαίνει ότι αν $M(\tau) = \{n_1(\tau), \dots, n_m(\tau)\}$ είναι η m -άδα που αντιστοιχεί στις $f_1(\cdot|\tau), \dots, f_m(\cdot|\tau)$, έχουμε $M(\tau) < N$.

Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j \rangle) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} f_{kj}(\langle x, u_j \rangle) dx \\ &= \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_{k_j j}(\langle x, u_j \rangle) dx \end{aligned}$$

όπου $f_{kj} = 1_{[b_{kj}-c_{kj}, b_{kj}+c_{kj}]}$. Εφαρμόζοντας, για καθένα από τα γινόμενα σε αυτό το άθροισμα, το γεγονός ότι η συνάρτηση G της απόδειξης της Πρότασης 7.3.2 είναι αύξουσα, βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_{k_j j}(\langle x, u_j \rangle) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_{k_j j}(\langle x, u_j \rangle | \tau) dx$$

Προσθέτοντας και αλλάζοντας τη σειρά της ολοκλήρωσης και άθροισης, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j \rangle) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{n_j} f_{kj}(\langle x, u_j \rangle | \tau) \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j \rangle | \tau) dx. \end{aligned}$$

Τώρα, εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση για τις $f_j(\cdot | \tau)$ που ορίζονται με λιγότερα διαστήματα, και έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j \rangle | \tau) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^*(\langle x, u_j \rangle | \tau) dx,$$

όπου $f_j^*(\cdot | \tau)$ είναι η συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη της $f_j(\cdot | \tau)$. Παρατηρώντας ότι οι f_j και $f_j(\cdot | \tau)$ έχουν την ίδια συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j \rangle) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^*(\langle x, u_j \rangle) dx,$$

που ήταν το ζητούμενο. □

Προσεγγίζοντας ένα μετρήσιμο σύνολο με μια ένωση κλειστών διαστημάτων, παίρνουμε:

Πρόταση 7.3.4. Το Θεώρημα 7.3.1 ισχύει αν κάθε f_j είναι χαρακτηριστική συνάρτηση ενός μετρήσιμου συνόλου A_j με $\text{vol}_n(A_j) < \infty$, $1 \leq j \leq m$. □

Μπορούμε τώρα να δώσουμε την απόδειξη του κεντρικού αποτελέσματος.

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.1. Υποθέτοντας ότι οι $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου και χρησιμοποιώντας την Πρόταση

7.3.4 και το θεώρημα Fubini, γράφουμε

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j \rangle) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^m \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{f_j > t_j\}}(\langle u_j, x \rangle) dt_j \right) dx \\
 &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \mathbf{1}_{\{f_j > t_j\}}(\langle x, u_j \rangle) dx \right) dt_m \dots dt_1 \\
 &\leq \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \mathbf{1}_{\{f_j^* > t_j\}}(\langle x, u_j \rangle) dx \right) dt_m \dots dt_1 \\
 &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \mathbf{1}_{\{f_j^* > t_j\}}(\langle x, u_j \rangle) dx \right) dt_m \dots dt_1 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^*(\langle x, u_j \rangle) dx.
 \end{aligned}$$

□

7.4 Ανισότητα Brascamp-Lieb-Luttinger για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Έστω $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$ μια μετρήσιμη συνάρτηση με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου. Θεωρούμε έναν $(k-1)$ -διάστατο υπόχωρο V του $\mathbb{R}^k$ και σταθεροποιούμε ένα σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε το e_1 να είναι το κάθετο διανυσμα του V . Η *Steiner συμμετρικοποίηση* $f^*(\cdot | V)$ της f ως προς V ορίζεται ως εξής: Αν $x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση $h(t) = f(t, x_2, \dots, x_k)$ και ορίζουμε

$$f^*(t, x_2, \dots, x_k | V) = h^*(t).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το $\{x : f^*(x | V) > t\}$ είναι η Steiner συμμετρικοποίηση του $\{x : f(x) > t\}$ ως προς V . Ειδικότερα, οι L^p -νόρμες διατηρούνται από την $f \mapsto f^*(\cdot | V)$.

Λήμμα 7.4.1. Έστω $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$ μετρήσιμες συναρτήσεις με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου και έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Αν V είναι ένας $(k-1)$ -διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^k$, τότε

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^m f_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right) dx_n \dots dx_1 \\
 \leq \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^m f_j^* \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i | V \right) dx_n \dots dx_1.
 \end{aligned}$$

Απόδειξη. Γράφουμε $x_i = (t_i, y_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}$, $i = 1, \dots, n$. Αλλάζοντας τη σειρά της ολοκλήρωσης

παίρνουμε

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^m f_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right) dx_n \cdots dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^m f_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ji}(t_i, y_i) \right) dt_n \cdots dt_1 \right) dy_n \cdots dy_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j(\langle t, u_j \rangle) dt \right) dy_n \cdots dy_1,
\end{aligned}$$

όπου $u_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$, $t = (t_1, \dots, t_n)$ και, για σταθερά y_i ,

$$g_j(\langle t, u_j \rangle) = f_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right).$$

Παρατηρούμε ότι

$$g_j^*(\langle t, u_j \rangle) = f_j^* \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \mid V \right).$$

Τότε, το Θεώρημα 7.3.1 ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Με διαδοχικές συμμετριοποιήσεις ως προς $(k-1)$ -διάστατους υποχώρους παίρνουμε τη συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη f_j^* κάθε f_j , $j = 1, \dots, m$. Έτσι, έχουμε:

Θεώρημα 7.4.2. Έστω $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$ μετρήσιμες συναρτήσεις με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου, και έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^m f_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right) dx_n \cdots dx_1 \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^m f_j^* \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right) dx_n \cdots dx_1.
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $z_l = (x_{1l}, \dots, x_{nl})$, $l = 1, \dots, k$ και $u_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, m$, παίρνουμε την ακόλουθη αναδιατύπωση του Θεωρήματος 7.4.2.

Θεώρημα 7.4.3. Έστω $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$ μετρήσιμες συναρτήσεις με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου, και έστω $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle z_1, u_j \rangle, \dots, \langle z_k, u_j \rangle) dz_k \cdots dz_1 \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^*(\langle z_1, u_j \rangle, \dots, \langle z_k, u_j \rangle) dz_k \cdots dz_1.
\end{aligned}$$

7.5 Ανισότητα Brascamp-Lieb

Έστω $m \geq n$, $p_1, \dots, p_m \geq 1$ με $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = n$, και $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τον πλειογραμμικό τελεστή $\Phi : L^{p_1}(\mathbb{R}) \times \dots \times L^{p_m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\Phi(f_1, \dots, f_m) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j \rangle) dx.$$

Οι Brascamp και Lieb απέδειξαν ότι η νόρμα του Φ είναι το supremum του λόγου

$$\frac{\Phi(g_1, \dots, g_m)}{\prod_{j=1}^m \|g_j\|_{p_j}}$$

πάνω από όλες τις κεντραρισμένες Gaussian συναρτήσεις $g_1, \dots, g_m$. Η απόδειξη βασίζεται στην ανισότητα Brascamp-Lieb-Luttinger (Θεώρημα 7.4.3).

Θεώρημα 7.5.1. Έστω $m \geq n$, και $p_1, \dots, p_m \geq 1$ με $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = n$. Για δοθέντα $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$, θεωρούμε τον τελεστή Φ (ο οποίος εξαρτάται από τα u_j). Τότε,

$$\frac{\Phi(f_1, \dots, f_m)}{\prod_{j=1}^m \|f_j\|_{p_j}} \leq D := \sup \left\{ \frac{\Phi(g_1, \dots, g_m)}{\prod_{j=1}^m \|g_j\|_{p_j}} : g_j(t) = e^{-\lambda_j t^2}, \lambda_j > 0 \right\}$$

για κάθε $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R})$.

Παρατήρηση 7.5.2. (α) Μπορούμε ασφαλώς να υποθέσουμε ότι οι f_j είναι μη-αρνητικές.

(β) Είδαμε ότι η συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη διατηρεί τις p -νόρμες και μεγαλώνει το αριστερό μέλος στο Θεώρημα 7.5.1. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε f_j είναι άρτια και φθίνουσα στο $\mathbb{R}^+$. Κάθε τέτοια συνάρτηση προσεγγίζεται από συναρτήσεις της μορφής

$$\sum_{l=1}^k a_l \mathbf{1}_{[-\gamma_l, \gamma_l]}$$

όπου $a_l > 0$ και η $\{\gamma_l\}_{l=1}^k$ είναι φθίνουσα. Άρα, αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για συναρτήσεις αυτού του τύπου.

Λήμμα 7.5.3. Έστω $\psi_1, \dots, \psi_s$ μη αρνητικές συναρτήσεις στον $L^p(\mathbb{R}^k)$, $p \geq 1$. Τότε,

$$\left\| \sum_{j=1}^s \psi_j \right\|_p \geq s^{-1/q} \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_p,$$

όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Απόδειξη. Αφού κάθε ψ_j είναι μη-αρνητική και $p \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ έχουμε

$$\sum_{j=1}^s \psi_j(x)^p \leq \left(\sum_{j=1}^s \psi_j(x) \right)^p.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_p \right)^p &\leq s^{p/q} \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_p^p = s^{p/q} \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{j=1}^s \psi_j^p(x) dx \\ &\leq s^{p/q} \int_{\mathbb{R}^k} \left(\sum_{j=1}^s \psi_j(x) \right)^p dx = s^{p/q} \left\| \sum_{j=1}^s \psi_j \right\|_p^p. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 7.5.4. Έστω $p \geq 1$ και έστω η_a η χαρακτηριστική συνάρτηση της μπάλας $\{x \in \mathbb{R}^k : |x| \leq a\}$. Ορίζουμε

$$\varphi_a(x) = \exp\left(\left(1 - \frac{|x|^2}{a^2}\right) \frac{k}{2p}\right) = e^{\frac{k}{2p}} e^{-|x|^2 \frac{k}{2pa^2}}.$$

Τότε, $\eta_a(x) \leq \varphi_a(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ και

$$\|\varphi_a\|_p \leq \|\eta_a\|_p (3\sqrt{k})^{1/p}.$$

Απόδειξη. Η ανισότητα $\eta_a(x) \leq \varphi_a(x)$ είναι φανερή διότι $\varphi_a(x) \geq 1$ όταν $|x| \leq a$. Έχουμε $\|\eta_a\|_p^p = \omega_k a^k$ και

$$\|\varphi_a\|_p^p = e^{k/2} \frac{a^k}{k^{k/2}} (2\pi)^{k/2}.$$

Χρησιμοποιώντας και τον τύπο του Stirling παίρνουμε

$$\left(\frac{\|\varphi_a\|_p}{\|\eta_a\|_p} \right)^p \leq e^{k/2} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)}{k^{k/2}} \leq 3\sqrt{k}.$$

□

Παρατήρηση 7.5.5. Παρατηρήστε ότι η φ_a είναι γινόμενο κεντραρισμένων Gaussian συναρτήσεων:

$$\varphi_a(x_1, \dots, x_k) = e^{\frac{k}{2p}} \prod_{i=1}^k \exp\left(-\frac{kx_i^2}{2a^2p}\right).$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.5.1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε f_j είναι συνάρτηση της μορφής

$$f_j(t) = \sum_{l=1}^N a_{l,j} \mathbf{1}_{[-\gamma_{l,j}, \gamma_{l,j}]}(t)$$

όπου $a_{l,j} \geq 0$, $\gamma_{l,j} \geq \gamma_{l+1,j}$ και N είναι ένας θετικός ακέραιος (ο ίδιος για όλες τις f_j).

Για κάθε $j \leq m$ θεωρούμε τη συνάρτηση $G_j : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$ που ορίζεται από την

$$G_j(t_1, \dots, t_k) = \prod_{i=1}^k f_j(t_i)$$

και τη συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη F_j της G_j στον $\mathbb{R}^k$.

