Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα – 2026

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Σειρές Πραγματικών Αριθμών

1.1 Βασικοί ορισμοί

Σειρά είναι μια άπειρη παράσταση της μορφής

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

όπου (a_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το άθροισμα

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$

ονομάζεται ***μερικό άθροισμα της σειράς*** και η ακολουθία (s_n) που προκύπτει απο αυτά καλείται ***ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς***. Χρησιμοποιώντας το σύμβολο "$\sum$" του αθροίσματος γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

και ομοίως

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Παρατήρηση 1.1.1. Μπορούμε να πάρουμε την ακολουθία (a_n) από την (s_n) αφού $a_1 = s_1$ και για κάθε $n \geq 2$,

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Παρατήρηση 1.1.2. Πολλές φορές είναι χρήσιμο η άθροιση σε μια σειρά να ξεκινάει από το $n = 0$ αντί για το $n = 1$ ή ακόμη και από άλλους φυσικούς αριθμούς πχ. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + \dots$ ή $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

και για τα μερικά αθροίσματα

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \cdots + a_n$$

δηλαδή $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$, ...

Ορισμός 1.1.3. *Έστω η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *και έστω* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της. Αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s$$

*(πεπερασμένο ή άπειρο) τότε το όριο αυτό καλείται **όριο** (ή **άθροισμα**) της σειράς* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *και στην περίπτωση αυτή γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Όταν το όριο s *της σειράς είναι πραγματικός αριθμός θα λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει** στο* $s \in \mathbb{R}$ *ή ότι η σειρά είναι **συγκλίνουσα**. Όταν το όριο της σειράς είναι το* $+\infty$ *(αντ. το* $-\infty$*) τότε θα λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει** στο* $+\infty$ *(αντ. στο* $-\infty$*). Μια σειρά που δεν είναι συγκλίνουσα (δηλαδή το όριό της είτε δεν υπάρχει ή υπάρχει αλλά είναι* $\pm\infty$*) θα καλείται **αποκλίνουσα** σειρά. Ειδικότερα, αν όριό της δεν υπάρχει τότε λέμε ότι η σειρά **ταλαντώνεται**.*

Παράδειγμα 1.1.4. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1 + 1 - 1 + \ldots$ είναι ένα παράδειγμα αποκλίνουσας σειράς που ταλαντώνεται. Πράγματι, έχουμε $s_{2n} = 0 \to 0$ και $s_{2n-1} = -1 \to -1$ και συνεπώς το όριο της (s_n) δεν υπάρχει (διότι αν υπήρχε τότε οι υπακολουθίες (s_{2n}) και (s_{2n-1}) θα συνέκλιναν στο ίδιο όριο).

1.1.1 Μερικά παραδείγματα σειρών

1) Η ***γεωμετρική σειρά***

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \ldots$$

ή γενικότερα

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = a + a\lambda + a\lambda^2 + a\lambda^3 + \ldots$$

όπου $a \neq 0, \lambda$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Όπως θα δούμε η γεωμετρική σειρά είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $\lambda \in (-1,1)$ και στην περίπτωση αυτή το άθροισμα της σειράς είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = \frac{a}{1-\lambda}$$

Πχ.

$$0,3333\cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2) Η ***αρμονική σειρά***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Γενικότερα, έχουμε τις p-***αρμονικές σειρές***,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

όπου $p \in \mathbb{R}$. Θα δούμε ότι η p-αρμονική σειρά είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $p > 1$.

4) Οι ***εναλλάσσουσες σειρές*** είναι οι σειρές της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$$

όπου $a_n > 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εδώ είναι η *εναλλάσσουσα αρμονική σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

1.1.2 Δύο βασικά κριτήρια σύγκλισης σειρών.

Η θεωρία των σειρών επικεντρώνεται στην εύρεση κριτηρίων που δείχνουν αν μια σειρά συγκλίνει ή όχι. Υπενθυμίζουμε ότι όταν λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει* εννοούμε ότι $\lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, όπου $s_n = a_1 + \cdots + a_n$.

1.1.3 Το κριτήριο των όρων

Το πρώτο πράγμα που βλέπουμε σε μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι οι όροι της, δηλαδή η ακολουθία (a_n). Επειδή

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

έπεται άμεσα ότι αν $\lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ τότε

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Έτσι καταλήγουμε στο εξής

Θεώρημα 1.1.5. ***(Κριτήριο Όρων)*** *Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Ισοδύναμα, αν η (a_n) δεν συγκλίνει στο 0 τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

Παράδειγμα 1.1.6. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Πράγματι, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$ (αφού $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$).

Πρόταση 1.1.7. *Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = a + a\lambda + a\lambda^2 + \dots$ συγκλίνει μόνο για $\lambda \in (-1, 1)$ και στην περίπτωση αυτή*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = \frac{a}{1-\lambda}.$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n$ συγκλίνει τότε απο το Θεώρημα 1.1.5 θα πρέπει $\lim_{n\to+\infty}(a\lambda^n) = a \lim_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$. Επειδή $a \neq 0$ αυτό σημαίνει ότι $\lim_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει όταν $|\lambda| \geq 1$ αφού τότε $|\lambda^n| = |\lambda|^n \geq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν τώρα $\lambda \in (-1, 1)$ επειδή

$$s_n = a + a\lambda + \cdots + a\lambda^n = a\left(1 + \cdots + \lambda^n\right) = a\frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}$$

θα έχουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(a\frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}\right) = a\frac{1 - \lim_{n\to+\infty} \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} = \frac{a}{1 - \lambda}$$

□

Παρατήρηση 1.1.8. Τονίζουμε ότι το Θεώρημα 1.1.5 ***δεν*** μας λέει ότι αν $a_n \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Πχ. $1/n \to 0$ αλλά όπως έχουμε αναφέρει η αρμονική σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

1.1.4 Το κριτήριο Cauchy

Το δεύτερο γενικό Κριτήριο σύγκλισης σειρών είναι το Κριτήριο Cauchy. Θυμίζουμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (x_n) καλείται Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|x_m - x_n| < \varepsilon$ για όλα τα $m > n \geq n_0$. Ένα σημαντικό θεώρημα στην Ανάλυση είναι ότι *μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι Cauchy*. Επειδή εξ ορισμού μια σειρά καλείται συγκλίνουσα αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι συγκλίνουσα, το Κριτήριο Cauchy για σύγκλιση σειρών αναδιατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 1.1.9. *(**Κριτήριο Cauchy για σειρές**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Τότε η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (s_n) της σειράς είναι Cauchy, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε*

$$|s_m - s_n| = a_{n+1} + \cdots + a_m < \varepsilon$$

για όλα τα $m > n \geq n_0$.

Το Κριτήριο Cauchy είναι χρήσιμο στην απόδειξη άλλων κριτηρίων σύγκλισης σειρών που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια.

Πρόταση 1.1.10. *Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.*

Πρόταση 1.1.11. *Έστω $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της αρμονικής σειράς. Παρατηρούμε ότι*

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς δεν είναι Cauchy και άρα από το Θεώρημα 1.1.9 η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

1.2 Κριτήρια σειρών με μη αρνητικούς όρους.

Οι πρώτες σειρές που μελετάμε είναι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε μερικά βασικά κριτήρια σύγκλισης τέτοιων σειρών. Είναι εύκολο καταρχάς να δούμε ότι τα μερικά αθροίσματα μιας σειράς με μη αρνητικούς όρους αποτελούν μια **αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών** αφού

$$s_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \geq 0$$

Ως γνωστόν, μια αύξουσα ακολουθία είτε είναι άνω φραγμένη και τότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό είτε δεν είναι άνω φραγμένη και τότε αποκλίνει στο $+\infty$. Συνεπώς, αν $a_n \geq 0$ τότε είτε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in [0, +\infty)$ ή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Με άλλα λόγια πάντα υπάρχει το άθροισμα μιας σειράς με μη αρνητικούς όρους (μπορεί όμως να είναι και το $+\infty$). Έχουμε συνεπώς το εξής.

Πρόταση 1.2.1. *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(1) Αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά συγκλίνει (σε ένα μη αρνητικό πραγματικό αριθμό).

(2) Αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

1.2.1 Το Ολοκληρωτικό Κριτήριο.

Ορισμός 1.2.2. *Αν $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq a$, το **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της f ορίζεται να είναι το όριο*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

και συμβολίζεται με

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$$

Το παραπάνω όριο πάντα υπάρχει (επειδή η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ είναι αύξουσα όταν η f είναι θετική) μπορεί να είναι όμως και $+\infty$. Στην περίπτωση όπου το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ είναι πραγματικός αριθμός λέμε ότι ***το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f συγκλίνει***. Διαφορετικά λέμε ότι ***αποκλίνει***.

Παράδειγμα 1.2.3. Έστω $p \geq 1$ και $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(t) = \frac{1}{t^p}.$$

(i) Αν $p = 1$ τότε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt = +\infty$$

και άρα το το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ αποκλίνει.

(ii) Αν $p > 1$ τότε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\, dt = \frac{1}{p-1}$$

και άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\, dt$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Πράγματι,

$$(\ln t)' = 1/t \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

ενώ για κάθε $a \neq -1$,

$$\left(\frac{t^{a+1}}{a+1}\right)' = t^a \Rightarrow \int_1^x t^a\, dt = \frac{x^{a+1}}{a+1} - \frac{1}{a+1}$$

Άρα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

ενώ αν $p > 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^{-p}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right) = \frac{1}{p-1}$$

αφού λόγω του ότι $p > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-p+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{p-1}} = 0$. □

Πρόταση 1.2.4. *(**Το Ολοκληρωτικό Κριτήριο**) Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ μια θετική και φθίνουσα συνάρτηση. Έστω $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ συγκλίνει. Ειδικότερα, Ισχύει ότι*

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \tag{1.2.1}$$

Απόδειξη. Επειδή η f είναι φθίνουσα έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ για κάθε $x \in [k, k+1]$ και άρα

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \geq f(k+1)$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geq 2$,

$$f(1) + \cdots + f(n-1) \geq \int_1^2 f(x)\, dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)\, dx \geq f(2) + \cdots + f(n)$$

ή ισοδύναμα,

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x)\, dx \geq \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

Άρα,

$$\sum_{k=1}^{n} f(n) \geq \int_1^n f(x)\, dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1)$$

οπότε

$$\int_1^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\, dx$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $a_n = f(n)$ και παίρνοντας όρια έπεται η (1.2.1). □

Παρατήρηση 1.2.5. (*Προσέγγιση του αθροίσματος* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$) Αν $f(x) = 1/x$ τότε η σχέση (1.2.1) δίνει

$$\ln n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$$

Πρόταση 1.2.6. *Η αρμονική σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *αποκλίνει ενώ η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *με* $p > 1$*, συγκλίνει.*

Απόδειξη. Πράγματι, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ με $f(t) = 1/t$. Απο τη Πρόταση 1.2.3 έχουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ αποκλίνει και άρα απο το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει. Αντίστοιχα, για $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ με $f(t) = 1/t^p$ και από την Πρόταση 1.2.3 το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\, dt$ συγκλίνει. □

1.2.2 Το Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy.

Περνάμε τώρα σε ένα δεύτερο Κριτήριο για σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών.

