

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
 1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Άσκηση 1. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι:

(α) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$.

(β) $\|x + y\| \cdot \|x - y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$, με ισότητα αν και μόνο αν $\langle x, y \rangle = 0$.

Υπόδειξη: (α) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.\end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ που ισχύει για κάθε $a, b \geq 0$, από το (α) παίρνουμε

$$\|x + y\| \cdot \|x - y\| \leq \frac{\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2}{2} = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Άσκηση 2. Έστω x και y μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι:

(α) Τα διανύσματα $\|y\|x + \|x\|y$ και $\|y\|x - \|x\|y$ είναι ορθογώνια.

(β) Το διάνυσμα $z = \|x\|y + \|y\|x$ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν τα x και y .

[Υπόδειξη: Η γωνία που σχηματίζουν δύο μη μηδενικά διανύσματα x και y είναι η μοναδική γωνία $\theta \in [0, \pi]$ με $\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$.]

Υπόδειξη: (α) Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\begin{aligned}(\|y\|x + \|x\|y) \cdot (\|y\|x - \|x\|y) &= \|y\|^2 \langle x, x \rangle - \|y\| \|x\| \langle x, y \rangle + \|x\| \|y\| \langle y, x \rangle - \|x\|^2 \langle y, y \rangle \\ &= \|y\|^2 \|x\|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 = 0.\end{aligned}$$

(β) Η γωνία που σχηματίζουν δύο μη μηδενικά διανύσματα u και v είναι η μοναδική γωνία $\theta \in [0, \pi]$ με

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Συνεπώς, η γωνία θ που σχηματίζουν τα z και x έχει συνημίτονο ίσο με

$$\frac{1}{\|z\| \|x\|} \langle \|x\|y + \|y\|x, x \rangle = \frac{1}{\|z\| \|x\|} (\|x\| \langle y, x \rangle + \|y\| \|x\|^2) = \frac{1}{\|z\|} (\langle y, x \rangle + \|y\| \|x\|)$$

και η γωνία φ που σχηματίζουν τα z και y έχει συνημίτονο ίσο με

$$\frac{1}{\|z\| \|y\|} \langle \|x\|y + \|y\|x, y \rangle = \frac{1}{\|z\| \|y\|} (\|y\| \langle x, y \rangle + \|x\| \|y\|^2) = \frac{1}{\|z\|} (\langle x, y \rangle + \|x\| \|y\|).$$

Αφού οι θ, φ έχουν το ίδιο συνημίτονο και ανήκουν στο $[0, \pi]$, έπεται ότι $\theta = \varphi$.

□

Άσκηση 3. Έστω $B = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}$ η ανοικτή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^d$.

(α) Έστω $x \in B$. Αποδείξτε ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}^d$ με $\|y - x\| < 1 - \|x\|$ ισχύει ότι $y \in B$ (δηλ. $\|y\| < 1$). Συμπεράνατε ότι η ανοικτή μοναδιαία μπάλα είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

(β) Αποδείξτε ότι η B είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δηλαδή, αν $x, y \in B$ τότε για κάθε $t \in (0, 1)$ ισχύει ότι $(1 - t)x + ty \in B$.

Υπόδειξη: (α) Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| < 1 - \|x\| + \|x\| = 1,$$

άρα $y \in B$. Αυτό δείχνει ότι για κάθε $x \in B$ αν θέσουμε $\delta = 1 - \|x\| > 0$ τότε η ανοικτή μπάλα $B(x, \delta)$ περιέχεται στην B , δηλαδή το x είναι εσωτερικό σημείο της B . Άρα, η B είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

(β) Έχουμε $\|x\| < 1$ και $\|y\| < 1$. Για κάθε $t \in (0, 1)$, από τις ιδιότητες της Ευκλείδειας νόρμας παίρνουμε

$$\|(1 - t)x + ty\| \leq \|(1 - t)x\| + \|ty\| = (1 - t)\|x\| + t\|y\| < (1 - t) \cdot 1 + t \cdot 1 = 1,$$