Από το Θεώρημα 7.4.3 και το θεώρημα Fubini βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j \rangle) dx \right)^k &= \int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{j=1}^m G_j(\langle x_1, u_j \rangle, \dots, \langle x_k, u_j \rangle) dx_k \dots dx_1 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{j=1}^m F_j(\langle x_1, u_j \rangle, \dots, \langle x_k, u_j \rangle) dx_k \dots dx_1. \end{aligned}$$

Αφού η f_j παίρνει μόνο N τιμές, η G_j παίρνει το πολύ $(k+1)^N$ τιμές. [Πράγματι, αν $a_1, \dots, a_N$ είναι οι τιμές της f_j τότε οι τιμές της G_j είναι οι $a_1^{\delta_1} a_2^{\delta_2} \dots a_N^{\delta_N}$ όπου $\delta_1, \dots, \delta_N$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $\delta_1 + \dots + \delta_N = k$. Με επαγωγή ως προς k βλέπουμε ότι το πλήθος των N -άδων μη αρνητικών ακεραίων που ικανοποιούν την τελευταία εξίσωση είναι το πολύ ίσο με $(k+1)^N$.] Άρα η F_j , όπως και η G_j , παίρνει το πολύ $(k+1)^N$ τιμές και έπεται ότι είναι συνάρτηση της μορφής

$$(7.5.1) \quad F_j = \sum_{l=1}^{(k+1)^N} H_{l,j} \eta_{a_{l,j}},$$

όπου $H_{l,j} \geq 0$ και η $\{a_{l,j}\}$ είναι φθινουσα ως προς l για σταθερό j . Από το Λήμμα 7.5.3,

$$(7.5.2) \quad \|f_j\|_{p_j}^k = \|F_j\|_{p_j} = \left\| \sum_{l=1}^{(k+1)^N} H_{l,j} \eta_{a_{l,j}} \right\|_{p_j} \geq (k+1)^{-N/q_j} \sum_{l=1}^{(k+1)^N} H_{l,j} \|\eta_{a_{l,j}}\|_{p_j},$$

όπου q_j είναι ο συζυγής εκθέτης του p_j . Γράφουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Phi(f_1, \dots, f_m)}{\prod_{j=1}^m \|f_j\|_{p_j}} \right)^k &= \frac{\int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{j=1}^m G_j(\langle x_1, u_j \rangle, \dots, \langle x_k, u_j \rangle) dx_k \dots dx_1}{\prod_{j=1}^m \|G_j\|_{p_j}} \\ &\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{j=1}^m F_j(\langle x_1, u_j \rangle, \dots, \langle x_k, u_j \rangle) dx_k \dots dx_1}{\prod_{j=1}^m \|F_j\|_{p_j}}. \end{aligned}$$

Από τις (7.5.1) και (7.5.2) η ποσότητα αυτή φράσσεται από

$$J := \frac{\sum_{l_1} \dots \sum_{l_m} H_{l_1,1} \dots H_{l_m,m} \int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{j=1}^m \eta_{a_{l_j,j}}(\langle x_1, u_j \rangle, \dots, \langle x_k, u_j \rangle) dx_k \dots dx_1}{(k+1)^{-N \sum \frac{1}{q_j}} \sum_{l_1} \dots \sum_{l_m} H_{l_1,1} \dots H_{l_m,m} \prod_{j=1}^m \|\eta_{a_{l_j,j}}\|_{p_j}}.$$

Θεωρούμε μια m -άδα $(\eta_{b_1}, \dots, \eta_{b_m})$ και τις συναρτήσεις $(\varphi_{b_1}, \dots, \varphi_{b_m})$ όπως στο Λήμμα 7.5.4. Έχουμε $\eta_{b_j} \leq \varphi_{b_j}$, άρα

$$(7.5.3) \quad \int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{j=1}^m \eta_{b_j}(\langle x_1, u_j \rangle, \dots, \langle x_k, u_j \rangle) \leq \int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{j=1}^m \varphi_{b_j}(\langle x_1, u_j \rangle, \dots, \langle x_k, u_j \rangle).$$

Επίσης,

$$\prod_{j=1}^m \|\varphi_{b_j}\|_{p_j} \leq (3\sqrt{k})^{\sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j}} \prod_{j=1}^m \|\eta_{b_j}\|_{p_j} = (3\sqrt{k})^n \prod_{j=1}^m \|\eta_{b_j}\|_{p_j}.$$

Κάθε φ_{b_j} είναι γινόμενο k ταυτόσημων μονοδιάστατων κεντραρισμένων Gaussian συναρτήσεων $\varphi_{b_j}^{(l)}$ υπολογισμένων στα σημεία $\langle u_j, x_l \rangle$ αντίστοιχα. Συνεπώς, το δεξιό μέλος της (7.5.3) είναι η k -οστή δύναμη των ολοκληρωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ του γινομένου m κεντραρισμένων Gaussian συναρτήσεων υπολογισμένων στα $\langle x, u_j \rangle$, $j = 1, \dots, m$. Αφού

$$\|\varphi_{b_j}\|_{p_j} = \left\| \prod_{l=1}^k \varphi_{b_j}^{(l)} \right\|_{p_j} = \prod_{l=1}^k \|\varphi_{b_j}^{(l)}\|_{p_j},$$

έπεται ότι

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{j=1}^m \varphi_{b_j}(\langle x_1, u_j \rangle, \dots, \langle x_k, u_j \rangle)}{\prod_{j=1}^m \|\varphi_{b_j}\|_{p_j}} \leq D^k.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Phi(f_1, \dots, f_m)}{\prod_{j=1}^m \|f_j\|_{p_j}} \right)^k &\leq (k+1)^{N \sum_{j=1}^m \frac{1}{q_j}} (3\sqrt{k})^n D^k \\ &= (k+1)^{(m-n)N} (3\sqrt{k})^n D^k. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{\Phi(f_1, \dots, f_m)}{\prod_{j=1}^m \|f_j\|_{p_j}} \leq (k+1)^{\frac{(m-n)N}{k}} (3\sqrt{k})^{\frac{n}{k}} D,$$

και αφήνοντας το $k \rightarrow \infty$, ολοκληρώνουμε την απόδειξη. $\square$

7.6 Η γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb και η αντίστροφή της

Ο K. Ball αναδιατύπωσε την ανισότητα Brascamp-Lieb στην περίπτωση που τα διανύσματα u_j και οι συντελεστές $c_j = 1/p_j$ ικανοποιούν τη συνθήκη $I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$ του θεωρήματος του John. Ταυτόχρονα, έδειξε ότι η τιμή της σταθεράς D στην ανισότητα, η οποία πιάνεται πάντα από Gaussian συναρτήσεις, είναι σε αυτή την περίπτωση ίση με 1. Έδωσε επίσης τις πρώτες σημαντικές εφαρμογές αυτής της ανισότητας στην κυρτή γεωμετρία: για παράδειγμα, απέδειξε την αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα την οποία θα παρουσιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 7.6.1 (Ball). Έστω $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1}$ και $c_1, \dots, c_m > 0$ τα οποία ικανοποιούν την

$$I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j.$$

Αν $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx \leq \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{c_j}.$$

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αν τα u_j και c_j ικανοποιούν τη συνθήκη κανονικοποίησης $I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$ τότε η σταθερά στην ανισότητα του Θεωρήματος 7.6.1 είναι ίση με 1.

Πρόταση 7.6.2. Έστω $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1}$ και $c_1, \dots, c_m > 0$ τα οποία ικανοποιούν την $I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$. Τότε,

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx}{\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} g_j \right)^{c_j}} : g_j(t) = e^{-\lambda_j t^2}, \lambda_j > 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\det \left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}} : \lambda_j > 0 \right\} = 1. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι $(u \otimes u)(x) = \langle x, u \rangle u$. Θεωρούμε τις $g_j(t) = \exp(-\lambda_j t^2)$, $j = 1, \dots, m$, όπου λ_j είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Τότε,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(- \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j \langle x, u_j \rangle^2 \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(- \left\langle \left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)(x), x \right\rangle \right) dx \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det \left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}}. \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} g_j \right)^{c_j} &= \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda_j t^2) dt \right)^{c_j} = \prod_{j=1}^m \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_j}} \right)^{c_j} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}} \end{aligned}$$

διότι $c_1 + \dots + c_m = n$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ \left(\frac{\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} g_j \right)^{c_j}}{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx} \right)^2 : g_j(t) = e^{-\lambda_j t^2}, \lambda_j > 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\det \left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}} : \lambda_j > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Αποδεικνύουμε τώρα ότι αυτή η σταθερά είναι ίση με 1.

Έστω $\lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, m$. Για κάθε υποσύνολο $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ με πληθάριθμο $|I| = n$ ορίζουμε

$$\lambda_I = \prod_{j \in I} \lambda_j \quad \text{και} \quad U_I = \det \left(\sum_{j \in I} c_j u_j \otimes u_j \right).$$

Από τον τύπο Cauchy-Binet έχουμε

$$(7.6.1) \quad \det \left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right) = \det \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j (\sqrt{c_j} u_j) \otimes (\sqrt{c_j} u_j) \right) = \sum_{|I|=n} \lambda_I U_I.$$

Θέτοντας $\lambda_j = 1$ στην (7.6.1) βλέπουμε ότι

$$\sum_{|I|=n} U_I = 1.$$

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$(7.6.2) \quad \sum_{|I|=n} \lambda_I U_I \geq \prod_{|I|=n} \lambda_I^{U_I} = \prod_{j=1}^m \lambda_j^{\sum_{I: j \in I} U_I}.$$

Εφαρμόζοντας πάλι τον τύπο Cauchy-Binet έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{\{I: j \in I\}} U_I &= \sum_{|I|=n} U_I - \sum_{\{I: j \notin I\}} U_I = 1 - \det (I_n - (\sqrt{c_j} u_j) \otimes (\sqrt{c_j} u_j)) \\ &= 1 - (1 - c_j |u_j|^2) = c_j. \end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στις (7.6.1) και (7.6.2) βλέπουμε ότι

$$(7.6.3) \quad \det \left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right) \geq \prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}$$

άρα

$$\inf \left\{ \frac{\det \left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}} : \lambda_j > 0 \right\} \geq 1.$$

Επιλέγοντας $\lambda_j = 1$ έχουμε ισότητα στην (7.6.3), και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θέτουμε

$$I(f_1, \dots, f_m) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j} (\langle x, u_j \rangle) dx.$$

Δοκιμάζοντας τις Gaussian συναρτήσεις έχουμε δείξει ότι

$$(7.6.4) \quad \sup \left\{ I(f_1, \dots, f_m) : \int_{\mathbb{R}} f_j = 1, \quad j = 1, \dots, m \right\} \geq 1.$$

Το επόμενο θεώρημα είναι μια αντίστροφη μορφή του Θεωρήματος 7.6.1.

Θεώρημα 7.6.3 (Barthe). Έστω $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1}$ και $c_1, \dots, c_m > 0$ τα οποία ικανοποιούν την $I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$. Αν $h_1, \dots, h_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, ορίζουμε

$$K(h_1, \dots, h_m) = \int_{\mathbb{R}^n}^* \sup \left\{ \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(\vartheta_j) : \vartheta_j \in \mathbb{R}, \quad x = \sum_{j=1}^m \vartheta_j c_j u_j \right\} dx.$$

Τότε,

$$\inf \left\{ K(h_1, \dots, h_m) : \int_{\mathbb{R}} h_j = 1, \quad j = 1, \dots, m \right\} = 1.$$

Δοκιμάζοντας Gaussian συναρτήσεις παίρνουμε και πάλι το πρώτο μέρος αυτής της αντίστροφης ανισότητας Brascamp-Lieb.