Πρόταση 1.2.7. *(**Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy**) Έστω* (a_n) *φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$ *συγκλίνει. Ειδικότερα, ισχύει ότι*

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \tag{1.2.2}$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα την δεξιά ανισότητα:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) + \dots \\ &\le a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^k}) + \dots \\ &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για την αριστερή ανισότητα:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^k+1} + \dots + a_{2^{k+1}}) + \dots \\ &\ge a_1 + a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + \dots + (a_{2^{k+1}} + \dots + a_{2^{k+1}}) + \dots \\ &= a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^k a_{2^{k+1}} + \dots \\ &\ge \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^n}.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 1.2.8. Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο συμπύκνωσης μπορούμε να δώσουμε και μια γρήγορη απόδειξη της μη σύγκλισης της αρμονικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots = +\infty$$

Ομοίως μπορούμε να δούμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ για $p > 1$ συγκλίνει:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n}$$

που συγκλίνει αφού είναι η γεωμετρική σειρά με λόγο $\lambda = 1/2^{p-1} < 1$

Γενικότερα, μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $k \geq 0$ ισχύει ότι

$$\text{η σειρά } \sum_{n=2^k}^{\infty} a_n \text{ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά } \sum_{n=k}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots \text{ συγκλίνει}$$

Παράδειγμα 1.2.9. Η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ αποκλίνει. Πράγματι, η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot \ln(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2 \cdot n} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

1.2.3 Κριτήρια Σύγκρισης

1.2.4 Το Κριτήριο άμεσης σύγκρισης

Θεώρημα 1.2.10. *Έστω (a_n) και (b_n) δύο ακολουθίες μη αρνητικών αριθμών με την ιδιότητα ότι υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n \leq b_n$, για κάθε $n \geq N_0$. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ή ισοδύναμα, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $\tau_n = b_1 + \cdots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Αν $m > n \geq N_0$ τότε από την υπόθεσή μας έπεται ότι

$$|s_m - s_n| = s_m - s_n = a_m + \cdots + a_{n+1} \leq b_m + \cdots + b_{n+1} = \tau_m - \tau_n = |\tau_m - \tau_n|$$

Από την σχέση αυτή έπεται ότι αν η (τ_n) είναι Cauchy τότε και η (s_n) είναι Cauchy. Ισοδύναμα αν η (s_n) δεν είναι Cauchy τότε ούτε και η (τ_n) είναι Cauchy. Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο Cauchy η πρόταση έπεται. □

Παράδειγμα 1.2.11. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

Πράγματι,

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή όπως έχουμε πεί και θα εξηγήσουμε στα επόμενα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 1.2.12. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Πράγματι, $0 < \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, ι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

1.2.5 Το Κριτήριο οριακής σύγκρισης

Θεώρημα 1.2.13. *(**Κριτήριο οριακής σύγκρισης**) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ σειρές με $a_n \geq 0$ και $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$$

Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Αφού $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$ για $\varepsilon = L/2$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με

$$0 < \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} \Rightarrow 0 < \frac{L}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3L}{2} \cdot b_n \tag{1.2.3}$$

Έστω $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $\tau_n = b_1 + \cdots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Από την (1.2.3) έπεται ότι

$$0 < \tau_n < \frac{2}{L} \cdot s_n \tag{1.2.4}$$

και

$$0 < s_n < \frac{3L}{2} \cdot \tau_n. \tag{1.2.5}$$

Έστω τώρα ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι η (s_n) είναι συγκλίνουσα και άρα φραγμένη. Από την (1.2.4) έπεται ότι η (τ_n) είναι άνω φραγμένη και συνεπώς από την Πρόταση 1.2.1 η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει. Αντίστοιχα με τον ίδιο συλογισμό και χρησιμοποιώντας την (1.2.5) δείχνουμε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Παράδειγμα 1.2.14. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Πράγματι, $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 1.2.15. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

Πράγματι, $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 1.2.16. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+5n+7}$ αποκλίνει.

Πράγματι,

$$\frac{n+1}{n^2+5n+7} = \frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2+5n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}} = 1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+5n+7}$ αποκλίνει.

Το κριτήριο Λόγου (tou D'Alembert) και Ρίζας (του Cauchy) που θα δούμε αμέσως παρακάτω ανάγουν την σύγκλιση μιας σειράς με θετικούς όρους στην μελέτη της ακολουθίας των λόγων $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ και αντίστοιχα των n-οστών ριζών $\sqrt[n]{a_n}$. Πρόκειται στην ουσία για δύο κριτήρια σύγκρισης της σειράς με την γεωμετρική σειρά.

1.2.6 Το Κριτήριο Λόγου

Θεώρημα 1.2.17. *(**Κριτήριο Λόγου**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

(1) Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη. (1) Έστω $\lambda < 1$ και έστω $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $\lambda + \varepsilon < 1$. Αφού $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda + \varepsilon \tag{1.2.6}$$

για κάθε $n \geq N_0$. Θέτουμε $\tilde{\lambda} = \lambda + \varepsilon$. Από την (1.2.6) και με επαγωγή έπεται ότι

$$a_{n_0+k} < a_{n_0}\tilde{\lambda}^k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $c = \dfrac{a_{n_0}}{\tilde{\lambda}^{n_0}}$ παίρνουμε ότι

$$a_n \leq c\tilde{\lambda}^n$$

για κάθε $n \geq N_0$. Επειδή $0 < \tilde{\lambda} < 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c\tilde{\lambda}^n$ συγκλίνει (Πρόταση 1.1.7) και άρα απο το Κριτήριο σύγκρισης (Θεώρημα 1.2.10) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Έστω $\lambda > 1$ και έστω $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $\lambda - \varepsilon > 1$. Αφού $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \lambda - \varepsilon > 1$ για κάθε $n \geq N_0$. Συνεπώς,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

για κάθε $n \geq N_0$. Αυτό σημαίνει ότι η (a_n) είναι τελικά αύξουσα και ειδικότερα, $a_n \geq a_{N_0} > 0$ για κάθε $n \geq N_0$. Αυτό σημαίνει ότι η (a_n) δεν μπορεί να συγκλίνει στο μηδέν και άρα από το Θεώρημα 1.1.5 η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. □

Παρατήρηση 1.2.18. Το Κριτήριο Λόγου δεν μπορεί να αποφανθεί αν $\lambda = 1$. Πχ. και για τις δύο σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

και αντίστοιχα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$$

αλλά, όπως είδαμε απο το Ολοκληρωτικό Κριτήριο, η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παράδειγμα 1.2.19. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

Παράδειγμα 1.2.20. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} &= \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot (n+1) \\
&= \frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}
\end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

1.2.7 Το Κριτήριο Ρίζας

Περνάμε τώρα στο Κριτήριο Ρίζας.

Θεώρημα 1.2.21. *(**Κριτήριο Ρίζας**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda$$

(1) Αν $\lambda<1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Αν $\lambda>1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη. (1) Έστω $\lambda<1$ και $\varepsilon>0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $\lambda+\varepsilon<1$. Αφού $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda$ υπάρχει $N_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sqrt[n]{a_n}\leq\lambda+\varepsilon \tag{1.2.7}$$

για κάθε $n\geq N_0$. Θέτουμε $\tilde{\lambda}+\lambda+\varepsilon$. Από την (1.2.7) έπεται ότι

$$a_n\leq\tilde{\lambda}^n$$

για κάθε $n\geq N_0$. Επειδή $0<\tilde{\lambda}<1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\lambda}^n$ συγκλίνει (Πρόταση 1.1.7) και άρα απο το Κριτήριο Σύγκρισης (Θεώρημα 1.2.10) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Έστω $\lambda>1$ και έστω $\varepsilon>0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $\tilde{\lambda}=\lambda-\varepsilon>1$. Αφού $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda$ υπάρχει $N_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\sqrt[n]{a_n}\geq\lambda-\varepsilon>1$ για κάθε $n\geq N_0$. Συνεπώς,

$$a_n>1$$

για κάθε $n\geq N_0$. Αυτό σημαίνει ότι η (a_n) δεν συγκλίνει στο μηδέν και άρα από το Κριτήριο Όρων η σειρά δεν συγκλίνει. ◻

Παράδειγμα 1.2.22. Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{5n+4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{5+4/n}=3/5<1.$$

Παρατήρηση 1.2.23. Όπως και το Κριτήριο Λόγου, το Κριτήριο Ρίζας δεν μπορεί να αποφανθεί αν $\lambda=1$. Πχ. και για τις δύο σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ έχουμε έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}}=1$$

και ομοίως

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \frac{1}{\left(\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}\right)^2} = 1$$

αλλά η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παρατήρηση 1.2.24. Είναι γνωστό ότι για μια ακολουθία (a_n) θετικών όρων ισχύει ότι

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lambda$$

με την αντίστροφη συνεπαγωγή να μην ισχύει γενικά. Αυτό σημαίνει το Κριτήριο Ρίζας αποφαίνεται όπου αποφαίνεται και το Κριτήριο Λόγου (με τον ίδιο βέβαια τρόπο). Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου το Κριτήριο Λόγου δεν αποφαίνεται αλλά το Ρίζας μπορεί να αποφανθεί. Πχ. η σειρά

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\dots$$

συγκλίνει (στο 2). Επειδή $a_{2n-1} = a_{2n} = 1/2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = 1 \ \text{ ενώ } \ \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 1/2$$

και άρα η ακολουθία $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ δεν είναι συγκλίμουσα. Όμως μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1/2 < 1$ και άρα από το Κριτήριο Ρίζας η σειρά συγκλίνει.

1.3 Εναλλάσσουσες σειρές

Πόρισμα 1.3.1. ***(Κριτήριο Leibniz)*** *Έστω (a_n) φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών όρων. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Δίνουμε σύντομα την απόδειξη. Έστω (s_n) η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$. Παρατηρούμε ότι η (s_{2n}) είναι γνησίως αύξουσα, η (s_{2n-1}) γνησίως φθίνουσα και $s_{2n} < s_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα οι ακολουθίες (s_{2n}) και (s_{2n-1}) συγκλίνουν ως μονότονες και φραγμένες. Επειδή $s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n} \to 0$ οι (s_{2n}) και (s_{2n-1}) συγκλίνουν στο ίδιο όριο $s \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $s_n \to s$. □

Παράδειγμα 1.3.2. Η *εναλλάσσουσα αρμονική* δηλαδή η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

συγκλίνει αφού η $(1/n)$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών.

Παράδειγμα 1.3.3. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots$ συγκλίνει αφού η $(1/n!)$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών.

1.4 Απόλυτη σύγκλιση σειρών

Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ για να εξετάσουμε την σύγκλισή της την μετατρέπουμε σε σειρά με μη αρνητικούς όρους αντικαθιστώντας τους όρους της a_n με τα απόλυτά τους $|a_n|$. Αν η προκύπτουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$

συγκλίνει τότε θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***συγκλίνει απολύτως***. Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο Cauchy (Θεώρημα 1.1.9) αποδεικνύεται η εξής πρόταση.

Πρόταση 1.4.1. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Με άλλα λόγια αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει και κανονικά.*

Απόδειξη. Έστω $\tau_n = |a_1| + \cdots + |a_n|$ και $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι για κάθε $m > n$ έχουμε

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_n| = |\tau_m - \tau_n|$$

και άρα αν η (τ_n) είναι Cauchy τότε και η (s_n) είναι Cauchy. Άρα από το Κριτήριο Cauchy αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. □

Παρατήρηση 1.4.2. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πχ. η εναλλάσσουσα αρμονική $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

Με την χρήση της Πρότασης 1.4.1 τα Κριτήρια Λόγου και Ρίζας διατυπώνονται για σειρές με γενικούς όρους ως εξής.

Πρόταση 1.4.3. ***(Γενικό Κριτήριο Λόγου)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$$

(i) *Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως).*

(ii) *Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

Πρόταση 1.4.4. ***(Γενικό Κριτήριο Ρίζας)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και έστω ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$$

(i) *Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως).*

(ii) *Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

Παράδειγμα 1.4.5. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ συγκλίνει. Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν $x = 0$ τότε η σειρά είναι η $1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$ και άρα συγκλίνει στο 1. Αν $x \neq 0$ τότε θέτοντας $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

και άρα από το Κριτήριο λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ συγκλίνει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Δυναμοσειρές

2.1 Βασικοί ορισμοί

Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x_0 \in \mathbb{R}$. Η παράσταση

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ καλείται *δυναμοσειρά*. Το σημείο a καλείται *κέντρο* της δυναμοσειράς και οι αριθμοί $a_0, a_1, \dots$ καλούνται *συντελεστές* της δυναμοσειράς. Αν το κέντρο είναι το $x_0 = 0$ η δυναμοσειρά παίρνει την πιο απλή μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Ένα από τα πρώτα ερωτήματα που εμφανίζονται με τις δυναμοσειρές είναι για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά έχει νόημα δηλαδή για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Εύκολα βλέπουμε βέβαια ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει για $x = x_0$ αφού στην περίπτωση αυτή γίνεται η σειρά $a_0+0+0+\cdots = a_0$. Το θέμα είναι αν συγκλίνει και για άλλα $x \in \mathbb{R}$. Αποδεικνύεται το εξής

Θεώρημα 2.1.1. *(Θεώρημα Cauchy-Hadamard). Έστω* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *μια δυναμοσειρά. Τότε υπάρχει* $R \in [0, +\infty]$ *τέτοιος ώστε*

(α) Για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ *με* $|x-x_0| < R$ *η δυναμοσειρά συγκλίνει.*

(β) Για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ *με* $|x-x_0| > R$ *η δυναμοσειρά αποκλίνει.*

Αν $R = 0$ *εννοούμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για* $x = x_0$ *και αντίστοιχα αν* $R = +\infty$ *εννοούμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα* $x \in \mathbb{R}$.

Ο R καλείται *ακτίνα σύγκλισης* της δυναμοσειράς και όπως αποδεικνύεται εξαρτάται μόνο από τους συντελεστές (a_n) της δυναμοσειράς. Παρατηρείστε ότι δεν μπορούμε να αποφανθούμε γενικά αν η δυναμοσειρά συγκλίνει ή όχι στα σημεία $x = x_0 \pm R$. Οι περιπτώσεις αυτές εξετάζονται για κάθε δυναμοσειρά ξεχωριστά. Άρα στην περίπτωση αυτή το σύνολο *όλων* των σημείων $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά είναι το διάστημα $(x_0 - R, x_0 + R)$ και ίσως ένα ή και τα δύο άκρα του. Έχουμε συνεπώς ότι το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης R συγκλίνει, αποτελεί ένα διάστημα I του $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τους εξής εγκλεισμούς

$$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq I \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$$

Το διάστημα αυτό θα καλείται *ακριβές διάστημα σύγκλισης* ενώ το διάστημα $(x_0 - R, x_0 + R)$ θα καλείται *ανοικτό διάστημα σύγκλισης* της δυναμοσειράς. Παρατηρείστε ότι αν $R = 0$ τότε $I = \{x_0\}$ ενώ αν $R = +\infty$ τότε $I = \mathbb{R}$.

