

**ΣΗΜΜΥ**  
**Μαθηματική Ανάλυση**  
**(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)**  
2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (2024-25)

**Άσκηση 1.** (α) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους ως προς  $x$  και  $y$  της συνάρτησης

$$f(x, y) = 5x^2y^3 + \sin(x^2y) + e^{xy}.$$

(β) Ομοίως για τη συνάρτηση  $g(x, y) = x^y$ ,  $x > 0$  και  $y \in \mathbb{R}$ .

(γ) Είναι οι παραπάνω συναρτήσεις παραγωγίσιμες;

**Άσκηση 2.** (α) Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη στο  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = c$  για όλα τα μοναδιαία διανύσματα  $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ . Αποδείξτε ότι  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = c = 0$ .

(β) Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  και  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  τέτοιο ώστε για κάθε μοναδιαίο  $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  να ισχύει ότι  $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = u_1^2$ . Αποδείξτε ότι η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $(x_0, y_0)$ .

**Άσκηση 3.** (α) Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μερικώς παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε  $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$  για κάθε  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Αποδείξτε ότι η  $f$  είναι σταθερή.

(β) Έστω  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μερικώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε  $\nabla f(x, y) = \nabla g(x, y)$  για κάθε  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Αποδείξτε ότι υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $f(x, y) = g(x, y) + c$  για όλα τα  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Άσκηση 4.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0, 0) = 0$  και  $f(x, y) = \frac{2x^3 + 3xy^2 + y^3}{x^2 + y^2}$  αν  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(α) Αποδείξτε ότι η είναι συνεχής στο  $(0, 0)$ .

(β) Αποδείξτε, με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνση παραγώγου, ότι η  $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$  υπάρχει για κάθε  $u = (u_1, u_2)$  μοναδιαίο διάνυσμα του  $\mathbb{R}^2$ .

(γ) Αποδείξτε ότι η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ .

**Άσκηση 5.** Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } y = x^2 \text{ και } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

δηλαδή η  $f$  παίρνει την τιμή 0 σε όλα τα σημεία του  $\mathbb{R}^2$  εκτός από τα σημεία  $(x, y) \neq (0, 0)$  της παραβολής  $y = x^2$ , όπου λαμβάνει την τιμή 1. Δείξτε τα εξής.

(α) Η  $f$  είναι ασυνεχής στο  $(0, 0)$  και άρα και μη παραγωγίσιμη.

(β) Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα  $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  ισχύει ότι  $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = 0$ .

**Άσκηση 6.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0, 0) = 0$  και  $f(x, y) = \frac{|x| \sin x + y^3}{|x| + |y|}$  αν  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

- (α) Αποδείξτε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, 0)$ .
- (β) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους  $f_x(0, 0)$  και  $f_y(0, 0)$ .
- (γ) Αποδείξτε ότι η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ .

**Άσκηση 7.** Εξετάστε ως προς την παραγωγισιμότητα στο  $(0, 0)$  τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^4}$  αν  $(x, y) \neq (0, 0)$  και  $f(0, 0) = 0$ .

**Άσκηση 8.** Να βρεθούν  $a, b, c \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{e^{xy} - c - ax - by}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} = 0.$$

Είναι τα  $a, b, c$  μονοσήμαντα ορισμένα;

**Άσκηση 9.** Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x, y) = \frac{x^5}{x^4 + y^6}$  αν  $(x, y) \neq (0, 0)$  και  $f(0, 0) = 0$ .

- (α) Δείξτε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, 0)$ .
- (β) Δείξτε με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνση παραγώγου ότι η  $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$  υπάρχει για κάθε  $u = (u_1, u_2)$  μοναδιαίο διάνυσμα του  $\mathbb{R}^2$ .
- (γ) Δείξτε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ .

**Άσκηση 10.** Έστω

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της  $f$  στο  $(0, 0)$ . Είναι η  $f$  συνεχής; Παραγωγίσιμη;

**Άσκηση 11.** Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας  $z = y \cos(x - y)$ , στο σημείο  $(2, 2, 2)$ .

**Άσκηση 12.** (α) Αποδείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια  $xyz = 1$  σε ένα σημείο της επιφάνειας δεν είναι ποτέ οριζόντιο.

(β) Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ . Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα  $u = (u_1, u_2)$  για το οποίο μεγιστοποιείται η κατευθυνόμενη παράγωγος  $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$ .

Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ανοιχτό και  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν οι  $f$  και  $g$  έχουν την ίδια τιμή και τις ίδιες μερικές παραγώγους στο  $(x_0, y_0)$ , τότε τα γραφήματά τους έχουν το ίδιο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα γραφήματά τους εφάπτονται στο σημείο αυτό.

**Άσκηση 13.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία εφάπτονται τα γραφήματα των συναρτήσεων  $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$  και  $g(x, y) = x^2 - 3xy + 4x - 16$ . Ποιό είναι το κοινό εφαπτόμενο επίπεδο;

**Άσκηση 14.** Ένα έντομο βρίσκεται μέσα σε τοξικό περιβάλλον. Ο βαθμός τοξικότητας, στο σημείο  $(x, y)$ , δίνεται από τη συνάρτηση

$$T(x, y) = 2x^2 - 4y^2.$$

Το έντομο βρίσκεται στο σημείο  $(-1, 2)$ . Σε ποιά κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί για να βρεθεί το ταχύτερο δυνατόν σε περιοχή χαμηλότερης τοξικότητας;

**Άσκηση 15.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση και  $u \in \mathbb{R}^2$ . Αν  $g(x) = f(\langle u, x \rangle)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  και  $v \in \mathbb{R}^2$  μοναδιαίο διάνυσμα τέτοιο ώστε  $v \perp u$ , να δείξετε ότι

$$v \perp \nabla g(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^2.$$

Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της  $g$  στην κατεύθυνση  $v$ ;