Πρόταση 7.6.4. Με το συμβολισμό του Θεωρήματος 7.6.3 έχουμε

$$\inf \left\{ K(h_1, \dots, h_m) : \int_{\mathbb{R}} h_j = 1, \quad j = 1, \dots, m \right\} \leq 1.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $\lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, m$ και τις συναρτήσεις $h_j(t) = \exp(-t^2/\lambda_j)$. Τότε, η συνάρτηση

$$m(x) := \sup \left\{ \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(\vartheta_j) : x = \sum_{j=1}^m \vartheta_j c_j u_j \right\}$$

δίνεται από την

$$m(x) = \exp \left(- \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda_j} \vartheta_j^2 : x = \sum_{j=1}^m \vartheta_j c_j u_j \right\} \right).$$

Ορίζουμε

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j \langle x, u_j \rangle^2 = \langle Ax, x \rangle$$

όπου A είναι ο συμμετρικός θετικά ορισμένος τελεστής $A := \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j$. Ελέγχουμε ότι η δυϊκή νόρμα είναι ακριβώς η

$$\|y\|_*^2 = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda_j} \vartheta_j^2 : y = \sum_{j=1}^m \vartheta_j c_j u_j \right\}.$$

Συνεπώς,

$$\|y\|_*^2 = \langle By, y \rangle,$$

όπου $B = A^{-1}$. Έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} m(x) dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det B}} = \pi^{n/2} \sqrt{\det A}.$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/\lambda_j) dt \right)^{c_j} = \pi^{n/2} \prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j/2}.$$

Αυτό δείχνει ότι

$$\inf \left\{ K^2(h_1, \dots, h_m) : \int_{\mathbb{R}} h_j = 1 \right\} \\ \leq \inf \left\{ \frac{\det(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}} : \lambda_j > 0 \right\} = 1$$

και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

Το βασικό βήμα στο επιχείρημα του Barthe είναι η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 7.6.5. Έστω $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ και $h_1, \dots, h_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt = \int_{\mathbb{R}} h_j(t) dt = 1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Τότε,

$$I(f_1, \dots, f_m) \leq K(h_1, \dots, h_m).$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f_j, h_j είναι συνεχείς και γνήσια θετικές. Για κάθε $j = 1, \dots, m$ ορίζουμε $T_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\int_{-\infty}^{T_j(t)} h_j(s) ds = \int_{-\infty}^t f_j(s) ds.$$

Τότε, κάθε T_j είναι γνησίως αύξουσα, 1-1 και επί, και

$$(7.6.5) \quad T_j'(t) h_j(T_j(t)) = f_j(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ορίζουμε $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ θέτοντας

$$(7.6.6) \quad W(y) = \sum_{j=1}^m c_j T_j(\langle y, u_j \rangle) u_j.$$

Απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$J(W)(y) = \sum_{j=1}^m c_j T_j'(\langle y, u_j \rangle) u_j \otimes u_j.$$

Έπεται ότι

$$\langle [J(W)(y)](v), v \rangle > 0 \quad \text{αν} \quad v \neq 0$$

άρα η W είναι 1-1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$m(x) = \sup \left\{ \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(\vartheta_j) : x = \sum_{j=1}^m \vartheta_j c_j u_j \right\}.$$

Τότε, η (7.6.6) δείχνει ότι

$$m(W(y)) \geq \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(T_j(\langle y, u_j \rangle))$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} m(x) dx &\geq \int_{W(\mathbb{R}^n)} m(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} m(W(y)) \cdot |\det J(W)(y)| dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(T_j(\langle y, u_j \rangle)) \det \left(\sum_{j=1}^m c_j T'_j(\langle y, u_j \rangle) u_j \otimes u_j \right) dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(T_j(\langle y, u_j \rangle)) \prod_{j=1}^m (T'_j(\langle y, u_j \rangle))^{c_j} dy, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 7.6.2. Παίρνοντας υπόψη και την (7.6.5) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} m(x) dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle y, u_j \rangle) dy = I(f_1, \dots, f_m).$$

Με άλλα λόγια, $I(f_1, \dots, f_m) \leq K(h_1, \dots, h_m)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.6.3 και του Θεωρήματος 7.6.1. Θεωρούμε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_1, \dots, f_m$ και $h_1, \dots, h_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ με

$$\int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt = \int_{\mathbb{R}} h_j(t) dt = 1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Τότε,

$$I(f_1, \dots, f_m) \leq K(h_1, \dots, h_m).$$

Παίρνοντας το supremum πάνω από όλες αυτές τις συναρτήσεις f_j και το infimum πάνω από όλες αυτές τις συναρτήσεις h_j βλέπουμε ότι

$$1 \leq \sup \left\{ I(f_1, \dots, f_m) \right\} \leq \inf \left\{ K(h_1, \dots, h_m) \right\} \leq 1,$$

άρα πρέπει να έχουμε ισότητες παντού. $\square$

7.7 Πολυδιάστατη ανισότητα Brascamp–Lieb

Σε αυτήν την ενότητα αποδεικνύουμε την πολυδιάστατη ανισότητα Brascamp–Lieb και την αντίστροφή της. Παρακάτω, με $S^+(\mathbb{R}^k)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $k \times k$ συμμετρικών, θετικά ορισμένων πινάκων. Για κάθε $A \in S^+(\mathbb{R}^k)$ συμβολίζουμε με G_A την Gaussian συνάρτηση $G_A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$G_A(x) = \exp(-\langle Ax, x \rangle).$$

Τέλος, συμβολίζουμε με $L_1^+(\mathbb{R}^k)$ την κλάση των ολοκληρώσιμων μη αρνητικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Θεωρούμε $m \geq n$ και υποθέτουμε ότι για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $c_1, \dots, c_m > 0$ και κάποιους φυσικούς $n_1, \dots, n_m$ μικρότερους ή ίσους από n ισχύει η

$$\sum_{j=1}^m c_j n_j = n.$$

Για κάθε $j = 1, \dots, m$, μας δίνεται μια γραμμική απεικόνιση $B_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_j}$ η οποία είναι επί. Υποθέτουμε επίσης ότι

$$\bigcap_{j=1}^m \text{Ker}(B_j) = \{0\}.$$

Ορίζουμε δύο τελεστές $I, K : L_1^+(\mathbb{R}^{n_1}) \times \dots \times L_1^+(\mathbb{R}^{n_m}) \rightarrow \mathbb{R}$ θέτοντας

$$I(f_1, \dots, f_m) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(B_j x) dx$$

και

$$K(h_1, \dots, h_m) = \int_{\mathbb{R}^m}^* m(x) dx,$$

όπου $\int^*$ είναι το εξωτερικό ολοκλήρωμα και

$$m(x) = \sup \left\{ \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(y_j) \mid y_j \in \mathbb{R}^{n_j} \text{ και } \sum_{j=1}^m c_j B_j^* y_j = x \right\}.$$

Έστω E η μεγαλύτερη σταθερά για την οποία η ανισότητα

$$K(h_1, \dots, h_m) \geq E \cdot \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} h_j \right)^{c_j}$$

ισχύει για όλες τις $h_j \in L_1^+(\mathbb{R}^{n_j})$, και έστω F η μικρότερη σταθερά για την οποία η ανισότητα

$$I(f_1, \dots, f_m) \leq F \cdot \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j \right)^{c_j}$$

για όλες τις $f_j \in L_1^+(\mathbb{R}^{n_j})$. Τότε, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 7.7.1. Οι σταθερές E και F δίνονται από τις

$$E = \inf \left\{ \frac{K(g_1, \dots, g_m)}{\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} g_j \right)^{c_j}} \mid g_j \text{ Gaussian}, j = 1, \dots, m \right\}$$

και

$$F = \sup \left\{ \frac{I(g_1, \dots, g_m)}{\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} g_j \right)^{c_j}} \mid g_j \text{ Gaussian}, j = 1, \dots, m \right\}.$$

Επιπλέον, αν D είναι ο μεγαλύτερος πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει

$$(7.7.1) \quad \det \left(\sum_{j=1}^m c_j B_j^* A_j B_j \right) \geq D \cdot \prod_{j=1}^m (\det A_j)^{c_j}$$

για όλους τους $A_j \in S^+(\mathbb{R}^{n_j})$, τότε

$$E = \sqrt{D} \text{ και } F = \frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα της απόδειξης που δώσαμε για τη μονοδιάστατη περίπτωση.

Θεωρούμε τις σταθερές

$$E_g = \inf \left\{ \frac{K(g_1, \dots, g_m)}{\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} g_j \right)^{c_j}} \mid g_j \text{ Gaussian}, j = 1, \dots, m \right\}$$

και

$$F_g = \sup \left\{ \frac{I(g_1, \dots, g_m)}{\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} g_j \right)^{c_j}} \mid g_j \text{ Gaussian}, j = 1, \dots, m \right\}.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$E = E_g = \sqrt{D} \text{ και } F = F_g = \frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Λήμμα 7.7.2. Με το συμβολισμό του Θεωρήματος 7.7.1 έχουμε $F_g = 1/\sqrt{D}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $g_j = G_{A_j}$, $j = 1, \dots, m$, όπου $A_j \in S^+(\mathbb{R}^{n_j})$. Τότε,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(B_j x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{j=1}^m c_j \langle A_j B_j x, B_j x \rangle\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\left\langle \left(\sum_{j=1}^m c_j B_j^* A_j B_j\right)(x), x \right\rangle\right) dx \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det\left(\sum_{j=1}^m c_j B_j^* A_j B_j\right)}}. \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} G_{A_j}\right)^{c_j} &= \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\langle A_j x, x \rangle)\right)^{c_j} \\ &= \prod_{j=1}^m \left(\frac{\pi^{n_j/2}}{\sqrt{\det A_j}}\right)^{c_j} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\prod_{j=1}^m (\det A_j)^{c_j}}} \end{aligned}$$

διότι $c_1 n_1 + \dots + c_m n_m = n$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_g^2} &= \inf \left\{ \frac{\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} g_j\right)^{c_j}}{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(B_j x) dx} \mid g_j \text{ είναι κεντραρισμένη Gaussian} \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\det\left(\sum_{j=1}^m c_j B_j^* A_j B_j\right)}{\prod_{j=1}^m (\det A_j)^{c_j}} \mid A_j \in S^+(\mathbb{R}^{n_j}) \right\} \\ &= D. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 7.7.3. Έχουμε $E_g \cdot F_g = 1$ και $E_g = 0$ αν και μόνο αν $F_g = +\infty$. Συνεπώς, $F_g = \sqrt{D}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $A_j \in S^+(\mathbb{R}^{n_j})$ και την τετραγωνική μορφή

$$Q(y) = \left\langle \sum_{j=1}^m c_j B_j^* A_j B_j y, y \right\rangle.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$R(x) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m c_j \langle A_j^{-1} x_j, x_j \rangle \mid x_j \in \mathbb{R}^{n_j} \text{ και } x = \sum_{j=1}^m c_j B_j^* x_j \right\}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$R(x) = Q^*(x) = \sup\{\langle x, y \rangle^2 \mid Q(y) \leq 1\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $x = \sum_{j=1}^m c_j B_j^* x_j$ όπου $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$ τότε

$$\langle x, y \rangle^2 = \left\langle \sum_{j=1}^m c_j B_j^* x_j, y \right\rangle^2 = \left(\sum_{j=1}^m \langle \sqrt{c_j} A_j^{-1/2} x_j, \sqrt{c_j} A_j^{1/2} B_j y \rangle \right)^2,$$

άρα, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle^2 &\leq \left(\sum_{j=1}^m |\sqrt{c_j} A_j^{-1/2} x_j|^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m |\sqrt{c_j} A_j^{1/2} B_j y|^2 \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^m c_j \langle x_j, A_j^{-1} x_j \rangle \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m c_j B_j^* A_j B_j y, y \right) \\ &\leq R(x) Q(y). \end{aligned}$$

Επίσης, έχουμε ισότητα στις προηγούμενες ανισότητες αν επιλέξουμε

$$y = \left(\sum_{j=1}^m c_j B_j^* A_j B_j \right)^{-1} (x)$$

και $x_j = A_j B_j y$, $j = 1, \dots, m$. Άρα, $R = Q^*$.

Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι αν $A_j \in S^+(\mathbb{R}^{n_j})$, τότε

$$\frac{I(G_{A_1}, \dots, G_{A_m})}{\prod_{j=1}^m \left(\int G_{A_j} \right)^{c_j}} = \left(\frac{\prod_{j=1}^m (\det A_j)^{c_j}}{\det Q} \right)^{1/2}$$

και

$$\frac{K(G_{A_1^{-1}}, \dots, G_{A_m^{-1}})}{\prod_{j=1}^m \left(\int G_{A_j^{-1}} \right)^{c_j}} = \left(\frac{\prod_{j=1}^m (\det A_j)^{-c_j}}{\det R} \right)^{1/2}.$$

Αφού $R = Q^*$, έχουμε $(\det Q) \cdot (\det R) = 1$. Συνεπώς,

$$\frac{I(G_{A_1}, \dots, G_{A_m})}{\prod_{j=1}^m \left(\int G_{A_j} \right)^{c_j}} \cdot \frac{K(G_{A_1^{-1}}, \dots, G_{A_m^{-1}})}{\prod_{j=1}^m \left(\int G_{A_j^{-1}} \right)^{c_j}} = 1.$$

Από τον ορισμό των E_g και F_g προκύπτει το συμπέρασμα του λήμματος. $\square$

Το βασικό βήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 7.7.1 είναι η επόμενη πρόταση. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $D > 0$.

Πρόταση 7.7.4. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $h_j, f_j \in L_1^+(\mathbb{R}^{n_j})$, $1 \leq j \leq m$, ικανοποιούν την

$$\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j = \int_{\mathbb{R}^{n_j}} h_j = 1.$$

Τότε,

$$K(h_1, \dots, h_m) \geq D \cdot I(f_1, \dots, f_m).$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $C_L(\mathbb{R}^k)$ την κλάση των μη αρνητικών $f \in L_1(\mathbb{R}^k)$ που είναι περιορισμοί κάποιας θετικής συνάρτησης Lipschitz $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ σε κάποια ανοικτή Ευκλείδεια μπάλα. Αρκεί να αποδείξουμε την πρόταση για συναρτήσεις $f_j, h_j \in C_L(\mathbb{R}^{n_j})$. Για να το δούμε αυτό, χρησιμοποιούμε τη μονοτονία των συναρτησοειδών I και K : λόγω της κανονικότητας του μέτρου, για κάθε $f \in L_1^+(\mathbb{R}^n)$ και $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση s που είναι θετικός γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων συμπαγών συνόλων και ικανοποιεί τις $f \geq s$ και $\int f \leq \varepsilon + \int s$. Συνεπώς, για την αντίστροφη ανισότητα Brascamp–Lieb μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f_j, h_j είναι συναρτήσεις αυτής της μορφής. Κάθε τέτοια συνάρτηση s είναι κατά σημείο όριο μιας φθίνουσας ακολουθίας συναρτήσεων Lipschitz, άρα αρκεί να θεωρήσουμε μη αρνητικές συναρτήσεις Lipschitz. Προσθέτοντας σε αυτές συναρτήσεις της μορφής $\frac{1}{N}G$, όπου G είναι η τυπική Gaussian πυκνότητα και $N \rightarrow \infty$, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις μας είναι γνήσια θετικές. Τέλος, περικρίνοντας συναρτήσεις αυτής της μορφής μπορούμε να υποθέσουμε ότι ανήκουν στην κλάση $C_L(\mathbb{R}^n)$. Παρόμοιο επιχείρημα μπορούμε να εφαρμόσουμε για την ανισότητα Brascamp–Lieb. Επιπλέον, αρκεί να ελέγξουμε την τελευταία ανισότητα σε κάποιο πυκνό υποσύνολο του L_1 διότι ο I είναι πλειογραμμικός τελεστής ο οποίος είναι τελεστής με γραμμικό πυρήνα ως προς κάθε f_j , αφού κάθε B_j είναι επί.

Συμβολίζουμε με $\Omega_{f_j}, \Omega_{h_j}$ τις μπάλες $\{f_j > 0\}$ και $\{h_j > 0\}$ αντίστοιχα. Θα χρησιμοποιήσουμε την απεικόνιση του Brenier: υπάρχει μια συνάρτηση $T_j : \Omega_{f_j} \rightarrow \Omega_{h_j}$ τέτοια ώστε

$$(7.7.2) \quad |\det J(T_j)(x)| \cdot h_j(T_j x) = f_j(x)$$

για κάθε $x \in \Omega_{f_j}$. Επιπλέον, η T_j είναι το ανάδελτα μιας κυρτής συνάρτησης (τα βασικά σημεία της απόδειξης παρουσιάζονται στο παράρτημα στο τέλος αυτού του κεφαλαίου). Αφού οι f_j είναι συναρτήσεις Lipschitz και οι $f_j, 1/f_j$ είναι φραγμένες στο Ω_{f_j} , ένα θεώρημα του Caffarelli μας εξασφαλίζει ότι η T_j είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Αφού έχουμε επίσης $h_j > 0$, έπεται ότι η Ιακωβιανή $J(T_j)(x)$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας για κάθε $x \in \Omega_{f_j}$.

Γράφουμε $S = \cap_{j=1}^m B_j^{-1}(\Omega_{f_j}) \subseteq \mathbb{R}^n$ και ορίζουμε μια απεικόνιση $\Theta : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ θέτοντας

$$\Theta(y) := \sum_{j=1}^m c_j B_j^*(T_j(B_j(y))).$$

Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$J(\Theta)(y) = \sum_{j=1}^m c_j B_j^* (J(T_j)(B_j y)) B_j.$$

Παρατηρούμε ότι

$$(7.7.3) \quad |\det J(\Theta)(y)| \geq D \cdot \prod_{j=1}^m |\det J(T_j)(B_j y)|^{c_j} > 0,$$

άρα η $J(\Theta)(y)$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας. Έπεται ότι η Θ είναι 1-1. Χρησιμοποιώντας τις (7.7.2) και (7.7.3) γράφουμε

$$\begin{aligned} K(h_1, \dots, h_m) &= \int_{\mathbb{R}^n} \sup \left\{ \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(B_j^* x_j) \mid x = \sum_{j=1}^m c_j B_j^* x_j \right\} dx \\ &\geq \int_{\Theta(S)} \sup \left\{ \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(B_j^* x_j) \mid x = \sum_{j=1}^m c_j B_j^* x_j \right\} dx \\ &= \int_S |\det J(\Theta)(y)| \sup \left\{ \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(B_j^* y_j) \mid \Theta(y) = \sum_{j=1}^m c_j B_j^* y_j \right\} dy \\ &\geq \int_S |\det J(\Theta)(y)| \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(T_j(B_j y)) dy \\ &\geq D \cdot \int_S \prod_{j=1}^m |\det J(T_j)(B_j y)|^{c_j} \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(T_j(B_j y)) dy \\ &= D \cdot \int_S \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(B_j y) dy \\ &= D \cdot I(f_1, \dots, f_m). \end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.7.1. Συνδυάζοντας το Λήμμα 7.7.2 και το Λήμμα 7.7.3 με την Πρόταση 7.7.4, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{D}} = F &\leq \sup \left\{ I(f_1, \dots, f_m) \mid \int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j = 1 \right\} \\ &\leq \frac{1}{D} \cdot \inf \left\{ K(h_1, \dots, h_m) \mid \int_{\mathbb{R}^{n_j}} h_j = 1 \right\} \\ &\leq E \cdot \frac{1}{D} = \frac{1}{\sqrt{D}}. \end{aligned}$$

Πρέπει να έχουμε ισότητες παντού, και αυτό αποδεικνύει το θεώρημα.

□

Μια παρατήρηση που είναι σημαντική για τις γεωμετρικές εφαρμογές, και η οποία θα χρησιμοποιηθεί στο επόμενο κεφάλαιο, είναι ότι αν οι γραμμικές απεικονίσεις B_j στο Θεώρημα 7.7.1 είναι ορθογώνιες προβολές, ας πούμε P_j , οι οποίες ικανοποιούν την

$$\text{Id} = \sum_{j=1}^m c_j P_j$$

για κάποιους $c_1, \dots, c_m > 0$ τότε η σταθερά D στην (7.7.1) είναι ακριβώς ίση με 1. Αυτό αποδεικνύεται αν ακολουθήσουμε τα βήματα της απόδειξης που δώσαμε για την τιμή της σταθεράς στη μονοδιάστατη ανισότητα Brascamp–Lieb.

Θεώρημα 7.7.5 (Barthe). Έστω $r, n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $i = 1, \dots, r$, έστω F_i ένας d_i -διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και P_i η ορθογώνια προβολή στον F_i . Αν

$$I_n = \sum_{i=1}^r c_i P_i$$

για κάποιους $c_1, \dots, c_r > 0$ τότε για όλες τις μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_i : F_i \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν οι ανισότητες

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^r f_i^{c_i}(P_i x) dx \leq \prod_{i=1}^r \left(\int_{F_i} f_i \right)^{c_i}$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n}^* \sup \left\{ \prod_{i=1}^r f_i^{c_i}(x_i) : x = \sum_{i=1}^r c_i x_i, x_i \in F_i \right\} dx \geq \prod_{i=1}^r \left(\int_{F_i} f_i \right)^{c_i}.$$

7.8 Αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα

Χρησιμοποιώντας τη μονοδιάστατη ανισότητα Brascamp–Lieb θα δείξουμε την αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα του K. Ball.

Θεώρημα 7.8.1 (Ball). (i) Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και Q ένας n -διάστατος κύβος. Μπορούμε να βρούμε γραμμική εικόνα $\bar{K}$ του K τέτοια ώστε

$$\text{vol}_n(\bar{K}) = \text{vol}_n(Q) \quad \text{και} \quad \partial(\bar{K}) \leq \partial(Q).$$

(ii) Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και T ένα κανονικό n -διάστατο simplex. Μπορούμε να βρούμε αφινική εικόνα $\bar{K}$ του K τέτοια ώστε

$$\text{vol}_n(\bar{K}) = \text{vol}_n(T) \quad \text{και} \quad \partial(\bar{K}) \leq \partial(T).$$

Το Θεώρημα 7.8.1 προκύπτει σχεδόν άμεσα από το επόμενο θεώρημα (Θεώρημα 7.8.3) για το οποίο χρειάζεται προηγουμένως να ορίσουμε την έννοια του λόγου όγκων.

Ορισμός 7.8.2. Ο λόγος όγκων ενός κυρτού σώματος K ορίζεται ως εξής:

$$\text{vr}(K) = \inf_{\mathcal{E} \subseteq K} \left(\frac{\text{vol}_n(K)}{\text{vol}_n(\mathcal{E})} \right)^{1/n}$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλα τα ελλειψοειδή $\mathcal{E}$ που περιέχονται στο K .