Σε αρκετές περιπτώσεις η ακτίνα σύγκλισης μπορεί να υπολογισθεί ως εξής.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ μια δυναμοσειρά. Έστω ότι το όριο*

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \tag{2.1.1}$$

ή (αν $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$), το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \varrho \tag{2.1.2}$$

υπάρχει (πεπερασμένο ή άπειρο). Τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι

$$R = \frac{1}{\varrho} \tag{2.1.3}$$

(με τις συμβάσεις $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ και $\dfrac{1}{0} = +\infty$).

Απόδειξη. Όπως έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο των Σειρών, αν το όριο $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ υπάρχει τότε υπάρχει και το $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ και είναι ίσα μεταξύ τους. Υποθέτουμε συνεπώς ότι το όριο $\varrho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ υπάρχει.

Έστω ένα $x \in \mathbb{R}$. Αν $x = a$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + 0 + 0 + \cdots = 0$) και άρα μπορούμε να υποθέσουμε για την συνέχεια ότι $x \neq a$. Εξετάζουμε την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ με το Κριτήριο Ρίζας. Θέτοντας $b_n = a_n(x - x_0)^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\lambda = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x - x_0|\right) \\
&= |x - x_0| \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \\
&= |x - x_0| \cdot \varrho = \frac{|x - x_0|}{R}
\end{aligned}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1) $R = 0$: Τότε $\lambda = +\infty > 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ αποκλίνει. Επειδή το x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός εκτός του a έχουμε ότι η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $x \neq x_0$.

2) $R = +\infty$: Τότε $\lambda = 0 < 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ συγκλίνει. Πάλι, επειδή το x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός εκτός του x_0 έχουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \neq x_0$. Επειδή συγκλίνει και για $x = a$ έπεται ότι στην περίπτωση αυτή συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

3) $R \in (0,+\infty)$: Εδώ έχουμε τις εξής δύο υποπεριπτώσεις :

(α) Αν $|x-x_0| < R$ έχουμε ότι $\lambda < 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει. Συνεπώς, η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $|x-x_0| < R$.

(β) Αν $|x-x_0| > R$ έχουμε ότι $\lambda > 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ αποκλίνει. Συνεπώς, η δυναμοσειρά αποκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $|x-x_0| > R$. □

Παράδειγμα 2.1.3. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

έχει κέντρο το $a = 0$ και συντελεστές $a_n = 1$ για κάθε $n = 0,1,2,\dots$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά αυτή είναι η γεωμετρική σειρά με λόγο x και άρα (όπως είδαμε στο κεφάλαιο των σειρών) συγκλίνει μόνο για $x \in (-1,1)$ και μάλιστα

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. Την σύγκλιση στο $(-1,1)$ μπορούμε να την δούμε πολύ εύκολα και με εφαρμογή της Πρότασης 2.1.2 αφού $a_n = 1$ και άρα

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \text{ ή } \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Παρατηρείστε ότι στα σημεία $x = \pm 1$ η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει (για $x = 1$ παίρνει γίνεται η σειρά $1 + 1 + \dots = +\infty$ ενώ για $x = -1$ γίνεται η σειρά $1 - 1 + 1 - \dots$ που ταλαντώνεται). Άρα το ανοικτό διάστημα $(-1,1)$ είναι και το ακριβές διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Παράδειγμα 2.1.4. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

έχει κέντρο το $a = 0$ και συντελεστές $a_n = 1/n!$ για κάθε $n = 0,1,2,\dots$. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε άμεσα $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ και άρα η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.1.5. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

έχει κέντρο το $a = 0$ και συντελεστές $a_0 = 0$ και $a_n = (-1)^n/n$ για κάθε $n = 1,2,\dots$. Εύκολα βλέπουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ και άρα $R = 1$. Επίσης για $x = 1$ η δυναμοσειρά γίνεται η εναλλάσουσα αρμονική και άρα συγκλίνει ενώ για $x = -1$ είναι η σειρά $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty$. Συνεπώς, το διάστημα $(-1,1]$ είναι το ακριβές διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Παράδειγμα 2.1.6. Έστω η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \dots$$

Για τους συντελεστές της παρατηρούμε ότι $a_{2n-1} = 0$ και $a_{2n} = 1$ και εύκολα βλέπουμε ότι η ακολουθία $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ είναι η ίδια ακολουθία με την (a_n) η οποία δεν συγκλίνει. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να θέσουμε $t = x^2$ και τότε η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή

$$1 + x^2 + x^4 + \cdots = 1 + t + t^2 + \ldots$$

Όπως είδαμε παραπάνω, η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ είναι $R = 1$. Μπορούμε τώρα να δούμε ότι η αρχική μας δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1. Πράγματι, έστω $|x| < 1$. Τότε $|t| = |x^2| < 1$ οπότε $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ με $|t| < 1$ και άρα συγκλίνει. Ομοίως αν $|x| \geq 1$ τότε $|t| = x^2 \geq 1$ και άρα $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ με $|t| > 1$ και άρα δεν συγκλίνει. Παρατηρείστε επίσης ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ είναι η γεωμετρική σειρά με λόγο $\lambda = x^2$ και άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1 - x^2}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Ένας γενικός τρόπος για να βρούμε την ακτίνα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ όταν δεν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ είναι να εφαρμόσουμε *κατευθείαν* το κριτήριο ρίζας ή λόγου όπως στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.1.7. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n}$ είναι $R = 1/\sqrt{2}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $a_{2n+1} = 0$ και $a_{2n} = \dfrac{2^n}{n}$ και άρα

$$\sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{0} \to 0$$

ενώ

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = \sqrt[2n]{\frac{2^n}{n}} = \left(\frac{2^n}{n}\right)^{\frac{1}{2n}} = \left(\sqrt[n]{\frac{2^n}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{\sqrt[n]{n}}\right)^{\frac{1}{2}} \to \sqrt{2}$$

Συνεπώς η ακολουθία $(\sqrt[n]{a_n})$ δεν συγκλίνει και έτσι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 2.1.2. Για να βρούμε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς εργαζόμαστε ως εξής. Σταθεροποιούμε καταρξήν ένα $x \in \mathbb{R}$. Αν $x = 0$ τότε μηδενίζονται όλοι οι όροι της δυναμοσειράς και προφανώς η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x = 0$. Αν $x \neq 0$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n}$ έχει γενικό όρο $b_n = \dfrac{2^n}{n} x^{2n} \neq 0$ και άρα

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{2^{n+1} x^{2(n+1)}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n x^{2n}}\right| = 2\frac{n+1}{n} x^2 \to 2x^2$$

Επειδή

$$2x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/\sqrt{2} \text{ και } 2x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1/\sqrt{2}$$

από το Κριτήριο Λόγου έχουμε ότι αν $|x| < 1/\sqrt{2}$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n}$ συγκλίνει ενώ αν $|x| > 1/\sqrt{2}$ η σειρά αποκλίνει. Άρα $R = 1/\sqrt{2}$.

Στα σημεία $x = \pm 1/\sqrt{2}$ η δυναμοσειρά γίνεται η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που αποκλίνει και άρα το ακριβές διάστημα σύγκλισης ταυτίζεται με το ανοικτό διάστημα σύγκλισης $(-R, R)$. □

Παράδειγμα 2.1.8. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

για κάθε $x \neq 0$ είναι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ με $b_n = \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Έχουμε

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}\right| = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \to 0$$

καταλήγουμε ότι $R = +\infty$, δηλαδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.1.9. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

για κάθε $x \neq 0$ είναι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, με $b_n = \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!}$. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα καταλήγουμε στο ότι $R = +\infty$ δηλαδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

2.2 Βασικές Ιδιότητες των δυναμοσειρών

Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$$

με τύπο

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

2.2.1 Συνέχεια και ολοκλήρωμα δυναμοσειράς

Θεώρημα 2.2.1. *Η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα σύγκλισής της και ισχύει ότι*

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$$

και για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Με άλλα λόγια η δυναμοσειρά ολοκληρώνεται όρο προς όρο:

$$\int_a^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - x_0)^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_a^x (t - x_0)^n\,dt$$

Πρόταση 2.2.2. *Για κάθε $x \in (-1,1)$, ισχύει ότι*

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \tag{2.2.1}$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in (-1,1)$, έχουμε

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-(-t)}\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\end{aligned}$$

□

2.2.2 Παράγωγος δυναμοσειράς

Θεώρημα 2.2.3. *Η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in (x_0-R, x_0+R)$ ισχύει ότι*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

Με άλλα λόγια η δυναμοσειρά παραγωγίζεται όρο προς όρο:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-x_0)^n)'$$

Επιπλέον η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς της $f'(x)$ είναι η ίδια με της f.

Από το παραπάνω θεώρημα βλέπουμε ότι η παράγωγος μιας δυναμοσειράς είναι πάλι μια δυναμοσειρά με την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την αρχική. Εφαρμόζοντας επαναληπτικά το Θεώρημα 2.2.3 παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 2.2.4. *Η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη στο (x_0-R, x_0+R) και ισχύει ότι*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(x-x_0)^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} \tag{2.2.2}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in (x_0-R, x_0+R)$. Επιπλέον η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς της $f^{(k)}(x)$ είναι η ίδια με της f.

Από την (2.2.2) έχουμε ότι

$$f^{(k)}(x_0) = k! a_k$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots$. Λύνοντας ως προς a_k παίρνουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 2.2.5. *Έστω η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{2.2.3}$$

για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ και άρα

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \tag{2.2.4}$$

Πρόταση 2.2.6. *(α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $f' = f$ τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) = ce^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{2.2.5}$$

Απόδειξη. (α) Έχουμε

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^2x} = \frac{f(x)e^x - f(x)e^x}{e^2x} = 0$$

και άρα $\dfrac{f(x)}{e^x} = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Θέτουμε $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$. Από το Παράδειγμα 2.1.4 η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$, ισοδύναμα η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Από το Θεώρημα 2.2.3,

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

και άρα $f(x) = ce^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $f(0) = 1$ έπεται ότι $c = 1$ και άρα $f(x) = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

Πρόταση 2.2.7. *(α) (i) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'' = -f$ και $f(0) = f'(0) = 0$. Τότε $f = 0$.*

(ii) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'' = -f$, $f(0) = x_0$ και $f'(0) = b$. Τότε $f(x) = a\cos x + b\sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \tag{2.2.6}$$

(γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \tag{2.2.7}$$

Απόδειξη. (α) (i) Έχουμε

$$f'' + f = 0 \Rightarrow 2f'f'' + 2f'f = 0 \Rightarrow [(f')^2 + f^2]' = 0$$

και άρα η συνάρτηση $(f')^2 + f^2$ είναι σταθερή. Επειδή $[f'(0)]^2 + f^2(0) = 0$ έπεται ότι $(f')^2 + f^2 = 0$ και άρα $f = 0$.

(ii) Θέτουμε $g(x) = f(x) - a\cos x - b\sin x$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $g'' = -g$ και $g'(0) = g(0) = 0$. Άρα από το (i) έπεται ότι $g = 0$ δηλαδή $f(x) = a\cos x + b\sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Από το (ii) του ερωτήματος (α) έχουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης $f'' = -f$ με αρχικές συνθήκες $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$. Μπορούμε συνεπώς να δείξουμε την (2.2.6) δείχνοντας ότι η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ικανοποιεί όντως αυτές τις ιδιότητες. Πράγματι, από το Παράδειγμα 2.1.8 η $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και από το Θεώρημα 2.2.3,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Οπότε $f'(0) = 1$ και

$$f''(x) = (f')'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -f(x)$$

(γ) Από το (β) και το Θεώρημα 2.2.3,

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

□

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2.3 Το Θεώρημα του Abel

Ένα σημαντικό θεώρημα που αφορά την συνέχεια της δυναμοσειράς στο ακριβές διάστημα σύγκλισης είναι το επόμενο.

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει για $x = x_0 + R$ τότε*

$$\lim_{x\to a+R^-}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\lim_{x\to a+R^-}(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Αντίστοιχα αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει για $x = x_0 - R$ τότε

$$\lim_{x\to a-R^+}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\lim_{x\to a-R^+}(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$$

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι κάθε δυναμοσειρά είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα σύγκλισής της. Συνδυάζοντας το γεγονός αυτό με το Θεώρημα 2.3.1 παίρνουμε τιο εξής.