άρα $(1 - t)x + ty \in B$. □

Άσκηση 4. Αποδείξτε ότι το σύνολο $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ και } y > 0\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Υπόδειξη: Έστω $(x_0, y_0) \in U$. Ορίζουμε $\delta = \min\{x_0, y_0\} > 0$ (διότι $x_0 > 0$ και $y_0 > 0$). Τότε, αν $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$ (στην ανοικτή μπάλα με κέντρο το (x_0, y_0) και ακτίνα δ) έχουμε ότι

$$|x - x_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

άρα $x > x_0 - \delta \geq 0$, δηλαδή $x > 0$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $|y - y_0| < \delta$, άρα $y > 0$. Αυτό δείχνει ότι $(x, y) \in U$ για κάθε $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$, δηλαδή το (x_0, y_0) είναι εσωτερικό σημείο του U .

Αφού το (x_0, y_0) ήταν τυχόν σημείο του U , το U είναι ανοικτό σύνολο. □

Άσκηση 5. Έστω $F \subseteq \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι το F είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in F$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}^d$ ισχύει ότι $x \in F$.

Υπόδειξη: ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) με $x_n \in F$ και $x = \lim x_n \notin F$. Τότε, $x \in \mathbb{R}^d \setminus F$ και (αφού το F είναι κλειστό) το $\mathbb{R}^d \setminus F$ είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\|y - x\| < \delta \Rightarrow y \in \mathbb{R}^d \setminus F$. Όμως, η (x_n) συγκλίνει στο x , άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\|x_n - x\| < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι $x_n \in \mathbb{R}^d \setminus F$, και καταλήγουμε σε άτοπο.

($\Leftarrow$) Έστω ότι το F δεν είναι κλειστό. Τότε, το $\mathbb{R}^n \setminus F$ δεν είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $x \notin F$ που δεν είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}^d \setminus F$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ η ανοικτή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα ε δεν περιέχεται ολόκληρη στο $\mathbb{R}^d \setminus F$, άρα υπάρχει $y \in F$ τέτοιο ώστε $\|x - y\| < \varepsilon$. Εφαρμόζοντας αυτήν την παρατήρηση με $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ βρίσκουμε $y_n \in F$ τέτοια ώστε $\|x - y_n\| < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, $\|x - y_n\| \rightarrow 0$ άρα $y_n \rightarrow x$ και όλα τα y_n ανήκουν στο F , άρα η υπόθεση μας δίνει ότι $x \in F$, και έχουμε οδηγηθεί σε άτοπο. □

Άσκηση 6. Έστω $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots$ μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Υπόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n \in F_n$. Αφού η (F_n) είναι φθίνουσα, έχουμε $x_n \in F_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και αφού το F_1 είναι φραγμένο σύνολο, η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$. Θα δείξουμε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, οπότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Έστω $m \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \geq m$ έχουμε $k_n \geq k_m \geq m$, και αφού $x_{k_n} \in F_{k_n}$ και $F_{k_n} \subseteq F_m$ έχουμε ότι $x_{k_n} \in F_m$. Η ακολουθία $(x_{k_n})_{n \geq m}$ είναι υπακολουθία της (x_{k_n}) , περιέχεται στο κλειστό σύνολο F_m και συγκλίνει στο x . Από την προηγούμενη άσκηση συμπεραίνουμε ότι $x \in F_m$. Το $m \in \mathbb{N}$ ήταν τυχόν, άρα $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$. □

Άσκηση 7. Έστω v μη μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^d$ και έστω $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι ο ημίχωρος

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x \rangle < t\}$$

είναι ανοικτό σύνολο. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι ο ημίχωρος $F = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x \rangle \geq t\}$ και το υπερεπίπεδο $C = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x \rangle = t\}$ είναι κλειστά σύνολα.

Υπόδειξη: Έστω $x_0 \in H$, δηλαδή $\langle v, x_0 \rangle < t$. Πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $y \in \mathbb{R}^d$ με $\|y - x_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $y \in H$, δηλαδή $\langle v, y \rangle < t$. Παρατηρούμε ότι αν $y \in \mathbb{R}^d$ και $\|y - x_0\| < \delta$ τότε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\langle v, y \rangle = \langle v, y - x_0 \rangle + \langle v, x_0 \rangle \leq \|v\| \|y - x_0\| + \langle v, x_0 \rangle \leq \delta \|v\| + \langle v, x_0 \rangle,$$

άρα αρκεί να επιλέξουμε το δ έτσι ώστε $0 < \delta < \frac{1}{\|v\|}(t - \langle v, x_0 \rangle)$.