Θεώρημα 7.8.3 (Ball). (i) *Ανάμεσα σε όλα τα συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, ο κύβος έχει τον μέγιστο λόγο όγκων.*

(ii) *Ανάμεσα σε όλα τα κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, το simplex έχει τον μέγιστο λόγο όγκων.*

Απόδειξη. (i) Θέλουμε να δείξουμε ότι αν ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K είναι στη θέση John τότε $\text{vol}_n(K) \leq 2^n$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν σημεία επαφής u_j του σώματος με την B_2^n και $c_j > 0$ ώστε

$$I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j.$$

Αφού το K είναι συμμετρικό, για κάθε σημείο επαφής u_j του K με την B_2^n έχουμε ότι το $-u_j$ είναι κι αυτό σημείο επαφής. Άρα, το σώμα K περιέχεται στην τομή λωρίδων $C := \{x : |\langle x, u_j \rangle| \leq 1\}$, και ο όγκος του φράσσεται από

$$\text{vol}_n(C) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m 1_{[-1,1]}(\langle x, u_j \rangle)^{c_j} dx \leq \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{[-1,1]} \right)^{c_j} = \prod_{j=1}^m 2^{c_j} = 2^n$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα Brascamp-Lieb, αν πάρουμε υπόψη και το γεγονός ότι $\sum_{j=1}^m c_j = n$.

(ii) Για τη μη συμμετρική περίπτωση, παρατηρούμε αρχικά ότι το n -διάστατο simplex που είναι περιγεγραμμένο στην B_2^n έχει όγκο

$$\frac{n^{n/2}(n+1)^{(n+1)/2}}{n!}$$

(αυτό ελέγχεται ευκολότερα αν δούμε το simplex στον $\mathbb{R}^{n+1}$, πάνω στο υπερεπίπεδο $\sum x_i = 1$). Αρκεί λοιπόν να δείξουμε αυτό το φράγμα για τον όγκο ενός κυρτού σώματος που βρίσκεται στη θέση John. Χρησιμοποιώντας τη μη συμμετρική έκδοση του θεωρήματος του John μπορούμε να βρούμε σημεία επαφής u_j και $c_j > 0$ τέτοια ώστε $\sum_j c_j u_j = 0$ και $I_n = \sum_j c_j u_j \otimes u_j$. Όπως πριν, το K περιέχεται στο σώμα

$$L := \{x : \langle x, u_j \rangle \leq 1, j = 1, \dots, m\}$$

το οποίο είναι φραγμένο διότι $\sum_j c_j u_j = 0$, αρκεί λοιπόν να φράξουμε τον όγκο του L .

Ορίζουμε μια νέα ακολουθία διανυσμάτων $(v_j)_{j=1}^m$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$, τα οποία θα ήταν ορθογώνια στην ακραία περίπτωση όπου το K είναι simplex. Στη συνέχεια, το φράγμα θα προκύψει με εφαρμογή της ανισότητας Brascamp-Lieb σε μια οικογένεια συναρτήσεων που το γινόμενο

τους έχει φορέα έναν κώνο στον $\mathbb{R}^{n+1}$ ο οποίος έχει τομές όμοιες με το K : γράφουμε τον $\mathbb{R}^{n+1}$ ως $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ και για κάθε j ορίζουμε

$$v_j = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \left(-u_j, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{και} \quad d_j = \frac{n+1}{n} c_j \in \mathbb{R}^+.$$

Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$I_{n+1} = \sum_{j=1}^m d_j v_j \otimes v_j.$$

Θέτουμε $f_j(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Brascamp-Lieb παίρνουμε

$$(7.8.1) \quad \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod f_j^{d_j}(\langle x, v_j \rangle) dx \leq \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_j \right)^{d_j} = 1,$$

διότι $\int f_j = 1$.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το ίδιο ολοκλήρωμα πάνω σε κάθε υπερεπίπεδο $x_{n+1} = r$. Βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\prod f_j^{d_j}(\langle x, v_j \rangle)$ δεν μηδενίζεται ακριβώς όταν $\langle x, v_j \rangle \geq 0$ για κάθε $j = 1, \dots, m$, το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν $r \geq 0$ και το σημείο x ανήκει στο $\frac{r}{\sqrt{n}}L \times \{r\}$: αυτό συμβαίνει διότι κάθε f_j είναι μη μηδενική ακριβώς στους μη αρνητικούς $t \in \mathbb{R}$, και σε αυτή την περίπτωση ισούται με $e^{-r\sqrt{n+1}}$ αν λάβουμε υπόψιν μας τη συνθήκη $\sum_{j=1}^m c_j u_j = 0$. Με άλλα λόγια,

$$\begin{aligned} \int_{\{x_{n+1}=r\}} \prod f_j^{d_j}(\langle x, v_j \rangle) dx &= e^{-r\sqrt{n+1}} \text{vol}_n \left(\frac{r}{\sqrt{n}}L \right) \\ &= e^{-r\sqrt{n+1}} \left(\frac{r}{\sqrt{n}} \right)^n \text{vol}_n(L). \end{aligned}$$

Τότε, από την (7.8.1) παίρνουμε

$$1 \geq \text{vol}_n(L) \int_0^\infty e^{-r\sqrt{n+1}} \left(\frac{r}{\sqrt{n}} \right)^n dr = \frac{\text{vol}_n(L) \cdot n!}{n^{n/2}(n+1)^{(n+1)/2}}.$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη παρατηρώντας ότι $\text{vol}_n(K) \leq \text{vol}_n(L)$ και ότι το άνω φράγμα που παίρνουμε για τον $\text{vol}_n(K)$ είναι ακριβώς ο όγκος του simplex. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.8.1. Για δοθέν συμμετρικό κυρτό σώμα K πρέπει να βρούμε γραμμική του εικόνα τέτοια ώστε

$$\partial(\bar{K}) \leq c_n \text{vol}(\bar{K})^{\frac{n-1}{n}}$$

όπου η c_n προσδιορίζεται έτσι ώστε στην περίπτωση του κύβου να έχουμε ισότητα, δηλαδή, $c_n = 2n$. Η θέση που μας το επιτρέπει είναι η θέση John του K : πράγματι, γι' αυτή τη θέση

έχουμε

$$\begin{aligned}\partial(K) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{vol}_n(K + tB_2^n) - \text{vol}_n(K)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{vol}_n((1+t)K) - \text{vol}_n(K)}{t} \\ &= n \text{vol}_n(K) \leq 2n \text{vol}(K)^{\frac{n-1}{n}},\end{aligned}$$

κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 7.8.3(i) για την τελευταία ανισότητα.

Με εντελώς αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 7.8.1(ii) χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά το Θεώρημα 7.8.3(ii). $\square$

7.9 Εφαρμογές της πολυδιάστατης ανισότητας Brascamp-Lieb

Η κλασική ανισότητα Loomis-Whitney συγκρίνει τον όγκο $\text{vol}_n(K)$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ με τον γεωμετρικό μέσο των όγκων $\text{vol}_{n-1}(P_i(K))$ των ορθογώνιων προβολών του στους $e_i^\perp$, όπου $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Έχουμε

$$(7.9.1) \quad \text{vol}_n(K)^{n-1} \leq \prod_{i=1}^n \text{vol}_{n-1}(P_i(K))$$

και ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το K είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο τέτοιο ώστε τα $\pm e_i$ να είναι τα κάθετα διανύσματα στις έδρες του. Σε αυτή την ανισότητα, συμβολίζουμε με $\text{vol}_{n-1}(P_i(K))$ τον $(n-1)$ -διάστατο όγκο του $P_i(K)$ (γενικότερα, αν A είναι ένα συμπαγές κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$, γράφουμε $\text{vol}(A)$ για τον όγκο του A στον αφινικό υπόχωρο $\text{aff}(A)$). Μάλιστα, η (7.9.1) ισχύει για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$.

Μια δυϊκή ανισότητα, στην οποία οι προβολές $P_i(K)$ αντικαθίστανται από τις τομές $K \cap e_i^\perp$, αποδείχθηκε από τον Meyer. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$(7.9.2) \quad \text{vol}_n(K)^{n-1} \geq \frac{n!}{n^n} \prod_{i=1}^n \text{vol}_{n-1}(K \cap e_i^\perp)$$

με ισότητα αν και μόνο αν $K = T(B_1^n)$ όπου $B_1^n = \text{conv}\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ και T είναι ένας διαγώνιος (ως προς την δοθείσα βάση) τελεστής $T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$.

Οι δύο προηγούμενες ανισότητες έχουν γενικευτεί στο εξής πλαίσιο: έστω $u_1, \dots, u_m$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $c_1, \dots, c_m$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του John

$$I_n = \sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i.$$

Τότε, για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$,

$$(7.9.3) \quad \frac{n!}{n^n} \prod_{i=1}^m \text{vol}_{n-1}(K \cap u_i^\perp)^{c_i} \leq \text{vol}_n(K)^{n-1} \leq \prod_{i=1}^m \text{vol}_{n-1}(P_{u_i^\perp}(K))^{c_i}.$$

Η υπόθεση ότι το K έχει κέντρο βάρους το 0 χρειάζεται φυσικά μόνο για την αριστερή

ανισότητα. Οι περιπτώσεις ισότητας είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές στις ανισότητες Loomis-Whitney και Meyer αντίστοιχα. Η δεξιά ανισότητα της (7.9.3) αποδείχθηκε από τον Ball, ενώ η αριστερή ανισότητα αποδείχθηκε από τους Li και Huang. Για την απόδειξη αυτών των γενικότερων ανισοτήτων χρησιμοποιούνται η γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb και η αντίστροφή της.

Μια διαφορετική γενίκευση της ανισότητας Loomis-Whitney αποδείχθηκε από τους Bollobás και Thomason. Για να διατυπώσουμε το αποτέλεσμα τους χρειαζόμαστε κάποιους ορισμούς. Για κάθε μη κενό $\tau \subset [n] := \{1, \dots, n\}$ θέτουμε $F_\tau = \text{span}\{e_j : j \in \tau\}$ και $E_\tau = F_\tau^\perp$. Δεδομένων $s \geq 1$ και $\sigma \subseteq [n]$ λέμε ότι τα (όχι απαραίτητα διακεκριμένα) σύνολα $\sigma_1, \dots, \sigma_r \subseteq \sigma$ σχηματίζουν s -ομοιόμορφη κάλυψη του σ αν κάθε $j \in \sigma$ ανήκει σε ακριβώς s από τα σύνολα σ_i . Η ανισότητα ομοιόμορφης κάλυψης των Bollobás-Thomason δίνει άνω φράγμα για τον όγκο ενός συμπαγούς συνόλου μέσω των όγκων των προβολών του στους υποχώρους συντεταγμένων που αντιστοιχούν σε μια ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$.

Θεώρημα 7.9.1 (Bollobás-Thomason). Έστω $r \geq 1$ και $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ μια s -ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$. Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι η κλειστή θήκη του εσωτερικού του, έχουμε

$$(7.9.4) \quad \text{vol}_n(K)^s \leq \prod_{i=1}^r \text{vol}(P_{F_{\sigma_i}}(K)),$$

όπου $F_\tau = \text{span}\{e_j : j \in \tau\}$ και P_F είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ στον F .

Θα αποδείξουμε αυτήν την ανισότητα καθώς και την ακόλουθη δυϊκή ανισότητα Bollobás-Thomason που αποδείχθηκε πρόσφατα από τον Διακόπουλο.

Θεώρημα 7.9.2. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}(K)$ και $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ μια s -ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$. Τότε,

$$(7.9.5) \quad \text{vol}_n(K)^s \geq \frac{1}{(n!)^s} \prod_{i=1}^r |\sigma_i|! \prod_{i=1}^r \text{vol}(K \cap F_{\sigma_i}).$$

Η (7.9.5) είναι ακριβής: γίνεται ισότητα για κάθε s -ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$ αν $K = T(B_1^n)$ όπου $B_1^n = \text{conv}\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ και $T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$.

Σημειώνουμε ότι η υπόθεση $0 \in \text{int}(K)$ δεν είναι απαραίτητη. Ο Meyer έχει δείξει ότι αν ξεκινήσουμε από τυχόν κυρτό σώμα και εφαρμόσουμε Steiner συμμετριοποίηση ως προς $e_1, \dots, e_n$ τότε το αριστερό μέλος της (7.9.5) μένει αμετάβλητο ενώ το δεξιό αυξάνει. Παράλληλα, μετά από αυτές τις n συμμετριοποιήσεις το K έχει μετασχηματιστεί σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα, το οποίο προφανώς περιέχει το 0 στο εσωτερικό του, συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 7.9.2 γι' αυτό.