Πόρισμα 2.3.2. *Κάθε δυναμοσειρά είναι συνεχής στο ακριβές διάστημα σύγκλισής της.*

Παράδειγμα 2.3.3. Ισχύει ότι

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Απόδειξη. Έστω $f(x) = \ln(1+x)$ με $x \in (-1, +\infty)$. Από το Παράδειγμα 2.2.2 έχουμε ότι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x \in (-1, 1) \tag{2.3.1}$$

Για $x = 1$ η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ συγκλίνει αφού εναλλάσσουσα αρμονική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ συγκλίνει. Άρα

$$\ln 2 = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

όπου η πρώτη ισότητα οφείλεται στην συνέχεια της $f(x) = \ln(1+x)$, η δεύτερη στην (2.3.1) και η τρίτη στο Θεώρημα 2.3.1. □

2.4 Πολυώνυμα Taylor

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ που σημαίνει ότι

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Με άλλα λόγια τα πολυώνυμα $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ όσο αυξάνει ο βαθμός τους αποτελούν ολοένα και καλύτερες προσσεγγίσεις της $f(x) = e^x$.

Γενικά, αν μια συνάρτηση f γράφεται ως δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$, τότε από το Πόρισμα 2.2.5 έχουμε ότι $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ και άρα

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \tag{2.4.1}$$

που σημαίνει ότι για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$,

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right) \tag{2.4.2}$$

Ορισμός 2.4.1. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I διάστημα του $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ και $n \in \mathbb{N}$. Έστω ότι η f είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Το πολυώνυμο*

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{2.4.3}$$

καλείται ***πολυώνυμο Taylor της*** f ***το τάξης*** n ***με κέντρο το*** x_0*.*

Επίσης ορίζουμε ***το μηδενικής τάξης πολυώνυμο Taylor της*** f ***με κέντρο το*** x_0 *να είναι το σταθερό πολυώνυμο* $T_0(x) = f(x_0)$*.*

Παράδειγμα 2.4.2. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε τα πολυώνυμα Taylor τάξης $n = 0, 1, 2$ της f με κέντρο το x_0 είναι τα εξής :

$$T_0(x) = f(x_0), \quad T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Παράδειγμα 2.4.3. Τα πολυώνυμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, με κέντρο το $x_0 = 0$ δίνονται από τον τύπο

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Ομοίως τα πολυώνυμα Taylor της συνάρτησης $g(x) = \ln(1 + x)$, $x \in (-1, +\infty)$ με κέντρο το $a = 0$ δίνονται από τον τύπο

$$T_{n,g,0}(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Πρόταση 2.4.4. *Έστω* $n \geq 0$ *ακέραιος,* $f : I \to \mathbb{R}$ $(n + 1)$*-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και* $x_0 \in I$*. Τότε η παράγωγος του πολυωνύμου Taylor τάξης* $n+1$ *της* f *με κέντρο το* x_0 *είναι ίση με το πολυώνυμο Taylor τάξης* n *της* f' *με κέντρο το* x_0*, δηλαδή αν με* $T_{n+1,f}$ *(και αντίστοιχα με* $T_{n,f'}$*) συμβολίσουμε το πολυώνυμο Taylor τάξης* $n + 1$ *της* f *(και αντίστοιχα τάξης* n *της* f'*) με κέντρο το* x_0*, τότε*

$$T'_{n+1,f}(x) = T_{n,f'}(x) \tag{2.4.4}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
T'_{n+1,f}(x) &= \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right)' \\
&= \frac{f'(x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)}{2!}2(x - x_0) + \cdots + + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(n + 1)(x - x_0)^n \\
&= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = T_{n,f'}(x)
\end{aligned}$$

□

Τα επόμενα θεωρήματα δίνουν μια εκτίμηση του πόσο διαφέρουν τα πολυώνυμα Taylor μιας συνάρτησης από την ίδια την συνάρτηση.

Θεώρημα 2.4.5. *(Θεώρημα Μέσης Τιμής για παραγώγους ανώτερης τάξης) Έστω* $n \geq 0$ *ακέραιος. Έστω* $a < b$ *στο* $\mathbb{R}$ *και* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε: (α) Η* f *είναι* n*-φορές παραγωγίσιμη στο* $[a, b]$ *με την* $f^{(n)}$ *να είναι συνεχής στο* $[a, b]$*, και (β) Η* f *είναι* $(n + 1)$*-φορές παραγωγίσιμη στο* (a, b)*. Τότε υπάρχει* $\xi \in (a, b)$ *τέτοιο ώστε αν* T_n *είναι το πολυώνυμο Taylor της* f *το τάξης* n *με κέντρο το* a*, τότε*

$$\frac{f(b) - T_n(b)}{(b - a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \tag{2.4.5}$$

Ισοδύναμα,

$$f(b) = T_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1} \tag{2.4.6}$$

Απόδειξη. Για $n = 0$ το Θεώρημα 2.4.5 είναι το Θεώρημα Μέσης Τιμής αφού $T_0(x) = f(a)$. Έστω $k \geq 0$ ακέραιος και έστω ότι το Θεώρημα 2.4.5 ισχύει για $n = k$. Θα δείξουμε ότι τότε ισχύει και για το $n = k + 1$. Ορίζουμε

$$R_{k+1,f}(x) = f(x) - T_{k+1}(x)$$

για κάθε $x \in I$. Επειδή $R_{k+1,f}(a) = 0$, έχουμε,

$$\frac{f(b) - T_{k+1}(b)}{(b-a)^{k+2}} = \frac{R_{k+1,f}(b) - R_{k+1,f,a}(a)}{(b-a)^{k+2}} \tag{2.4.7}$$

Από την Πρόταση 2.4.4, έχουμε

$$R'_{k+1,f}(x) = f'(x) - T_{k,f'}(x) = R_{k,f'}(x)$$

(όπου $T_{k,f'}$ το πολυώνυμο Taylor της f το τάξης k με κέντρο το a). και άρα από το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy έχουμε ότι υπάρχει $b' \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{R_{k+1,f}(b) - R_{k+1,f}(a)}{(b-a)^{k+2}} = \frac{R'_{k+1}(b')}{(k+2)(b'-a)^{k+1}} = \frac{1}{k+2}\,\frac{f'(b') - T_{k,f'}(b')}{(b'-a)^{k+1}} \tag{2.4.8}$$

Τώρα από την Επαγωγική μας Υπόθεση εφαρμοσμένη για την συνάρτηση f' αντί της f έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b') \subseteq (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f'(b') - T_{k,f'}(b')}{(b'-a)^{k+1}} = \frac{(f')^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \tag{2.4.9}$$

Συνδυάζοντας τις (2.4.7)–(2.4.9) παίρνουμε ότι

$$\frac{f(b) - T_{k+1,f,a}(b)}{(b-a)^{k+2}} = \frac{1}{k+2}\,\frac{(f')^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} = \frac{f^{(k+2)}(\xi)}{(k+2)!}$$

και η απόδειξη του επαγωγικού βήματος έχει ολοκληρωθεί. □

Συνέπεια του Θεωρήματος 2.4.5 είναι το επόμενο.

Θεώρημα 2.4.6. ***(Θεώρημα Taylor I)*** *Έστω $n \geq 0$ ακέραιος. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$, $a \in I$ και $f : I \to \mathbb{R}$, $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε για κάθε $x \in I$ με $x \neq x_0$ υπάρχει $\xi = \xi(x)$ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα x_0 και x τέτοιο ώστε*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

όπου T_n είναι το πολυώνυμο Taylor της f το τάξης n με κέντρο το x_0.

Παράδειγμα 2.4.7. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < x \leq 1$ ισχύει ότι

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} < e^x < 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{3}{(n+1)!} \tag{2.4.10}$$

Π. χ. για $n = 9$ και $x = 1$ παίρνουμε την εξής πολύ καλή προσσέγγιση του e:

$$2,718281 < e < 2,718282$$

Απόδειξη. Από το Παράδειγμα 2.2.6 έχουμε ότι το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Έστω $n \geq 1$ ακέραιος και έστω $x \in (0,1]$. Από το πορίσμα 2.4.6 υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$$e^x = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = T_n(x) + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{2.4.11}$$

Επειδή η $e^x > 0$ και $0 < x \leq 1$ έχουμε ότι $\dfrac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} > 0$ και άρα από την (2.4.11) προκύπτει ότι

$$T_n(x) < e^x \tag{2.4.12}$$

Από την άλλη μεριά η συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $0 \leq x \leq 1$ έχουμε ότι $e^\xi < e < 3$ και άρα από την (2.4.11) παίρνουμε ότι

$$e^x < T_n(x) + \frac{3}{(n+1)!}. \tag{2.4.13}$$

Από τις (2.4.12) και (2.4.13) προκύπτει τώρα άμεσα η (2.4.10). □

Θεώρημα 2.4.8. ***(Θεώρημα Taylor II)*** *Έστω $n \geq 1$ ακέραιος. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ και $f : I \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η f είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \tag{2.4.14}$$

Ισοδύναμα, για κάθε $x \in I$ με $x \neq x_0$

$$f(x) = T_n(x) + \varepsilon(x)(x - x_0)^n \quad \text{με} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \tag{2.4.15}$$

όπου T_n είναι το πολυώνυμο Taylor της f το τάξης n με κέντρο το x_0.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα με Επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$. Για $n = 1$ προκύπτει άμεσα από την παραγωγισιμότητα της f στο x_0. Πράγματι,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_1(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - a} - f'(x_0) = 0$$

Έστω $k \in \mathbb{N}$ και έστω ότι το Θεώρημα 2.4.8 ισχύει για $n = k$. Θα δείξουμε ότι τότε ισχύει και για $n = k + 1$.

Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια $(k+1)$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα $a \in I$. Επειδή

$$\lim_{x\to a}(f(x) - T_n(x)) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

το όριο $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{k+1,f,a}(x)}{(x - x_0)^{k+1}}$ είναι απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$. Άρα από τον κανόνα De l'Hospital και την Πρόταση 2.4.4 έχουμε

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{k+1}(x)}{(x - x_0)^{k+1}} = \lim_{x\to a} \frac{[f(x) - T_{k+1}(x)]'}{[(x - x_0)^{k+1}]'} = \frac{1}{k+1} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{k,f'}(x)}{(x - x_0)^k} = 0$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την υπόθεση ότι το Θεώρημα 2.4.8 ισχύει για $n = k$ (με την f' στην θέση της f). □

Πρόταση 2.4.9. *(Κριτήριο για τοπικά ακρότατα) Έστω $n \in \mathbb{N}$, I διάστημα του $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η f είναι $2n$-φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Αν $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{2n-1}(x_0) = 0$ και $f^{2n}(x_0) > 0$ (αντ. $f^{2n}(x_0) < 0$) τότε το x_0 είναι γνήσιο τοπικό ελάχιστο (αντ. μέγιστο) της f, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) < f(x)$ (αντ. $f(x_0) > f(x)$) για κάθε $x \in I$ με $|x - x_0| < \delta$.*

Απόδειξη. Έστω $f^{2n}(x_0) > 0$ (αν $f^{2n}(x_0) < 0$ η απόδειξη είναι παρόμοια ή μπορούμε να θεωρήσουμε την $-f$). Επειδή $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{2n-1}(x_0) = 0$ έπεται οτι

$$T_{2n,f,a}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(2n-1)}(x_0)}{(2n-1)!}(x - x_0)^{2n-1} + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n}$$

και άρα από το Θεώρημα 2.4.8, έχουμε

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{2n,f,a}(x)}{(x - x_0)^{2n}} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(x_0) - f^{(2n)}(x_0)(x - x_0)^{2n}}{(x - x_0)^{2n}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n}} = f^{(2n)}(x_0) > 0$$

Αυτό σημαίνει ότι το πηλίκο $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2n}}$ είναι θετικό όταν το x είναι αρκετά κοντά στο x_0. Συνεπώς, επειδή $(x - x_0)^{2n} > 0$ για κάθε $x \neq x_0$, θα πρέπει και ο αριθμητής $f(x) - f(x_0)$ να είναι θετικός όταν το x είναι αρκετά κοντά στο x_0. Με άλλα λόγια υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > f(x_0)$ για κάθε $x \in I$ με $|x - x_0| < \delta$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Το ολοκλήρωμα Riemann ορίσθηκε για *φραγμένες* πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα *κλειστό φραγμένο διάστημα* του $\mathbb{R}$. Στο κεφάλαιο αυτό θα γενικεύσουμε την έννοια του ολοκληρώματος για πραγματικές συναρτήσεις που δεν είναι κατανάγκη φραγμένες ή δεν ορίζονται σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα του $\mathbb{R}$. Ολοκληρώματα τέτοιου είδους καλούνται *γενικευμένα ολοκληρώματα*. Βασική προυπόθεση για να ορισθούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της (για παράδειγμα να είναι μια συνεχής συνάρτηση).