Παρατηρούμε ότι $F = \mathbb{R}^d \setminus H$ άρα το F είναι κλειστό σύνολο. Ομοίως, ο ημίχωρος

$$F' = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x \rangle \leq t\} = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle -v, x \rangle \geq t\}$$

είναι κλειστό σύνολο, άρα το υπερεπίπεδο $C = F \cap F'$ είναι κλειστό σύνολο (η τομή δύο κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο, ή ισοδύναμα η ένωση δύο ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο – εξηγήστε γιατί). $\square$

Άσκηση 8. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(x,y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, \quad f(x,y) = \frac{x - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Υπόδειξη: (α) Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

Τα δύο όρια είναι διαφορετικά, άρα το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8}{(x^2 + x^4)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(1 + x^2)^3} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x^2, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{12}}{(2x^4)^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Τα δύο όρια είναι διαφορετικά, άρα το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$ δεν υπάρχει.

(γ) Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Τα δύο όρια είναι διαφορετικά, άρα το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$ δεν υπάρχει.

(δ) Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

Τα δύο όρια είναι διαφορετικά, άρα το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y^2}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει. $\square$

Άσκηση 9. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Αποδείξτε ότι κατά μήκος κάθε ευθείας $y = \lambda x$, το $f(x, y)$ προσεγγίζει το 0, καθώς $(x, y) \rightarrow 0$, αλλά δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Υπόδειξη: Για κάθε $\lambda \neq 0$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda x^3}{x^4 + \lambda^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda x}{x^2 + \lambda^2} = 0$$

και επίσης, για $\lambda = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Όμως,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Τα δύο όρια είναι διαφορετικά, άρα το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y^2}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει. □

Άσκηση 10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$, ορισμένη στο $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = -1.$$

Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Υπόδειξη: Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε ότι $x + y \neq 0$ αν το y είναι αρκετά κοντά στο 0, δηλαδή $(x, y) \in A$, και

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} = \frac{x}{x} = 1,$$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Ομοίως, για κάθε $y \neq 0$ έχουμε ότι $x + y \neq 0$ αν το x είναι αρκετά κοντά στο 0, δηλαδή $(x, y) \in A$, και

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} = \frac{-y}{y} = -1,$$

άρα

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

Το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει, διότι

$$\lim_{(t,0) \rightarrow (0,0)} f(t, 0) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{(0,t) \rightarrow (0,0)} f(0, t) = -1.$$

Άσκηση 11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$, ορισμένη στο $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 y^2 + (x - y)^2 \neq 0\}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0,$$

αλλά το όριο $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

Υπόδειξη: Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε ότι $x^2 y^2 + (x - y)^2 \neq 0$ αν το y είναι αρκετά κοντά στο 0, δηλαδή $(x, y) \in A$, και

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} = \frac{0}{x^2} = 0,$$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Ομοίως, για κάθε $y \neq 0$ έχουμε ότι $x^2 y^2 + (x - y)^2 \neq 0$ αν το x είναι αρκετά κοντά στο 0, δηλαδή $(x, y) \in A$, και

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} = \frac{0}{y^2} = 0,$$

άρα

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Το $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει, διότι

$$\lim_{(t, 0) \rightarrow (0, 0)} f(t, 0) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{(t, t) \rightarrow (0, 0)} f(t, t) = 1.$$

Άσκηση 12. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$ αν $y \neq 0$ και $f(x, y) = 0$ αν $y = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ αλλά

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \neq \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right).$$

Υπόδειξη: Το $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ υπάρχει, διότι $|f(x, y)| = \left| x \sin \frac{1}{y} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x|$ και $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} |x| = 0$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο παρεμβολής.

Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε ότι δεν υπάρχει το

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y}$$

διότι δεν υπάρχει το $\lim_{y \rightarrow 0} \sin \frac{1}{y}$ (αυτό μπορείτε να το αιτιολογήσετε με την αρχή της μεταφοράς, θεωρώντας τις ακολουθίες $y_n = \frac{1}{2\pi n} \rightarrow 0$ και $y'_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2} \rightarrow 0$). Άρα, δεν έχει καν νόημα να μιλήσουμε για το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right).$$

Από την άλλη πλευρά, ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y} = 0,$$

διότι $\left| x \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x| \rightarrow 0$, άρα

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Άσκηση 13. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} |y| \leq |y|$ για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. $\square$

Άσκηση 14. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τους a, b, c ;

Υπόδειξη: Περιοριζόμαστε στις ευθείες $x = 0$, $y = 0$ και $y = x$. Έχουμε

$$f(0, y) = \frac{cy^2}{y^2} = c \rightarrow 0$$

όταν $y \rightarrow 0$, άρα $c = 0$. Ομοίως,

$$f(x, 0) = \frac{ax^2}{x^2} = a \rightarrow 0$$

όταν $x \rightarrow 0$, άρα $a = 0$. Από τα παραπάνω, $f(x, y) = \frac{bxy}{x^2 + y^2}$, και αφού

$$f(x, x) = \frac{bx^2}{2x^2} = \frac{b}{2} \rightarrow 0$$

όταν $x \rightarrow 0$, συμπεραίνουμε ότι $b = 0$. Τελικά, $a = b = c = 0$. $\square$

Άσκηση 15. (α) Έστω $x_n, x \in \mathbb{R}^d$ με $x_n \rightarrow x$. Αποδείξτε ότι $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \rightarrow B(0, 1)$ με $f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}$ είναι συνεχής 1-1 και επί, με αντίστροφη την $g : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^d$ με $g(y) = \frac{y}{1 - \|y\|}$. Αποδείξτε ότι η g είναι επίσης συνεχής.

Υπόδειξη: (α) Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \implies \|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\|$$

και

$$\|x\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n\| \implies \|x\| - \|x_n\| \leq \|x_n - x\|$$

δηλαδή

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \longrightarrow 0.$$

Έπεται ότι $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

(β) Η f είναι καλά ορισμένη αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ έχουμε

$$\|f(x)\| = \frac{\|x\|}{1 + \|x\|} < 1$$

δηλαδή $f(x) \in B(0, 1)$. Για το επί παρατηρούμε ότι αν $y \in B(0, 1)$ τότε

$$f\left(\frac{y}{1 - \|y\|}\right) = \frac{y}{1 - \|y\|} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\|y\|}{1 - \|y\|}} = y.$$

Τέλος, αν $f(x_1) = f(x_2) = y$ τότε $\frac{x_1}{1+\|x_1\|} = \frac{x_2}{1+\|x_2\|}$ άρα $x_1 = \lambda x_2$ όπου $\lambda = \frac{1+\|x_1\|}{1+\|x_2\|} > 0$, και

$$\frac{\lambda x_2}{1+\|\lambda x_2\|} = \frac{x_2}{1+\|x_2\|} \implies \frac{\lambda}{1+\lambda\|x_2\|} = \frac{1}{1+\|x_2\|}$$

απ' όπου έπεται ότι $\lambda = 1$ και τελικά $x_1 = x_2$. Αυτό δείχνει ότι η f είναι 1-1.

Για τη συνέχεια της f , έστω $x_n, x \in \mathbb{R}^d$ με $x_n \rightarrow x$. Από το (α) έχουμε ότι $\lambda_n := \frac{1}{1+\|x_n\|} \rightarrow \frac{1}{1+\|x\|} = \lambda$. Θα δείξουμε ότι $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$, δηλαδή $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο τυχόν $x \in \mathbb{R}^d$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρήστε ότι η $\|x_n\|$ είναι φραγμένη από κάποιον $M > 0$ ως συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε,

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda x\| &= \|(\lambda_n - \lambda)x_n + \lambda(x - x_n)\| \leq |\lambda_n - \lambda| \|x_n\| + |\lambda| \|x_n - x\| \\ &\leq M |\lambda_n - \lambda| + |\lambda| \|x_n - x\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο. Για την g δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο. □