Ένας ουσιαστικά ισοδύναμος τρόπος για να διατυπώσουμε το Θεώρημα 7.9.1 είναι ο εξής: για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι η κλειστή θήκη του εσωτερικού του, μπορούμε να βρούμε ένα ορθογώνιο με ακμές παράλληλες στους άξονες, τέτοιο ώστε

$\text{vol}_n(B) = \text{vol}_n(K)$ και

$$(7.9.6) \quad \text{vol}(P_{F_\sigma}(B)) \leq \text{vol}(P_{F_\sigma}(K))$$

για κάθε $\sigma \subseteq [n]$. Παρομοίως, το Θεώρημα 7.9.2 έχει την εξής ισοδύναμη διατύπωση.

Θεώρημα 7.9.3. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}(K)$. Υπάρχει cross-polytope της μορφής $C = \text{conv}(\{\pm \lambda_1 e_1, \dots, \pm \lambda_n e_n\})$, όπου $\lambda_i > 0$, τέτοιο ώστε $\text{vol}_n(C) = \text{vol}_n(K)$ και $\text{vol}(C \cap F_\sigma) \geq \text{vol}(K \cap F_\sigma)$ για κάθε $\sigma \subseteq [n]$.

Το Θεώρημα 7.9.2, και το ισοδύναμό του Θεώρημα 7.9.3, προκύπτουν από μια συναρτησιακή ανισότητα που θα δείξουμε στην Ενότητα 7.9.2. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ την κλάση των λογαριθμικά κοίλων ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$.

Θεώρημα 7.9.4. Έστω $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ με $f(0) = 1$ και $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ μια s -ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$. Τότε,

$$n^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y)^n dy \geq \prod_{i=1}^r \left(\int_{F_i} f(x_i) dx_i \right)^{1/s}.$$

Επιπλέον, αποδεικνύουμε γενικότερες ανισότητες που έχουν ως συνέπεια διάφορες γνωστές επεκτάσεις της ανισότητας Loomis–Whitney και της ανισότητας του Meyer. Το βασικό μας εργαλείο είναι η πολυδιάστατη γενίκευση της γεωμετρικής ανισότητας Brascamp-Lieb και της αντίστροφής της από τον Barthe.

7.9.1 Ανισότητα Brascamp-Lieb και ανισότητες για ομοιόμορφες καλύψεις

Λέμε ότι οι υπόχωροι $F_1, \dots, F_r$ σχηματίζουν s -ομοιόμορφη κάλυψη του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1, \dots, c_r > 0$ για κάποιον $s > 0$ αν

$$(7.9.7) \quad sI_n = \sum_{i=1}^r c_i P_i,$$

όπου I_n είναι ο ταυτοτικός τελεστής και P_i είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ στον F_i . Αποδεικνύουμε το εξής γενικό θεώρημα.

Θεώρημα 7.9.5. Έστω $F_1, \dots, F_r$ υπόχωροι που σχηματίζουν s -ομοιόμορφη κάλυψη του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1, \dots, c_r > 0$. Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$(7.9.8) \quad \text{vol}_n(K)^s \leq \prod_{i=1}^r \text{vol}(P_{F_i}(K))^{c_i}.$$

Η απόδειξη βασίζεται στην πολυδιάστατη γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb, την οποία υπενθυμίζουμε εδώ.

Θεώρημα 7.9.6 (Barthe). Έστω $r, n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $i = 1, \dots, r$, έστω F_i ένας d_i -διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και P_i η ορθογώνια προβολή στον F_i . Αν

$$I_n = \sum_{i=1}^r c_i P_i$$

για κάποιους $c_1, \dots, c_r > 0$ τότε για όλες τις μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_i : F_i \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν οι ανισότητες

$$(7.9.9) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^r f_i^{c_i}(P_i x) dx \leq \prod_{i=1}^r \left(\int_{F_i} f_i \right)^{c_i}$$

και

$$(7.9.10) \quad \int_{\mathbb{R}^n}^* \sup \left\{ \prod_{i=1}^r f_i^{c_i}(x_i) : x = \sum_{i=1}^r c_i x_i, x_i \in F_i \right\} dx \geq \prod_{i=1}^r \left(\int_{F_i} f_i \right)^{c_i}.$$

Στο παραπάνω θεώρημα, το ολοκλήρωμα στον υπόχωρο F_i είναι ως προς το d_i -διάστατο μέτρο Lebesgue στον F_i .

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.9.5. Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $f_i : F_i \rightarrow [0, \infty)$ με $f_i = 1_{P_i(K)}$. Παρατηρούμε ότι αν $x \in K$ τότε $f_i(P_i x) = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, r$. Συνεπώς,

$$1_K(x) \leq \prod_{i=1}^r f_i^{\frac{c_i}{s}}(P_i x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Από το Θεώρημα 7.9.6 παίρνουμε

$$\text{vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_K(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^r f_i^{\frac{c_i}{s}}(P_i x) dx \leq \prod_{i=1}^r \left(\int_{F_i} f_i \right)^{\frac{c_i}{s}} = \prod_{i=1}^r \text{vol}_{n-1}(P_i(K))^{\frac{c_i}{s}},$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\text{vol}_n(K)^s \leq \prod_{i=1}^r \text{vol}_{n-1}(P_i(K))^{c_i}$ όπως θέλαμε. $\square$

Παρατήρηση 7.9.7 (Bollobás-Thomason). Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η ανισότητα Bollobás και Thomason αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο. Παρατηρήστε ότι αν $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ είναι μια s -ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$ τότε οι προβολές $P_i := P_{F_{\sigma_i}}$ ικανοποιούν την

$$sI_n = \sum_{i=1}^r P_i.$$

Συνεπώς, για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 7.9.5 με $c_1 = \dots = c_r = 1$ και παίρνουμε

$$\text{vol}_n(K)^s \leq \prod_{i=1}^r \text{vol}_{n-1}(P_i(K)).$$

που είναι ακριβώς ο ισχυρισμός του Θεωρήματος 7.9.1.

Σαν ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 7.9.5 παίρνουμε επίσης την ακόλουθη ανισότητα των Bollobás και Thomason. Έστω C μια πεπερασμένη συλλογή υποσυνόλων των $[n]$, η οποία δεν είναι απαραίτητα ομοιόμορφη κάλυψη. Υποθέτουμε ότι σε κάθε $\sigma \in C$ έχουμε αντιστοιχίσει κάποιο θετικό πραγματικό βάρος $w(\sigma)$ με τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε $i \in [n]$ να ισχύει $n \sum \{w(\sigma) : i \in \sigma \in C\} = 1$. Τότε, είναι φανερό ότι

$$I_n = \sum_{\sigma \in C} w(\sigma) P_{F_\sigma},$$

και από το Θεώρημα 7.9.5 παίρνουμε

$$\text{vol}_n(K) \leq \prod_{\sigma \in C} \text{vol}(P_{F_\sigma}(K))^{w(\sigma)}.$$

Παρατήρηση 7.9.8 (η ανισότητα του Ball). Έστω $u_1, \dots, u_m$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $c_1, \dots, c_m$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του John

$$I_n = \sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i.$$

Ο Ball απέδειξε ότι για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$,

$$(7.9.11) \quad \text{vol}_n(K)^{n-1} \leq \prod_{i=1}^m \text{vol}_{n-1}(P_{u_i^\perp}(K))^{c_i}.$$

Από το Θεώρημα 7.9.5 μπορούμε να πάρουμε μια απλή απόδειξη της (7.9.11). Παρατηρούμε ότι αν $P_i = P_{u_i^\perp}$ τότε $u_i \otimes u_i = I_n - P_i$, άρα η συνθήκη του John γίνεται $I_n = \sum_{i=1}^m c_i (I_n - P_i)$, απ' όπου παίρνουμε

$$(7.9.12) \quad (n-1)I_n = \sum_{i=1}^m c_i P_i,$$

αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $\sum_{i=1}^m c_i = n$. Τώρα, για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 7.9.5 με $s = n-1$ έχουμε

$$(7.9.13) \quad \text{vol}_n(K)^{n-1} \leq \prod_{i=1}^m \text{vol}_{n-1}(P_{u_i^\perp}(K))^{c_i}.$$

7.9.2 Δυσκή ανισότητα Bollobás–Thomason

Δίνουμε μια απόδειξη μιας πιο γενικής μορφής του Θεωρήματος 7.9.4. Υπενθυμίζουμε ότι $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ είναι η κλάση των λογαριθμικά κοίλων ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$.

Θεώρημα 7.9.9. Έστω $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ με $f(0) = 1$ και $F_1, \dots, F_r$ υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ που σχηματίζουν

s -ομοιόμορφη κάλυψη του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1, \dots, c_r > 0$. Τότε,

$$n^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y)^n dy \geq \prod_{i=1}^r \left(\int_{F_i} f(x_i) dx_i \right)^{c_i/s}.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση ότι $I_n = \sum_{i=1}^r \frac{c_i}{s} P_{F_i}$ έπεται ότι

$$ns = \text{tr}(sI_n) = \sum_{i=1}^r c_i \cdot \text{tr}(P_{F_i}) = \sum_{i=1}^r c_i d_i,$$

όπου $d_i = \dim(F_i)$. Έστω $z \in \mathbb{R}^n$ και $x_i \in F_i$, $i \in [r]$ τέτοια ώστε $z = \sum_{i=1}^r \frac{c_i}{s} x_i$. Τότε,

$$\frac{z}{n} = \sum_{i=1}^r \frac{c_i d_i}{sn} \cdot \frac{x_i}{d_i},$$

και αφού $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ και $\sum_{i=1}^r \frac{c_i d_i}{sn} = 1$ παίρνουμε

$$f(z/n) \geq \prod_{i=1}^r f(x_i/d_i)^{\frac{c_i d_i}{ns}}.$$

Αφού $f(0) = 1$, για κάθε $i \in [r]$ βλέπουμε ότι $f(x_i/d_i) \geq f(x_i)^{1/d_i} f(0)^{1-1/d_i} = f(x_i)^{1/d_i}$. Έπεται ότι

$$f(z/n) \geq \prod_{i=1}^r f(x_i)^{\frac{1}{d_i} \cdot \frac{c_i d_i}{ns}} = \prod_{i=1}^r f(x_i)^{\frac{c_i}{ns}},$$

άρα

$$f(z/n)^n \geq \prod_{i=1}^r f(x_i)^{c_i/s}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$f(z/n)^n \geq \sup \left\{ \prod_{i=1}^r f(x_i)^{c_i/s} : z = \sum_{i=1}^r \frac{c_i}{s} x_i, x_i \in F_i \right\}.$$

Συνεπώς, από την πολυδιάστατη αντίστροφη ανισότητα Brascamp-Lieb (7.9.10) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(z/n)^n dz &\geq \int_{\mathbb{R}^n}^* \sup \left\{ \prod_{i=1}^r f(x_i)^{c_i/s} : z = \sum_{i=1}^r \frac{c_i}{s} x_i, x_i \in F_i \right\} dz \\ &\geq \prod_{i=1}^r \left(\int_{F_i} f(x_i) dx_i \right)^{c_i/s}. \end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = z/n$ ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Η γεωμετρική εφαρμογή του Θεωρήματος 7.9.9 που θα παρουσιάσουμε είναι η ακόλουθη γενική ανισότητα «ομοιόμορφης κάλυψης» για τομές κυρτού σώματος.