Τα γενικευμένα ολοκληρώματα θα τα κατατάξουμε σε τρία είδη ανάλογα με το πεδίο ορισμού της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Αν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα *κλειστό μη φραγμένο διάστημα* (δηλαδή είναι της μορφής $[a, +\infty)$ ή $(-\infty, b]$ με $a, b \in \mathbb{R}$) τότε λέμε ότι έχουμε *γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄ είδους*. Αν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα *ημιανοικτό και φραγμένο διάστημα* (δηλαδή της μορφής $[a, b)$ ή $(a, b]$ με $a, b \in \mathbb{R}$) τότε λέμε ότι έχουμε *γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄ είδους* και τέλος αν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα *οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα του* $\mathbb{R}$ *φραγμένο ή μη* τότε τότε θα λέμε έχουμε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα γ΄ είδους.

3.1 Γενικευμένα Ολοκληρώματα α΄ είδους

3.1.1 Βασικοί Ορισμοί και παραδείγματα

Το πρώτο είδος γενικευμένων ολοκληρωμάτων αναφέρεται σε συναρτήσεις που ορίζονται σε κλειστά *μη φραγμένα* διαστήματα του $\mathbb{R}$.

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, b]$ με $b > a$. Ορίζουμε

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

Το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ καλείται *γενικευμένο ολοκλήρωμα της f*. Λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *συγκλίνει* αν το όριο $\displaystyle\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Σε διαφορετική περίπτωση, όταν δηλαδή το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχει τότε λέμε ότι *το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f αποκλίνει*. Ειδικότερα, στην περίπτωση που το όριο είναι $+\infty$ (ή $-\infty$) γράφουμε $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty$

(ή αντίστοιχα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$) ενώ αν δεν υπάρχει το $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *δεν υπάρχει.*

Αντίστοιχα, για μία συνάρτηση $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ που είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[b, a]$ με $b < a$, ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\,dx$$

Ομοίως εδώ λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ *συγκλίνει* αν το όριο $\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\,dx$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο ενώ όταν το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχει τότε λέμε ότι *το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f αποκλίνει.*

Παράδειγμα 3.1.1. Έστω $a > 0$ και $p \in \mathbb{R}$. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

Απόδειξη. Έστω $p > 1$. Τότε

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1}\right) \overset{-p+1<0}{=} -\frac{a^{-p+1}}{-p+1} \in \mathbb{R}$$

Αν $p = 1$ τότε

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln a) = +\infty$$

Τέλος, αν $p < 1$,

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1}\right) \overset{-p+1>0}{=} +\infty.$$

□

Παράδειγμα 3.1.2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Απόδειξη. Πράγματι,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\arctan b = \frac{\pi}{2}$$

□

Παράδειγμα 3.1.3. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$.

Απόδειξη. Πράγματι,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}[-e^{-x}]_0^b = \lim_{b\to+\infty}(1 - e^{-b}) = 1$$

□

Παράδειγμα 3.1.4. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} \sin x\,dx$ και $\int_a^{+\infty} \cos x\,dx$ αποκλίνουν.

Απόδειξη. Έχουμε $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sin x\, dx = \lim_{b\to+\infty} [-\cos x]_a^b = \lim_{b\to+\infty} (\cos a - \cos b)$ και ως γνωστόν, το $\lim_{b\to+\infty} \cos b$ δεν υπάρχει. Ομοίως για το $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sin x\, dx$. □

Η παρακάτω πρόταση λέει ότι η γραμμικότητα του ορισμένου ολοκληρώματος μεταφέρεται και στα γενικευμένα.

Πρόταση 3.1.5. *(Γραμμικότητα του γενικευμένου Ολοκληρώματος α′ είδους) Έστω $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε καθε $[a, b]$ με $b > a$. Αν τα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ και $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ συγκλίνουν τότε για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx$ συγκλίνει και ισχύει ότι*

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\, dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_a^{b} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx \\ &= \lim_{b\to+\infty} \left(\lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx\right) \\ &= \lambda \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx + \mu \lim_{b\to+\infty} \int_a^b g(x)\, dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\, dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x)\, dx\end{aligned}$$

□

3.1.2 Κριτήρια Σύγκλισης για μη αρνητικές συναρτήσεις

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε μερικά κριτήρια σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων πρώτου είδους για μη αρνητικές συναρτήσεις. Όπως θα δούμε και στην συνέχεια η θεωρία σύγκλισης των γενικευμένων ολοκληρωμάτων είδους έχει πολλά κοινά σημεία με την αντίστοιχη θεωρία σύγκλισης σειρών πραγματικών αριθμών. Αυτό έχει φανεί ήδη στις σειρές με το Ολοκληρωτικό Κριτήριο.

Πρόταση 3.1.6. *Έστω $f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$, μη αρνητική και ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, b]$ με $b > a$. Αν υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε $\int_a^b f(x)\, dx \leq K$ για κάθε $b > a$ το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ συγκλίνει, διαφορετικά $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty$.*

Απόδειξη. Έχουμε $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$ όπου $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, για κάθε $x \geq a$. Επειδή $f \geq 0$, από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος έχουμε ότι η F είναι αύξουσα συνάρτηση. Άρα το $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ υπάρχει και ειδικότερα είναι πεπερασμένο αν η F είναι άνω φραγμένη ή είναι $+\infty$ διαφορετικά. □

Πρόταση 3.1.7. *(Κριτήριο άμεσης σύγκρισης) Έστω $f,\ g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε $[a, b]$ με $b > a$. Έστω ότι υπάρχει $b_0 > a$ τέτοιο ώστε $0 \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \geq b_0$.*

(1) Αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και το $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

(2) Αν το $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ αποκλίνει τότε αποκλίνει και το $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$.

Απόδειξη. Για κάθε $b \geq b_0$, από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος, έχουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b_0} f(x)\,dx + \int_{b_0}^b f(x)\,dx$$

και άρα

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\left(\int_a^{b_0} f(x)\,dx + \int_{b_0}^b f(x)\,dx\right)\\ &= \int_a^{b_0} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{b_0}^b f(x)\,dx\\ &= \int_a^{b_0} f(x)\,dx + \int_{b_0}^{+\infty} f(x)\,dx\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \int_a^{b_0} f(x)\,dx + \int_{b_0}^{+\infty} g(x)\,dx$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι τα ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνουν αν και μόνο αν τα ολοκληρώματα $\int_{b_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ και αντίστοιχα $\int_{b_0}^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνουν.

Τώρα αφού $0 \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \geq b_0$, από την μονοτονία του ολοκληρώματος έπεται ότι $\int_{b_0}^b f(x)\,dx \leq \int_{b_0}^b g(x)\,dx$, οπότε από την μονοτονία του ορίου, $\lim_{b\to+\infty}\int_{b_0}^b f(x)\,dx \leq \lim_{b\to+\infty}\int_{b_0}^b g(x)\,dx$ (τα όρια υπάρχουν από την προηγούμενη πρόταση), δηλαδή

$$\int_{b_0}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_{b_0}^{+\infty} g(x)\,dx$$

Από την σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι το $\int_{b_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει αν συγκλίνει το $\int_{b_0}^{+\infty} g(x)\,dx$ και το $\int_{b_0}^{+\infty} g(x)\,dx$ αποκλίνει αν αποκλίνει το $\int_{b_0}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα τα (1) και (2) της Πρότασης 3.1.7 έπονται. □

Παράδειγμα 3.1.8. Τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ και $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ συγκλίνουν.

Απόδειξη. Από προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ συγκλίνει. Επειδή $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ για κάθε $x \geq 1$ έχουμε ότι και το $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ συγκλίνει. □

Πρόταση 3.1.9. *(Κριτήριο οριακής σύγκρισης) Έστω $f,\ g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε $[a,b]$ με $b > a$. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.*

(i) *Αν $0 < \ell < +\infty$ τότε τα $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ είτε και τα δύο συγκλίνουν είτε και τα δύο αποκλίνουν.*

(ii) *Αν $\ell = 0$, τότε αν συγκλίνει το $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει και το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.*

(iii) *Αν $\ell = +\infty$, τότε αν αποκλίνει το $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ αποκλίνει και το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.*

Απόδειξη. (i) Από τον ορισμό του ορίου συνάρτησης στο $+\infty$, έχουμε ότι για $\varepsilon = \ell/2 > 0$ υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x > M$,

$$\frac{\ell}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3\ell}{2}$$

Θέτοντας $c = \ell/2$ και επιλέγοντας ένα $b_0 > \max\{a, M\}$ παίρνουμε ότι

$$cg(x) < f(x) < 3cg(x)\ \forall x > b_0$$

για κάθε $x > b_0$ και το συμπέρασμα προκύπτει από την Πρόταση 3.1.7.

(ii) Για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x > M$,

$$0 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1 \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

και το συμπέρασμα προκύπτει από την Πρόταση 3.1.7.

(iii) Αν $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ τότε για κάθε $K \in \mathbb{R}$ υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$K < \frac{f(x)}{g(x)} \Leftrightarrow Ng(x) < f(x)$$

Θέτοντας $K = 1$ το συμπέρασμα προκύπτει πάλι από την Πρόταση 3.1.7.

□

Συνδυάζοντας την Πρόταση 3.1.9 και το Παράδειγμα 3.1.1 παίρνουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 3.1.10. *Έστω $a > 0$, $f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$, μη αρνητική και ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a, b]$ με $b > a$.*

(i) *Αν υπάρχει $p > 1$ τέτοιο ώστε $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) < +\infty$ τότε το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.*

(ii) *Αν υπάρχει $p \le 1$ τέτοιο ώστε $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) > 0$ τότε το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει.*

3.1.3 Απόλυτη Σύγκλιση

Έστω $a > 0$, $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a, b]$ με $b > a$. Λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει *απολύτως* αν το $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει.

Πρόταση 3.1.11. *Έστω $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a, b]$ με $b > a$. Αν το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει και κανονικά.*

Απόδειξη. Έχουμε $0 \le f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)|$ και άρα από την Πρόταση 3.1.7 το ολοκλήρωμα

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\ dx$$

συγκλίνει. Από την γραμμικότητα (Πρόταση 3.1.5) έχουμε ότι

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \int_a^{+\infty} ((f(x) + |f(x)|) - |f(x)|)\ dx = \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\ dx - \int_a^{+\infty} |f(x)|\ dx$$

και άρα το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 3.1.12. Τα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\, dx$ και $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ συγκλίνουν για κάθε $p > 0$.

Απόδειξη. Έστω $p > 0$. Για κάθε $x \geq 1$ έχουμε $\dfrac{|\cos x|}{x^p}, \dfrac{|\sin x|}{x^p} \leq \dfrac{1}{x^p}$. Άρα αν $p > 1$ επειδή το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και το $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\, dx$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ συγκλίνουν απολύτως άρα και κανονικά. Αν τώρα $0 < p \leq 1$ και $b > 1$ τότε με Ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\int_1^b \frac{\cos x}{x^p}\, dx = \int_1^b \frac{(\sin x)'}{x^p}\, dx = \left[\frac{\sin x}{x^p}\right]_1^b - p\int_1^b \frac{\sin x}{x^{1+p}}\, dx$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\, dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{\cos x}{x^p}\, dx \\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{\sin x}{x^p}\right]_1^b - p\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{\sin x}{x^{1+p}}\, dx \\ &= \sin 1 - p\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{1+p}}\, dx\end{aligned}$$

Επειδή $1 + p > 1$, όπως παρατηρήσαμε πριν το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{1+p}}\, dx$ συγκλίνει και άρα συγκλίνει και το $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\, dx$.

Για το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ εργαζόμαστε ομοίως. □

3.2 Γενικευμένα Ολοκληρώματα β′ είδους

3.2.1. Βασικοί Ορισμοί και παραδείγματα

Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί και $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[c, b]$ με $a < c < b$. Ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\, dx$$

Το $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ καλείται *γενικευμένο ολοκλήρωμα της* f. Λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *συγκλίνει* αν το όριο $\displaystyle\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\, dx$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Σε διαφορετική περίπτωση, όταν δηλαδή το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχει τότε λέμε ότι *το γενικευμένο ολοκλήρωμα της* f *αποκλίνει*. Ειδικότερα, στην περίπτωση που το όριο είναι $+\infty$ (ή $-\infty$) γράφουμε $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = +\infty$ (ή αντίστοιχα $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = -\infty$) ενώ αν δεν υπάρχει το $\displaystyle\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\, dx$ λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ *δεν υπάρχει.*

Αντίστοιχα, για μία συνάρτηση $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ που είναι είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, c)$ με $a < c < b$, ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c\to b^+}\int_c^b f(x)\, dx$$

Ομοίως εδώ λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ *συγκλίνει* αν το όριο $\lim_{c\to b^-} \int_c^b f(x)\,dx$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο ενώ όταν το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχει τότε λέμε ότι *το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f αποκλίνει.*

Παράδειγμα 3.2.1. Έστω $p > 0$. Τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ και $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}\,dx$ συγκλίνουν για $0 < p < 1$ και αποκλίνουν για $p \geq 1$.

Γενικότερα, τα ολοκληρώματα $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx$ και $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$ συγκλίνουν για $0 < p < 1$ και αποκλίνουν για $p \geq 1$.

Απόδειξη. Θέτοντας $u = 1 - x$ έχουμε $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{u^p}\,dx$ αρκεί να εξετάσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$.

Αν $p \neq 1$ τότε

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0^+} \left[\frac{1}{1-p} - \frac{c^{1-p}}{1-p}\right]$$

Άρα αν $p < 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}$$

ενώ αν $p > 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty$$

Αν $p = 1$ τότε

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0^+} (\ln 1 - \ln c) = -\lim_{c\to 0^+} \ln c = +\infty$$

□

Η ιδιότητα της γραμμικότητας ισχύει και για το γενικευμένο ολοκήρωμα β′ είδους. Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη της Πρότασης 3.1.5 και αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 3.2.2. *(Γραμμικότητα του γενικευμένου Ολοκληρώματος β′ είδους) Έστω $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε καθε $[a, c]$ με $a < c < b$. Αν τα ολοκληρώματα $\int_a^b f(x)\,dx$ και $\int_a^b g(x)\,dx$ συγκλίνουν τότε για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx$ συγκλίνει και ισχύει ότι*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

3.2.2. Κριτήρια σύγκλισης για γενικευμένα ολοκληρώματα β′ είδους

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι τα κριτήρια σύγκλισης για γενικευμένα ολοκληρώματα α′ είδους μη αρνητικών συναρτήσεων εξακολουθούν να ισχύουν (με τις προφανείς μετατροπές) για τα ολοκληρώματα β′ είδους. Πχ. το Οριακό κριτήριο σύγκρισης αναδιατυπώνεται ως εξής.

Πρόταση 3.2.3. *(Κριτήριο Οριακής Σύγκλισης) Έστω $f,\ g : [a,b) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε $[a,c]$ με $c \in (a,b)$. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ και $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.*

(1) Αν $0 < \ell < +\infty$ τότε τα $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ και $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ είτε και τα δύο συγκλίνουν είτε και τα δύο αποκλίνουν.

(2) Αν $\ell = 0$, τότε αν συγκλίνει το $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ συγκλίνει και το $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

(3) Αν $\ell = +\infty$, τότε αν αποκλίνει το $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ αποκλίνει και το $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Θέτοντας $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^p}$, $x \in [a,b)$ από την Πρόταση 3.2.3 και το Παράδειγμα 3.2.1 έχουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 3.2.4. *Έστω $a > 0$, $f : [a,b) \to [0,+\infty)$, μη αρνητική και ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a,c]$ με $a < c < b$.*

(1) Αν υπάρχει $0 < p < 1$ τέτοιο ώστε $\lim_{x\to b^-}(b-x)^p f(x) < +\infty$ τότε το $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει.

(2) Αν υπάρχει $p \geq 1$ τέτοιο ώστε $\lim_{x\to a}(b-x)^p f(x) > 0$ τότε το $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ αποκλίνει.

Ομοίως θέτοντας $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^p}$, $x \in (a,b]$ έχουμε το εξής.

Πόρισμα 3.2.5. *Έστω $a \geq 0$, $f : (a,b] \to [0,+\infty)$, μη αρνητική και ολοκληρώσιμη σε κάθε $[c,b]$ με $a < c < b$.*

(1) Αν υπάρχει $0 < p < 1$ τέτοιο ώστε $\lim_{x\to a^+}(x-a)^p f(x) < +\infty$ τότε το $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει.

(2) Αν υπάρχει $p \geq 1$ τέτοιο ώστε $\lim_{x\to a^+}(x-a)^p f(x) > 0$ τότε το $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ αποκλίνει.

Επίσης ισχύει το ανάλογο της Πρότασης 3.1.11. Η απόδειξη είναι παρόμοια και αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 3.2.6. *Έστω $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a,c]$ με $a < c < b$. Αν το $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει και κανονικά.*

Παράδειγμα 3.2.7. Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Έστω $p = 3/4$. Τότε

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4}} \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}} = -\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4}} \ln x = 0$$

και άρα από το Πόρισμα 3.2.5, το $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνει απολύτως άρα και κανονικά. □

Σημειώνουμε εδώ ότι τα γεν. ολοκληρώματα β′ είδους συγκλίνουν όταν η f είναι *φραγμένη* συνάρτηση. Συγκεκριμένα, ισχύει η εξής πρόταση.

Πρόταση 3.2.8. *Έστω $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[c,b]$, $a < c < b$ του $(a,b]$. Αν η f είναι φραγμένη τότε το $\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Με άλλα λόγια το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει. Ομοίως για συναρτήσεις $f : [a,b) \to \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Έστω $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b)\}$. Θέτουμε $F(c) = \int_c^b f(x)\,dx$, $\forall c \in (a,b]$. Θα δείξουμε ότι το $\lim_{c\to a^+} F(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Έστω (c_n) μια ακολουθία στο $(a,b]$ με $c_n \to a$. Τότε για κάθε $n,m \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$|F(c_n) - F(c_m)| = \left|\int_{c_n}^{c_m} f(x)\,dx\right| \le M|c_n - c_m|$$

και άρα η ακολουθία $(F(c_n))$ είναι Cauchy. Άρα για κάθε ακολουθία (c_n) με $c_n \to b$ η $F(c_n)$ είναι συγκλίνουσα (ως Cauchy). Αν τώρα (c_n) και (c'_n) δύο ακολουθίες με $c_n \to b$ και $c'_n \to b$ με τον ίδιο συλογισμό βλέπουμε ότι $|F(c_n) - F(c'_n)| = \left|\int_{c_n}^{c'_n} f(x)\,dx\right| \le M|c_n - c'_n|$ και άρα $\lim_n F(c_n) = \lim_n F(c'_n)$. Με άλλα λόγια το όριο $\lim_n F(c_n) = \int_{c_n}^b f(x)\,dx$ είναι κοινό για όλες τις ακολουθίες (c_n) στο $[a,b)$ που συγκλίνουν στο b. Το συμπέρασμα τώρα έπεται από την Αρχή Μεταφοράς για όρια συναρτήσεων. □

Παρατήρηση 3.2.9. Η υπόθεση ότι η f είναι φραγμένη είναι απαραίτητη στην Πρόταση 3.2.8. Π.χ. όπως είδαμε το γενικευμένο ολοκλήρωμά $\int_a^b \frac{1}{x^p}\,dx$ αποκλίνει για $p \ge 1$. Βέβαια, αν το γενικευμένο ολκλήρωμα συγκλίνει τότε δεν έπεται απαραίτητα ότι η f είναι φραγμένη. Π.χ. αν $0 < p < 1$ τότε το $\int_a^b \frac{1}{x^p}\,dx$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 3.2.10. Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Πράγματι, $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$ για κάθε $x \in (0,1]$. □

Επίσης ισχύει και η εξής πρόταση.

Πρόταση 3.2.11. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_c^b f(x)\,dx$$

Απόδειξη. Έστω $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b)\}$ και $F(c) = \int_c^b f(x)\,dx$, $\forall c \in (a,b]$. Τότε για κάθε $c \in (a,b)$

$$\left|\int_c^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| \le M(a-c)$$

και άρα $\lim_{c\to a^+} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. □

3.3 Γενικευμένα Ολοκληρώματα γ′ είδους

Έστω $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$ και $f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του (α,β). Έστω $c \in (\alpha,\beta)$ (άρα $c \in \mathbb{R}$). Θεωρούμε τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_\alpha^c f(x)\,dx$ και

$\displaystyle\int_c^\beta f(x)\ dx$. Αυτά είναι πρώτου ή δεύτερου είδους ανάλογα αν τα α, β είναι άπειρα ή πεπερασμένα. Αν και τα δύο αυτά ολοκληρώματα συγκλίνουν ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f να είναι το άθροισμά τους, δηλαδή ορίζουμε

$$\int_\alpha^\beta f(x)\ dx = \int_\alpha^c f(x)\ dx + \int_c^\beta f(x)\ dx$$

και λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)\ dx$ *συγκλίνει*. Σε διαφορετική περίπτωση, αν δηλαδή ένα τουλάχιστον από τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_\alpha^c f(x)\ dx$ και $\displaystyle\int_c^\beta f(x)\ dx$ αποκλίνει, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)\ dx$ *αποκλίνει*. Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο ορισμός του $\int_a^b f(x)\ dx$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής του ενδιάμεσου σημείου c. Πράγματι δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι:

1) Για κάθε $c, c' \in (\alpha, \beta)$ τα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_\alpha^c f(x)\ dx$ και $\displaystyle\int_\alpha^{c'} f(x)\ dx$ και αντίστοιχα τα $\displaystyle\int_c^\beta f(x)\ dx$ και $\displaystyle\int_{c'}^\beta f(x)\ dx$) είτε συγκλίνουν και τα δύο είτε αποκλίνουν και τα δύο.

2) Στην περίπτωση που συγκλίνουν τα $\displaystyle\int_\alpha^c f(x)\ dx$ και $\displaystyle\int_c^\beta f(x)\ dx$ έχουμε ότι

$$\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx = \int_a^{c'} f(x)\ dx + \int_{c'}^b f(x)\ dx$$

Πρόταση 3.3.1. *Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[c, d]$, $a < c < b$ του (a, b). Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $c \in (a, b)$. Από την Πρόταση 3.2.8 τα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_a^c f(x)\ dx$ και $\displaystyle\int_c^b f(x)\ dx$ συγκλίνουν. Άρα και το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 3.3.2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx = 0.$

Απόδειξη. Επιλέγοντας το 0 ως ενδιάμεσο σημείο, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\ dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\ dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx \\ &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\ dx + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\ dx \\ &= \lim_{a\to-\infty} \arctan a + \lim_{b\to+\infty} \arctan b \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3.3.3. Για κάθε $p > 0$ το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\ dx$ αποκλίνει.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx.$$

Αν $p \geq 1$ (αντ. $0 < p < 1$) τότε όπως έχουμε δεί, το $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ αποκλίνει (αντ. συγκλίνει) και το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ συγκλίνει (αντ. αποκλίνει). Άρα για κάθε $p > 0$ το $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ αποκλίνει. □

Παράδειγμα 3.3.4. Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ αποκλίνει.

Απόδειξη. Το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_0^{+\infty} x\,dx.$$

Έχουμε

$$\int_{-\infty}^{0} x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{a^2}{2}\right) = -\infty$$

και ομοίως

$$\int_0^{+\infty} x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b^2}{2}\right) = +\infty$$

Άρα το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ αποκλίνει. □

Παράδειγμα 3.3.5. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$ συγκλίνει.

Πράγματι, έχουμε

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$$

Επειδή τώρα

$$\lim_{x\to0^+} x^{1/2}f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to1^-}(1-x)^{1/2}f(x) = \lim_{x\to0^+} frac1\sqrt{x} = 1$$

από τα Πορισμα 3.2.4 και το Πόρισμα 3.2.5 έχουμε ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$ και $\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$ συγκλίνουν.

Παρατήρηση 3.3.6. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \sin^2 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ μπορούμε να υπολογίσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμνα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \pi$. Πράγματι,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t\cos t}{\sqrt{\sin^2 t(1-\sin^2 t)}}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} dt = \pi$$

Παράδειγμα 3.3.7. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\Pi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^t \, dx$$

(i) Η συνάρτηση $\Pi(t)$ παίρνει πραγματικές τιμές για κάθε $t > -1$ και απειρίζεται θετικά για κάθε $t \leq -1$.

(ii) $\Pi(t+1) = (t+1)\Pi(t)$ για κάθε $t > -1$.

(iii) $\Pi(n) = n!$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Απόδειξη. (1) Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^t \, dx$ είναι α′ είδους για $t \geq 0$ και γ′ είδους για $t < 0$. Και στις δύο περιπτώσεις το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^t \, dx = \int_0^{1} e^{-x} x^t \, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^t \, dx$$

Ισχυρισμός 1. *Το* $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x} x^t \, dx$ *συγκλίνει για κάθε* $t \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1. Έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} x^t = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{t+2}}{e^x} = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. □

Ισχυρισμός 2. *Το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_0^{1} e^{-x} x^t \, dx$ *συγκλίνει για* $t > -1$ *και αποκλίνει για* $t \leq -1$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2. Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{1} e^{-x} x^t \, dx$ είναι ένα κανονικό ολοκλήρωμα για $t \geq 0$. Αν $t < 0$ τότε είναι γενικευμένο β′ είδους και επειδή $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{-t} e^{-x} x^t = \lim_{x\to 0} e^{-x} = 1$ τα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_0^{1} e^{-x} x^t \, dx$ και $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^p} \, dx$ με $p = -t > 0$ είναι ισοδύναμα ως προς την σύγκλιση. □

(2) Έστω $t > -1$. Τότε $t + 1 > 0$ και άρα

$$\begin{aligned}
\Pi(t+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t+1} \, dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} e^{-x} x^{t+1} \, dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(\Big[-e^{-x} x^{t+1} \Big]_0^b + (t+1) \int_0^b e^{-x} x^t \, dx \right) \\
&= \lim_{b\to+\infty} -e^{-b} b^{t+1} + (t+1)\Pi(t) \\
&= 0 + (t+1)\Pi(t) = (t+1)\Pi(t)
\end{aligned}$$

(3) Με επαγωγή. Έχουμε $\Pi(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx = 1 = 0!$. Έστω τώρα ότι $\Pi(n) = n!$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Από το (2) έχουμε $\Pi(n+1) = (n+1)\Pi(n) = (n+1)n! = (n+1)!$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών, Βασικές Έννοιες

4.1 Ο Ευκλείδειος χώρος

4.1.1 Βασικοί ορισμοί

Ορίζουμε

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq n\}$$

Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της *πρόσθεσης*:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

και του *βαθμωτού πολλαπλασιασμού*:

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο.