Θεώρημα 7.9.10. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}(K)$ και $F_1, \dots, F_r$ υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$, με $\dim(F_i) = d_i$, που σχηματίζουν s -ομοιόμορφη κάλυψη του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1, \dots, c_r > 0$. Τότε,

$$\text{vol}_n(K)^s \geq \frac{1}{(n!)^s} \prod_{i=1}^r (d_i!)^{c_i} \prod_{i=1}^r \text{vol}(K \cap F_i)^{c_i}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7.9.9 για τη συνάρτηση $f(y) = e^{-\|y\|_K}$, όπου $\|y\|_K := \min\{t > 0 : y \in tK\}$ είναι το συναρτησοειδές Minkowski του K . Παρατηρήστε ότι $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ και $f(0) = 1$. Χρησιμοποιώντας την

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\|x\|_A} dx &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\|x\|_A}^{\infty} e^{-t} dt dx = \int_0^{\infty} e^{-t} \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{1}_{\{\|x\| \leq t\}}(x) dx dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} \text{vol}_m(tA) dt = \text{vol}_m(A) \int_0^{\infty} t^m e^{-t} dt = m! \text{vol}_m(A), \end{aligned}$$

η οποία ισχύει για κάθε κυρτό σώμα A στον $\mathbb{R}^m$ με $0 \in \text{int}(A)$, γράφουμε

$$\begin{aligned} n^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y)^n dy &= n^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-n\|y\|_K} dy = n^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|_{\frac{1}{n}K}} dy \\ &= n^n n! \text{vol}_n\left(\frac{1}{n}K\right) = n! \text{vol}_n(K), \end{aligned}$$

και, για κάθε $i \in [r]$,

$$\int_{F_i} f(x_i) dx_i = \int_{F_i} e^{-\|x_i\|_K} dx_i = \int_{F_i} e^{-\|x_i\|_{K \cap F_i}} dx_i = d_i! \text{vol}(K \cap F_i).$$

Έπεται ότι

$$n! \text{vol}_n(K) \geq \prod_{i=1}^r (d_i! \text{vol}(K \cap F_i))^{c_i/s} = \prod_{i=1}^r (d_i!)^{c_i/s} \prod_{i=1}^r \text{vol}(K \cap F_i)^{c_i/s},$$

και έχουμε τον ισχυρισμό του θεωρήματος. $\square$

Παρατήρηση 7.9.11 (δυϊκή ανισότητα Bollobás–Thomason). Μπορούμε να πάρουμε διάφορες εφαρμογές του Θεωρήματος 7.9.10. Αρχικά, έστω $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ μια s -ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$. Θέτοντας $F_i = F_{\sigma_i} = \text{span}(\{e_j : j \in \sigma_i\})$, $i \in [r]$, έχουμε $sI_n = \sum_{i=1}^r P_{F_i}$. Έτσι προκύπτει η δυϊκή ανισότητα Bollobás–Thomason του Θεωρήματος 7.9.2: αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}(K)$ και $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ είναι μια s -ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$ τότε

$$\text{vol}_n(K)^s \geq \frac{1}{(n!)^s} \prod_{i=1}^r |\sigma_i|! \prod_{i=1}^r \text{vol}(K \cap F_i).$$

Στην ειδική περίπτωση $F_i = e_i^\perp$, $i \in [n]$ έχουμε $(n-1)I_n = \sum_{i=1}^n P_{e_i^\perp}$, και εφαρμόζοντας το

Θεώρημα 7.9.2 με $s = n - 1$ και $|\sigma_i| = \dim(F_i) = n - 1$ παίρνουμε την ανισότητα του Meyer

$$\text{vol}_n(K)^{n-1} \geq \frac{n!}{n^n} \prod_{i=1}^n \text{vol}_{n-1}(K \cap e_i^\perp)$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}(K)$, διότι

$$\frac{1}{(n!)^{n-1}} \prod_{i=1}^n |\sigma_i|! = \frac{1}{(n!)^{n-1}} \prod_{i=1}^n (n-1)! = \frac{[(n-1)!]^n}{(n!)^{n-1}} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \frac{n!}{n^n}.$$

Το Θεώρημα 7.9.3 προκύπτει από το Θεώρημα 7.9.2 με ένα επιχείρημα που είναι βασικά το ίδιο με αυτό που χρησιμοποίησαν οι Bollobás και Thomason για την απόδειξη της (7.9.6). Στη συνέχεια, λέμε ότι μια ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$ είναι ανάγωγη αν δεν μπορεί να γραφεί ως ξένη ένωση δύο άλλων ομοιόμορφων καλύψεων του $[n]$. Οι Bollobás-Thomason αποδεικνύουν ότι το πλήθος των ανάγωγων ομοιόμορφων καλύψεων του $[n]$ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.9.3. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}(K)$. Το Θεώρημα 7.9.2 ισχυρίζεται ότι για κάθε ακέραιο $s \geq 1$ και κάθε μη τετριμμένη ανάγωγη s -ομοιόμορφη κάλυψη $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ του $[n]$ ισχύει η ανισότητα $(n! \text{vol}_n(K))^s \geq \prod_{j=1}^r (|\sigma_j|! \text{vol}(K \cap F_{\sigma_j}))$. Επιπλέον, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 7.9.2 για την 1-ομοιόμορφη κάλυψη $(\{i\}, i \in \tau)$ του $\tau \subseteq [n]$ βλέπουμε ότι $|\tau|! \text{vol}(K \cap F_\tau) \geq \prod_{i \in \tau} \text{vol}(K \cap F_{\{i\}})$. Αφού το πλήθος των ανάγωγων ομοιόμορφων καλύψεων του $[n]$ είναι πεπερασμένο, έχουμε πεπερασμένες το πλήθος τέτοιες ανισότητες, οι οποίες ικανοποιούνται από τα στοιχεία του συνόλου $\{|\sigma|! \text{vol}(K \cap F_\sigma) : \sigma \subseteq [n]\}$.

Έστω $\{t_\sigma : \sigma \subseteq [n]\}$ ένα σύνολο θετικών πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν τις $t_\sigma \geq |\sigma|! \text{vol}(K \cap F_\sigma)$ και $t_{[n]} = n! \text{vol}_n(K)$, και είναι μεγιστικοί ως προς το να ικανοποιούν όλες τις παραπάνω ανισότητες αν αντικαταστήσουμε τον $|\sigma|! \text{vol}(K \cap F_\sigma)$ με τον t_σ για κάθε $\sigma \subseteq [n]$. Τότε, γνωρίζουμε ότι $\prod_{j=1}^r t_{\sigma_j} \leq (n! \text{vol}_n(K))^s$ για κάθε (όχι αναγκαστικά ανάγωγη) s -ομοιόμορφη κάλυψη $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ του $[n]$.

Αφού οι $t_{\{i\}}$, $i \in [n]$, είναι μεγιστικοί, βλέπουμε ότι για κάθε $i \in [n]$ μπορούμε να βρούμε μια ανισότητα στην οποία εμφανίζεται ο $t_{\{i\}}$ η οποία να είναι ισότητα. Αν αυτή η ανισότητα είναι του πρώτου είδους τότε υπάρχει s_i -ομοιόμορφη κάλυψη $\bar{\sigma}(i) = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ του $[n]$ με $\sigma_j = \{i\}$ για κάποιο j , τέτοια ώστε $(n! \text{vol}_n(K))^{s_i} = \prod_{j=1}^r t_{\sigma_j}$. Το ίδιο ισχύει αν η ανισότητα είναι του δεύτερου τύπου, δηλαδή αν έχουμε μια ισότητα του τύπου $\prod_{i \in \tau} t_{\{i\}} = t_\tau$ για κάποιο $\tau \subseteq [n]$ με $i \in \tau$. Διότι, επειδή ο t_τ είναι μεγιστικός, μπορούμε να βρούμε μια s_i -ομοιόμορφη κάλυψη $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ του $[n]$ τέτοια ώστε $\tau = \sigma_{j_0}$ για κάποιο j_0 , και τότε η $\bar{\sigma}(i) := (\sigma_j, j \neq j_0) \cup (\{i\} : i \in \tau)$ είναι πάλι s_i -ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$.

Τώρα, ορίζουμε $\bar{\sigma} = \bigcup_{i=1}^n \bar{\sigma}(i)$ και $s = \sum_{i=1}^n s_i$. Τότε, η $\bar{\sigma}$ είναι s -ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$, έχουμε $\{i\} \in \bar{\sigma}$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ και

$$(7.9.14) \quad \prod_{\sigma \in \bar{\sigma}} t_\sigma = (n! \text{vol}_n(K))^s.$$

Αφού η $\bar{\sigma}' := \bar{\sigma} \setminus (\{i\} : i \in [n])$ είναι $(s-1)$ -ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$ πρέπει να ισχύει

$$(7.9.15) \quad \prod_{\sigma \in \bar{\sigma}'} t_{\sigma} \leq (n! \text{vol}_n(K))^{s-1}.$$

Συνδυάζοντας τις (7.9.14) και (7.9.15) βλέπουμε ότι $\prod_{i=1}^n t_{\{i\}} \geq n! \text{vol}_n(K)$. Από την άλλη πλευρά, η $(\{i\} : i \in [n])$ είναι 1-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$, άρα ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα. Συνεπώς,

$$(7.9.16) \quad \prod_{i=1}^n t_{\{i\}} = n! \text{vol}_n(K).$$

Τώρα, έστω $\tau \subseteq [n]$ και ας θεωρήσουμε την 1-ομοιόμορφη κάλυψη $\{\tau\} \cup (\{i\} : i \notin \tau)$ του $[n]$. Χρησιμοποιώντας την (7.9.16) και την υπόθεση ότι $t_{\tau} \geq \prod_{i \in \tau} t_{\{i\}}$ παίρνουμε

$$n! \text{vol}_n(K) \geq t_{\tau} \cdot \prod_{i \notin \tau} t_{\{i\}} \geq \prod_{i \in \tau} t_{\{i\}} \cdot \prod_{i \notin \tau} t_{\{i\}} = \prod_{i=1}^n t_{\{i\}} = n! \text{vol}_n(K),$$

και έπεται ότι

$$(7.9.17) \quad t_{\tau} = \prod_{i \in \tau} t_{\{i\}}$$

για κάθε $\tau \subseteq [n]$. Έπεται ότι αν θεωρήσουμε το $C = \text{conv}(\{\pm \lambda_1 e_1, \dots, \pm \lambda_n e_n\})$ όπου $\lambda_i = t_{\{i\}}/2$,

$$\text{vol}_n(C) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n t_{\{i\}} = \text{vol}_n(K) \quad \text{και} \quad \text{vol}(B \cap F_{\sigma}) = \frac{1}{|\sigma|!} \prod_{i \in \sigma} t_{\{i\}} = \frac{1}{|\sigma|!} t_{\sigma} \geq \text{vol}(K \cap F_{\sigma})$$

για κάθε $\sigma \subseteq [n]$. □

7.10 Παράρτημα: η απεικόνιση του Brenier

Έστω K και T δύο ανοικτά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Με τον όρο «μετασχηματισμός που διατηρεί τον όγκο» εννοούμε μια απεικόνιση $\varphi : K \rightarrow T$ που είναι 1-1, επί και Ιακωβιανή με σταθερή ορίζουσα ίση με $\text{vol}_n(T)/\text{vol}_n(K)$. Σε αυτήν την ενότητα περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $\psi : K \rightarrow T$ που έχει αυτή την ιδιότητα: η Ιακωβιανή της ψ θα είναι θετικά ορισμένη, κάτι που θα εξασφαλίσουμε ορίζοντας $\psi = \nabla f$ για μια, κατάλληλη, δύο φορές διαφορίσιμη συνάρτηση f . Χρησιμοποιώντας αυτή την απεικόνιση, η οποία ονομάζεται «απεικόνιση Brenier» μπορούμε να δώσουμε μια απόδειξη της ανισότητας Brunn-Minkowski ως εξής: αφού $(I_n + \psi)(K) \subseteq K + T$, έχουμε

$$\text{vol}_n(K + T) \geq \int_K |\det J(I_n + \psi)(x)| dx = \int_K |\det(I_n + \text{Hess} f)(x)| dx = \int_K \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i(x)) dx,$$

όπου $\lambda_i(x)$ είναι οι μη αρνητικές ιδιοτιμές της $\text{Hess}f$. Επιπλέον, αφού η ψ διατηρεί τον όγκο, έχουμε $\prod_{i=1}^n \lambda_i(x) = \text{vol}_n(T)/\text{vol}_n(K)$ για κάθε $x \in K$. Συνεπώς, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου παίρνουμε

$$\text{vol}_n(K+T) \geq \int_K \left(1 + \left[\prod_{i=1}^n \lambda_i(x)\right]^{1/n}\right)^n dx = (\text{vol}_n(K)^{1/n} + \text{vol}_n(T)^{1/n})^n.$$

Θέλουμε λοιπόν να ορίσουμε μια απεικόνιση της μορφής $\psi = \nabla f$ για κάποια κυρτή συνάρτηση f ορισμένη στο K , έτσι ώστε $\psi(K) = T$. Αρχικά, θα γενικεύσουμε την έννοια της «διατήρησης του όγκου» για απεικονίσεις που μεταφέρουν ένα μέτρο σε κάποιο άλλο. Φυσικά, ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για την περίπτωση που τα δύο μέτρα είναι τα ομοιόμορφα μέτρα κάποιων κυρτών σωμάτων.