Τα διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ αποτελούν τη λεγόμενη *συνήθη βάση* του $\mathbb{R}^n$.

Παρατηρήστε ότι για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i.$$

4.1.2 Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Το $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ καλείται το *σύνηθες εσωτερικό γινόμενο των* $\mathbf{x}$ *και* $\mathbf{y}$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$ και άρα $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(2) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$.

(3) $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{x}\cdot\mathbf{z}$.

(4) $(\lambda\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$.

Αν $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$ τότε λέμε ότι τα $\mathbf{x},\mathbf{y}$ είναι *ορθογώνια*. Παρατηρήστε ότι $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = 0$ για κάθε $i \neq j$, δηλαδή οποιαδήποτε δύο διαφορετικά διανύσματα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια.

4.1.3 Η Ευκλείδεια νόρμα και απόσταση

Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε το *μέτρο* (ή *νόρμα*) του $\mathbf{x}$ να είναι η ποσότητα

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Κατ' αναλογία προς την ιδιότητα $|x| = \sqrt{x^2}$ για $x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}.$$

Πρόταση 4.1.1 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). *Αν $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ είναι δύο διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|,$$

ή ισοδύναμα

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

για κάθε $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_d \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Η ανισότητα ισχύει (με ισότητα) αν $\mathbf{x} = 0$ ή $\mathbf{y} = 0$. Υποθέτουμε για την συνέχεια ότι $\mathbf{x} \neq 0$ και $\mathbf{y} \neq 0$. Θέτουμε $\mathbf{w} = \|\mathbf{y}\|\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} &= (\|\mathbf{y}\|\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{y})\cdot(\|\mathbf{y}\|\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{y})\\
&= \|\mathbf{y}\|^2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - 2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{x}\|^2\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}\\
&= \|\mathbf{y}\|^2\|\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2\\
&= 2\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|\,(\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\| - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y})
\end{aligned}$$

και άρα

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|$$

Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας το διάνυσμα $\mathbf{w}' = \|\mathbf{y}\|\mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}$ καταλήγουμε στο ότι

$$-\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\| \leq \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$$

Άρα,

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|$$

□

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τις παρακάτω ιδιότητες που είναι ανάλογες των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής στο $\mathbb{R}$):

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = 0$.
2. $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$.
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Απόδειξη της Ιδιότητας 3 :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| &\Leftrightarrow (\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|)^2 \leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 \\
&\Leftrightarrow (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\Leftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\Leftrightarrow \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\Leftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|
\end{aligned}$$

που ισχύει από την ανισότητα Cauchy–Schwarz. □

Τέλος, όπως στο $\mathbb{R}$ η απόσταση δύο πραγματικών αριθμών είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους, η ποσότητα

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

ορίζεται να είναι η *απόσταση* των $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$. Παρατηρήστε ότι

1. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ και
3. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$.

4.2 Η Τοπολογία του Ευκλείδειου χώρου

4.2.1 Βασικές περιοχές σημείων

Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. Το σύνολο

$$B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$$

καλείται ***ανοικτή μπάλα*** *του* $\mathbb{R}^n$ *με κέντρο το* $\mathbf{x}_0$ *και ακτίνα* ε. Με άλλα λόγια, η ανοικτή μπάλα $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ αποτελείται από όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^n$ που απέχουν από το $\mathbf{x}_0$ απόσταση *γνήσια μικρότερη* από ε. Οι ανοικτές μπάλες $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ λέγονται και ***βασικές ανοικτές περιοχές*** του $\mathbf{x}_0$. Το σύνολο

$$\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon\}$$

καλείται ***κλειστή μπάλα*** *του* $\mathbb{R}^n$ *με κέντρο* $\mathbf{x}_0$ *και ακτίνα* ε. Τέλος, το σύνολο

$$S_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon\}$$

καλείται ***σφαίρα*** *του* $\mathbb{R}^n$ *με κέντρο* $\mathbf{x}_0$ *και ακτίνα* ε. Είναι φανερό ότι

$$\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \cup S_\varepsilon(\mathbf{x}_0).$$

4.2.2 Χαρακτηρισμοί σημείων και υποσυνόλων

Δίνουμε παρακάτω κάποιους χαρακτηρισμούς σημείων και υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 4.2.1. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Το σημείο $\mathbf{x}$ καλείται

(1) ***απομονωμένο σημείο*** του X αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $X \cap B_\delta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}$. Ισοδύναμα, $\mathbf{x} \in X$ και η απόσταση κάθε άλλου σημείου του X από το $\mathbf{x}$ είναι τουλάχιστον δ.

(2) ***σημείο συσσώρευσης*** του X αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\mathbf{y} \in X$ με $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ και $\mathbf{y} \in X \cap B_\delta(\mathbf{x})$. Ισοδύναμα, οσοδήποτε κοντά στο $\mathbf{x}$ υπάρχει σημείο του X διαφορετικό από το $\mathbf{x}$.

Πρόταση 4.2.2. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ ένα ακριβώς απο τα επόμενα ισχύει:*

(α) Το $\mathbf{x}$ είναι σημείο συσσώρευσης του X.

(β) Το $\mathbf{x}$ είναι απομονωμένο σημείο του X.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x} \in X$. Το $\mathbf{x}$ είτε είναι σημείο συσσώρευσης του X είτε όχι. Αν δεν είναι τότε εξ ορισμού θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε δεν υπάρχει κανένα $y \in X$ με $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$. Άρα $X \cap B_\delta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}$ και το $\mathbf{x}$ είναι απομονωμένο σημείο του X. □

Ορισμός 4.2.3. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Το σημείο $\mathbf{x}$ καλείται

(1) ***εσωτερικό σημείο του*** X αν *υπάρχει* $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X$ Το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του X καλείται ***εσωτερικό*** του X και συμβολίζεται με $Int(X)$.

(2) ***εξωτερικό σημείο του*** X αν *υπάρχει* $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$, ισοδύναμα το $\mathbf{x}$ είναι εσωτερικό σημείο του συμπληρώματος του X. Το σύνολο όλων των εξωτερικών σημείων του X καλείται ***εξωτερικό*** του X και συμβολίζεται με $Ext(X)$.

(3) ***συνοριακό σημείο του*** X αν *για κάθε* $\delta > 0$ έχουμε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \varnothing$ και $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X \neq \varnothing$, δηλαδή το $\mathbf{x}$ είναι συνοριακό σημείο του X αν και μόνο αν κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το $\mathbf{x}$ έχει μη κενή τομή με το X καθώς και με το συμπλήρωμα του X. Το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του X καλείται ***σύνορο*** του X και συμβολίζεται με $Bd(X)$.

Παρατήρηση 4.2.4. Παρατηρούμε ότι $Ext(X) \subseteq X^c$ (με $X^c = \mathbb{R}^d \setminus X$ συμβολίζουμε το συμπλήρωμα του X) και ότι $Int(X) \subseteq X$.

Πρόταση 4.2.5. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. τα σύνολα $Int(X)$, $Bd(X)$ και $Ext(X)$ είναι ξένα ανα δύο και*

$$\mathbb{R}^n = Int(X) \cup Bd(X) \cup Ext(X)$$

Απόδειξη. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Έστω και ένα $\delta > 0$. Έχουμε ότι $\mathbb{R}^n = X \cup (\mathbb{R}^n \setminus X)$ και άρα

$$\begin{aligned} B_\delta(\mathbf{x}) = B_\delta(\mathbf{x}) \cap \mathbb{R}^n &= B_\delta(\mathbf{x}) \cap \big(X \cup (\mathbb{R}^n \setminus X)\big) \\ &= \big(B_\delta(\mathbf{x}) \cap X\big) \cup \big(B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X)\big) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ένα από τα επόμενα θα ισχύει:

(α) *Υπάρχει* $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) = \varnothing$. Στην περίπτωση αυτή $B_\delta(\mathbf{x}) = B_\delta(\mathbf{x}) \cap X \subseteq X$ και άρα το $\mathbf{x}$ είναι εσωτερικό σημείο του X.

(β) *Υπάρχει* $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X = \varnothing$. Τότε $B_\delta(\mathbf{x}) = B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$ και άρα το $\mathbf{x}$ είναι εξωτερικό σημείο του X.

(γ) *Για κάθε* $\delta > 0$, έχουμε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X \neq \varnothing$ και $B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \varnothing$ και άρα το $\mathbf{x}$ είναι συνοριακό σημείο του X.

Είναι φανερό ότι δεν μπορεί ένα $\mathbf{x}$ να είναι ταυτόχρονα συνοριακό και εσωτερικό (ή εξωτερικό) σημείο του X. Επίσης δεν μπορεί να συμβεί το $\mathbf{x}$ να είναι ταυτόχρονα εσωτερικό και εξωτερικό σημείο του X. Πράγματι αν αυτό συνέβαινε για κάποιο $\mathbf{x}$ τότε θα υπήρχαν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ με

$$B_{\delta_1}(\mathbf{x}) \subseteq X \qquad \text{και} \qquad B_{\delta_2}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$$

Όμως τότε αν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ θα ήταν

$$B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B_{\delta_1}(\mathbf{x}) \subseteq X \qquad \text{και} \qquad B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B_{\delta_2}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$$

οπότε

$$B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) = \varnothing,$$

άτοπο. Άρα για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ακριβώς ένα απο τα (1)-(3) ισχύει. □

Πόρισμα 4.2.6. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε $Int(X) \subseteq X \subseteq Int(X) \cup Bd(X)$.

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 4.2.4 έχουμε ότι $Int(X) \subseteq X$ και $Ext(X) \subseteq X^c$. Από την Πρόταση 4.2.5 έχουμε

$$\begin{aligned} X = X \cap \mathbb{R}^n &= X \cap [Int(X) \cup Bd(X) \cup Ext(X)] \\ &= [X \cap (Int(X) \cup Bd(X))] \cup [X \cap Ext(X)] \\ &= X \cap [Int(X) \cup Bd(X)] \subseteq Int(X) \cup Bd(X) \end{aligned}$$

□

Ορισμός 4.2.7. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) Το X καλείται ***ανοικτό*** αν για κάθε σημείο $\mathbf{x}$ του X υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X$. Ισοδύναμα, αν κάθε σημείο του X είναι εσωτερικό του σημείο.

(2) Το X καλείται ***κλειστό*** αν το $X^c = \mathbb{R}^d \setminus X$ (δηλαδή το συμπλήρωμά του X) είναι ανοικτό.

(3) Το X καλείται ***φραγμένο*** αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|\mathbf{x}\| \leq M$ (ισοδύναμα, το X είναι υποσύνολο της κλειστής μπάλας $\overline{B}_M(\mathbf{0})$ με κέντρο το $\mathbf{0}$ και ακτίνα M).

(4) Το X καλείται ***συμπαγές*** αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Πρόταση 4.2.8. *Κάθε μονοσύνολο του* $\mathbb{R}^n$ *είναι κλειστό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^d$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Για να δείξουμε ότι το $\{\mathbf{x}\}$ είναι κλειστό πρέπει να δείξουμε ότι το συμπλήρωμά του, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι ανοικτό. Έστω $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$. Τότε $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ και άρα $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > 0$. Θέτοντας $\delta = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ έχουμε $\mathbf{x} \notin B_\delta(\mathbf{y})$ και άρα $B_\delta(\mathbf{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$. Δηλαδή, για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$, άρα το $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι ανοικτό. □

Πρόταση 4.2.9. (α) *Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}^n$.

(β) *Αντίστοιχα, κάθε κλειστή μπάλα είναι συμπαγές υποσύνολο του* $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. (α) Έστω $B = B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ μια ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$. Έστω $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Θέτουμε

$$\delta = \varepsilon - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|. \tag{4.2.1}$$

Αφού $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ έχουμε ότι $\delta = \varepsilon - \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| > 0$. Θα δείξουμε ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B$. Πράγματι, έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ και, από την τριγωνική ανισότητα,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \overset{(4.2.1)}{=} \varepsilon.$$

Συνεπώς, $\mathbf{y} \in B$. Επειδή το $\mathbf{y}$ ήταν τυχόν σημείο της $B_\delta(\mathbf{x})$, έπεται ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B$. Επίσης, το B είναι φραγμένο αφού για κάθε $\mathbf{x} \in B$ έχουμε

$$\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon + \|\mathbf{x}_0\| = M.$$

(β) Έστω $C = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ και $\mathbf{x} \in C$. Τότε $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$ και άρα

$$\delta = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \varepsilon > 0. \tag{4.2.2}$$

Θα δείξουμε ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq C$, ισοδύναμα $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$ για κάθε $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Πράγματι, έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε, από την τριγωνική ανισότητα,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|$$

και συνεπώς

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \delta \overset{(4.2.2)}{=} \varepsilon.$$

Επίσης, όπως στο (α) δείχνουμε ότι η $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ είναι φραγμένη. □

Η επόμενη πρόταση δίνει έναν χρήσιμο χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων.