Ορισμός 7.10.1. Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ των Borel μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ ως υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του $C_\infty(\mathbb{R}^n)^*$, του δυϊκού χώρου των άπειρες φορές διαφορίσιμων συναρτήσεων που μηδενίζονται στο άπειρο. Έστω $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Λέμε ότι ένα μέτρο πιθανότητας $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ έχει *περιθώρια* τα μ και ν αν για οποιεσδήποτε φραγμένες Borel μετρήσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν οι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x) d\gamma(x, y)$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} g(y) d\gamma(x, y).$$

Ορισμός 7.10.2 (Rockafellar). Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η G είναι *κυκλικά μονότονη* αν για κάθε $m \geq 2$ και $(x_i, y_i) \in G$, $i \leq m$, έχουμε

$$\langle y_1, x_2 - x_1 \rangle + \langle y_2, x_3 - x_2 \rangle + \cdots + \langle y_m, x_1 - x_m \rangle \leq 0.$$

Πρόταση 7.10.3. Έστω μ και ν δύο Borel έτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, υπάρχει μέτρο πιθανότητας γ στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ που έχει κυκλικά μονότονο φορέα και περιθώρια τα μ, ν .

Η απόδειξη της Πρότασης 7.10.3 βασίζεται στο διακριτό λήμμα που ακολουθεί και σε ένα επιχείρημα προσέγγισης.

Λήμμα 7.10.4. Θεωρούμε $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$ και τα μέτρα πιθανότητας

$$\mu = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \delta_{x_i} \text{ και } \nu = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \delta_{y_i}.$$

Υπάρχει μέτρο πιθανότητας γ στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ το οποίο έχει κυκλικά μονότονο φορέα και περιθώρια τα μ, ν .

Απόδειξη. Για κάθε μετάθεση σ του $\{1, \dots, m\}$ θεωρούμε το μέτρο

$$\gamma_\sigma = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \delta_{(x_{\sigma(i)}, y_i)}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το γ_σ έχει περιθώρια τα μ και ν για κάθε σ . Θέτουμε

$$F(\sigma) = \sum_{i=1}^m \langle y_i, x_{\sigma(i)} \rangle.$$

Θα δείξουμε ότι αν η $F(\sigma)$ είναι μέγιστη τότε ο φορέας $(x_{\sigma(i)}, y_i)$ του γ_σ είναι κυκλικά μονότονος.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $F(I)$ είναι μέγιστη, όπου I είναι η ταυτοτική μετάθεση. Θέλουμε να δείξουμε ότι το $G = \{(x_i, y_i) : i \leq m\}$ είναι κυκλικά μονότονο. Έστω $k \leq m$ και $i_1, \dots, i_k$ διακεκριμένοι δείκτες και ας θεωρήσουμε τα σημεία $(x_{i_s}, y_{i_s}) \in G$. Αν σ είναι η μετάθεση που ορίζεται από τις $\sigma(i_s) = i_{s+1}$ αν $s < k$, $\sigma(i_k) = i_1$ και $\sigma(i) = i$ αλλιώς, τότε

$$\begin{aligned} 0 &\geq F(\sigma) - F(I) = \sum_{s=1}^k (\langle y_{i_s}, x_{\sigma(i_s)} \rangle - \langle y_{i_s}, x_{i_s} \rangle) \\ &= \langle y_{i_1}, x_{i_2} - x_{i_1} \rangle + \langle y_{i_2}, x_{i_3} - x_{i_2} \rangle + \dots + \langle y_{i_k}, x_{i_1} - x_{i_k} \rangle. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

Απόδειξη της Πρότασης 7.10.3. Για δοθέντα μ και ν ορίζουμε ακολουθίες διακριτών μέτρων πιθανότητας $\mu_n \rightarrow \mu$, $\nu_n \rightarrow \nu$ που συγκλίνουν στην ασθενή-* τοπολογία. Από το Λήμμα 7.10.4, για κάθε n υπάρχει γ_n με κυκλικά μονότονο φορέα και περιθώρια τα μ_n , ν_n . Ένα επιχείρημα συμπίεσης (που χρησιμοποιεί το θεώρημα Arzela-Ascoli) εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός ασθενώς-* υπακολουθιακού ορίου γ της γ_n . Το γ έχει κι αυτό κυκλικά μονότονο φορέα και περιθώρια τα μ , ν . □

Η επόμενη πρόταση συνδέει την ιδιότητα της κυκλικής μονοτονίας ενός συνόλου με αυτήν του να περιέχεται στο υποδιαφορικό κάποιας κυρτής συνάρτησης.

Πρόταση 7.10.5 (Rockafellar). Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Τότε, το G περιέχεται στο υποδιαφορικό μιας γνήσιας κυρτής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ αν και μόνο αν το G είναι κυκλικά μονότονο.

Απόδειξη. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το υποδιαφορικό μιας γνήσιας κυρτής συνάρτησης

είναι κυκλικά μονότονο. Έστω $(x_i, y_i) \in \partial(f)$, $i = 1, \dots, m$ (δηλαδή, $y_i \in \partial(f)(x_i)$). Τότε,

$$\begin{aligned}\langle y_1, x_2 - x_1 \rangle &\leq f(x_2) - f(x_1) \\ \langle y_2, x_3 - x_2 \rangle &\leq f(x_3) - f(x_2) \\ &\vdots \\ \langle y_m, x_1 - x_m \rangle &\leq f(x_1) - f(x_m)\end{aligned}$$

από τον ορισμό του υποδιαφορικού. Προσθέτοντας τις ανισότητες παίρνουμε

$$\langle y_1, x_2 - x_1 \rangle + \langle y_2, x_3 - x_2 \rangle + \dots + \langle y_m, x_1 - x_m \rangle \leq 0.$$

Συνεπώς, κάθε $G \subseteq \partial(f)$ είναι κυκλικά μονότονο.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι το G είναι μη κενό και κυκλικά μονότονο, και σταθεροποιούμε $(x_0, y_0) \in G$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ θέτοντας

$$f(x) = \sup\{\langle y_m, x - x_m \rangle + \langle y_{m-1}, x_m - x_{m-1} \rangle + \dots + \langle y_0, x_1 - x_0 \rangle\},$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλα τα $m \geq 0$ και $(x_i, y_i) \in G$, $1 \leq i \leq m$. Η συνάρτηση f είναι κυρτή ως supremum μιας οικογένειας αφηνικών συναρτήσεων. Χρησιμοποιώντας την κυκλική μονοτονία του G ελέγχουμε εύκολα ότι $f(x_0) = 0$. Αυτό δείχνει ότι η f είναι γνήσια. Τέλος, το G περιέχεται στο υποδιαφορικό της f : Έστω $(x, y) \in G$. Θα δείξουμε ότι

$$t + \langle z - x, y \rangle < f(z)$$

για κάθε $t < f(x)$ και κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Από αυτό έπεται ότι $(x, y) \in \partial(f)$. Αφού $t < f(x)$, υπάρχουν $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m) \in G$ τέτοια ώστε

$$t < \langle y_m, x - x_m \rangle + \dots + \langle y_0, x_1 - x_0 \rangle.$$

Από τον ορισμό της f βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}f(z) &\geq \langle y, z - x \rangle + \langle y_m, x - x_m \rangle + \dots + \langle y_0, x_1 - x_0 \rangle \\ &> \langle y, z - x \rangle + t,\end{aligned}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ορισμός 7.10.6. Έστω $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ και $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια μετρήσιμη συνάρτηση που ορίζεται μ -σχεδόν παντού και ικανοποιεί την

$$\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$$

για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$. Τότε, λέμε ότι η T μεταφέρει το μ στο ν και γράφουμε $T\mu = \nu$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $T\mu = \nu$ αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη Borel μετρήσιμη

συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(T(x)) d\mu(x).$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι για κάθε μ και $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ υπάρχει απεικόνιση που είναι η κλίση μιας κυρτής συνάρτησης και μεταφέρει το μ στο ν . Ο Brenier απέδειξε την ύπαρξη και τη μοναδικότητά της κάνοντας κάποιες υποθέσεις ολοκληρωσιμότητας για τις ροπές των μ και ν , οι οποίες αργότερα αφαιρέθηκαν από τον McCann. Η ακριβής διατύπωση του θεωρήματος είναι η εξής.

Θεώρημα 7.10.7 (Brenier-McCann). Έστω $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ και έστω ότι το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Τότε, υπάρχει κυρτή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η $\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ να ορίζεται μ -σχεδόν παντού και να ικανοποιεί την $(\nabla f)_\# \mu = \nu$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 7.10.3 βλέπουμε ότι υπάρχει μέτρο πιθανότητας γ στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ το οποίο έχει κυκλικά μονότονο φορέα και περιθώρια τα μ, ν . Από την Πρόταση 7.10.5, ο φορέας του γ περιέχεται στο υποδιαφορικό μιας γνήσιας κυρτής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Αφού η f είναι κυρτή και το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, η f είναι διαφορίσιμη μ -σχεδόν παντού. Αφού $\text{supp}(\gamma) \subset \partial(f)$, από τον ορισμό του υποδιαφορικού έχουμε $y = \nabla f(x)$ σχεδόν για όλα τα ζεύγη (x, y) ως προς γ . Τότε, για κάθε φραγμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int g(y) d\nu(y) &= \int g(y) d\gamma(x, y) = \int g(\nabla f(x)) d\gamma(x, y) \\ &= \int g(\nabla f(x)) d\mu(x), \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει την $(\nabla f)_\# \mu = \nu$. □

Σημειώνουμε ότι αποτελέσματα ομαλότητας από την θεωρία των ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων εξασφαλίζουν την διαφορισιμότητα της απεικόνισης Brenier. Στην ειδική περίπτωση που το μ είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue σε κάποιο κυρτό σώμα K και το ν είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue σε κάποιο άλλο κυρτό σώμα T , ένα θεώρημα ομαλότητας του Caffarelli δείχνει ότι η f μπορεί να υποτεθεί δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το επόμενο θεώρημα, από το οποίο μπορούμε επίσης να πάρουμε την ανισότητα Brunn-Minkowski όπως εξηγήσαμε στην αρχή αυτής της ενότητας.

Θεώρημα 7.10.8. Έστω K και T δύο ανοικτά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει κυρτή συνάρτηση $f \in C^2(K)$ τέτοια ώστε η $\psi = \nabla f : K \rightarrow T$ να είναι 1-1, επί και να διατηρεί τον όγκο.