Πρόταση 4.2.10. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το X είναι κλειστό.*

(2) *Το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του.*

Απόδειξη. (1) $\Longrightarrow$ (2): Έστω ότι το X είναι κλειστό και έστω $\mathbf{x}$ σημείο συσσώρευσης του X. Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $\mathbf{x} \notin X$. Τότε, $\mathbf{x} \in X^c = \mathbb{R}^n \setminus X$ και επειδή το X^c είναι ανοικτό θα υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X^c$. Αλλά τότε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X = \varnothing$, άτοπο από τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Έστω ότι το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του. Θα δείξουμε ότι το X είναι κλειστό, ισοδύναμα ότι το X^c είναι ανοικτό. Πράγματι, έστω $\mathbf{x} \in X^c$. Επειδή το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του, το $\mathbf{x}$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X. Συνεπώς, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε οποιοδήποτε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ με $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$ δεν ανήκει στο X. Επειδή, από την υπόθεση, και το $\mathbf{x}$ δεν ανήκει στο X, έχουμε ότι ολόκληρη η ανοικτή μπάλα $B_\delta(\mathbf{x})$ περιέχεται στο X^c, δηλαδή το $\mathbf{x}$ είναι όντως εσωτερικό σημείο του X^c. □

Ένας άλλος χαρακτηρισμός των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι και ο εξής.

Πρόταση 4.2.11. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το X είναι κλειστό.*

(2) $Bd(X) \subseteq X$.

(3) $X = Int(X) \cup Bd(X)$.

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2): Έστω ότι το X είναι κλειστό και έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει $\mathbf{x} \in Bd(X)$ με $\mathbf{x} \notin X \Leftrightarrow \mathbf{x} \in X^c$. Επειδή X^c ανοικτό υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X^c$, άτοπο αφού $\mathbf{x} \in Bd(X)$ (και άρα κάθε ανοικτή μπάλα τέμνει και το X).

(2) $\Rightarrow$ (3): Προκύπτει από το Πόρισμα 4.2.6.

(3) $\Rightarrow$ (1): Επειδή το $Ext(X)$ είναι ανοικτό το σψμπλήρωμά του $(Ext(X))^c = Int(X) \cup Bd(X) = X$ είναι κλειστό. □

4.3 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Με τον όρο *συνάρτηση πολλών μεταβλητών* εννοούμε γενικά μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ μη κενό (αν $m = n = 1$ τότε έχουμε την κλασική περίπτωση πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής).

4.3.1 Ταξινόμηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Οι συναρτήσεις αυτές ταξινομούνται ως εξής:

(I) ***Πραγματικές*** (ή ***βαθμωτές***) Είναι οι συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^2 + y^2$.

2) $f : D \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, όπου

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του $\mathbb{R}^2$.

3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4) $f : B \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, όπου

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^3$.

Στην Φυσική, συναρτήσεις της μορφής $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ χρησιμοποιούνται για να αντιστοιχίσουν βαθμωτά φυσικά μεγέθη στα σημεία του χώρου, όπως π.χ. η θερμοκρασία ή η ατμοσφαιρική πίεση.

(II) ***Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής.*** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}^m$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}$ και $m \geq 2$. Συνήθως το σύνολο X είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (t, t^2)$.

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ με τύπο $f(t) = \left(t, t^2, \ldots, t^m\right)$.

Οι συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}^m$ με $X \subseteq \mathbb{R}$ γράφονται πάντα στη μορφή

$$f(t) = (f_1(t), \ldots, f_m(t)), \quad t \in X \subseteq \mathbb{R}$$

όπου $f_1(t), \ldots, f_k(t)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής από το X στο $\mathbb{R}$ (δείτε την Πρόταση 4.3.2 παρακάτω).

Παρατήρηση 4.3.1. Αν $X = I$ είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις $f : I \to \mathbb{R}^m$ μετασχηματίζουν το διάστημα I του $\mathbb{R}$ σε μια *m-διάστατη καμπύλη*. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(t) = (\cos t, sint)$ μετασχηματίζει το διάστημα $[0, 2\pi]$ στον μοναδιαίο κύκλο, ενώ η $f(t) = (t, t^2)$ μετασχηματίζει την ευθεία στην παραβολή $y = x^2$. Θεωρώντας τη μεταβλητή t ως *χρόνο*, σκεφτόμαστε ότι οι συναρτήσεις $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ περιγράφουν την θέση ενός κινητού, την χρονική στιγμή t, στον χώρο $\mathbb{R}^n$.

(ΙΙΙ) ***Διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών***. Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $n, m \geq 2$. Αν $n = m$ τότε οι συναρτήσεις αυτές καλούνται ***διανυσματικά πεδία***. Τα διανυσματικά πεδία χρησιμοποιούνται στην Φυσική, π.χ. έχουμε το πεδίο βαρύτητας, το πεδίο ταχύτητας ρευστού κ.λπ. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right).$$

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = \left(-\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$.

3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = (-y, x)$.

4.3.2 Ανάλυση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ σε συνιστώσες συναρτήσεις.

Η επόμενη πρόταση ουσιαστικά ανάγει τη μελέτη όλων των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών στη μελέτη των βαθμωτών συναρτήσεων.

Πρόταση 4.3.2. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_m$ από το X στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε*

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$$

για κάθε $\mathbf{x} \in X$. Συμβολικά γράφουμε

$$f = (f_1, \ldots, f_m)$$

και οι $f_1, \ldots, f_m$ καλούνται οι **συνιστώσες συναρτήσεις** *της f.*

Απόδειξη. Για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$ έστω $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ η i-προβολή του $\mathbb{R}^m$, δηλαδή η συνάρτηση

$$\pi_i(y_1, \ldots, y_m) = y_i.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ του $\mathbb{R}^m$ γράφεται ως

$$\mathbf{y} = (\pi_1(\mathbf{y}), \ldots, \pi_m(\mathbf{y})) . \tag{4.3.1}$$

Έστω τώρα τυχόν $\mathbf{x} \in X$. Θέτοντας $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, από την (4.3.1) έχουμε

$$f(\mathbf{x}) = (\pi_1(f(\mathbf{x})), \ldots, \pi_m(f(\mathbf{x}))) . \tag{4.3.2}$$

Συνεπώς, αν θέσουμε $f_i = \pi_i \circ f : X \to \mathbb{R}$ να είναι η σύνθεση των π_i και f, τότε $f_i(\mathbf{x}) = \pi_i(f(\mathbf{x}))$ και άρα από την (4.3.2) έχουμε

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) . \tag{4.3.3}$$

Μένει να δείξουμε ότι οι $f_1, \ldots, f_m$ είναι η μοναδικές συναρτήσεις που ικανοποιούν την (4.3.3). Πράγματι, αν $g_1, \ldots, g_m$ είναι συναρτήσεις από το X στο $\mathbb{R}$ με

$$f(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x}))$$

τότε αναγκαστικά $g_i(\mathbf{x}) = \pi_i(f(\mathbf{x})) = \pi_i \circ f(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$ και κάθε $\mathbf{x} \in X$. □

4.4 Όριο πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε την έννοια του ορίου βαθμωτής συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Όπως θα δούμε, είναι μια απλή γενίκευση της γνωστής αντίστοιχης έννοιας για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Για απλότητα διατυπώνουμε παρακάτω τον ορισμό του ορίου πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών.

Ορισμός 4.4.1. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ σημείο συσσώρευσης του X και $L \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f έχει όριο το L στο (x_0, y_0) και γράφουμε*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $(x, y) \in X$ με $0 < \|(x - x_0, y - y_0)\| < \delta$ να ισχύει ότι $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

Παρατηρείστε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x, y) - L) = 0$$

Ένας χρήσιμος κανόνας για την εύρεση ορίων περιγράφεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.4.2. *Έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ σημείο συσσώρευσης του X και $L \in \mathbb{R}$. Έστω ότι για κάθε $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ με $(x, y) \in X$, ισχύει ότι*

$$|f(x, y) - L| \leqslant |g(x, y)|$$

Αν $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = 0$ τότε

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

Παράδειγμα 4.4.3. Υπολογίστε το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right)$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\left|x \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq |x|$$

Επειδή $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ από τον Κανόνα παρεμβολής έπεται ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right) = 0$ □

Παράδειγμα 4.4.4. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \cdot |x| + \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \cdot |y| \leq |x| + |y|.$$

Επομένως, αν θέσουμε $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ και $h(x,y) = |x| + |y|$, τότε

$$|f(x,y)| \leq h(x,y).$$

Επιπλέον, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$. □

Το όριο της συνάρτησης οφείλει να είναι το ίδιο ανεξάρτητα με τον τρόπο που προσεγγίζουμε το (x_0, y_0). Διαφορετικά το $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 4.4.5. Εξετάστε αν υπάρχει ή όχι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Απόδειξη. Αν κινούμαστε πάνω στον x-άξονα και προσεγγίζουμε το $(0,0)$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$$

γιατί $f(x,0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως αν προσεγγίσουμε το $(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y = x$ τότε

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Άρα το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει. □

Παράδειγμα 4.4.6. Έστω $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$.

(α) Να βρείτε το όριο της f στο $(0,0)$ κατά μήκος κάθε ευθείας που διέρχεται από το $(0,0)$.

(β) Να βρείτε το όριο της f στο $(0,0)$ κατά μήκος κάθε παραβολής της μορφής $y = \lambda x^2$.

(γ) Υπάρχει το όριο της f στο $(0,0)$·

Απόδειξη. (α) Κατά μήκος του x-άξονα έχουμε $f(x,0) = 0$ και ομοίως κατά μήκος του y-άξονα $f(0,y) = 0$. Έστω $y = \lambda x$ με $\lambda \neq 0$. Τότε

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \lambda x}{x^4 + \lambda^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^3}{x^4 + \lambda^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x}{x^2 + \lambda^2} = 0$$

Άρα το όριο είναι το μηδέν όταν προσεγγίζουμε το $(0, 0)$ κινούμενοι πάνω σε μια ευθεία.

(β) Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\lambda x^2}{x^4 + \lambda^2 x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^4}{x^4 + \lambda^2 x^4} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

και άρα το όριο εξαρτάται από τον συντελεστή λ της παραβολής.

(γ) Από το (β) το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει. □

Παράδειγμα 4.4.7. (α) Εξετάστε αν υπάρχει το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$.

(β) Ομοίως για το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$.

Απόδειξη. (α) Κατά μήκος της ευθείας $y = x$ το όριο είναι

$$\lim_{x\to 0} f(x, x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0.$$

Όμως, κατά μήκος της καμπύλης $y = -x + x^2$, το όριο είναι

$$\lim_{x\to 0} f\left(x, -x + x^2\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0}(-1 + x) = -1.$$

Συνεπώς, το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ δεν υπάρχει.

(β) Μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να δείξουμε ότι το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$ δεν υπάρχει. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι $\displaystyle\frac{xy}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{x+y} - \frac{x^2+y^2}{x+y} = x+y - \frac{x^2+y^2}{x+y}$ και συνεπώς αν υπήρχε το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \ell$ θα υπήρχε και το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y} = -\ell$, άτοπο από το (α). □

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να μετατρέπουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες στις λεγόμενες *πολικές*:

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases}$$

όπου $r = \sqrt{x^2+y^2}$ και $0 \le \vartheta \le 2\pi$ είναι η γωνία που σχηματίζει ο θετικός x-ημιάξονας στρεφόμενος με κέντρο το $(0, 0)$ και αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού μέχρι να συναντήσει την ημιευθεία με αρχή το $(0, 0)$ που διέρχεται από το σημείο (x, y).

Πρόταση 4.4.8. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Έστω $L \in \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ με*

$$\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$$

Αν

$$|f(x_0 + r\cos\vartheta, y_0 + r\sin\vartheta) - L| \le |g(r)|$$

για κάθε $r > 0$ και για κάθε $\vartheta \in [0, 2\pi)$ τότε

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

Παράδειγμα 4.4.9. Αποδείξτε ότι $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1.$

Απόδειξη. Μετατέποντας σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$\left|\frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right| = \left|\frac{\sin r}{r} - 1\right|$$

και

$$\lim_{r\to 0^+}\left(\frac{\sin r}{r} - 1\right) = 0$$

□

4.5 Όριο γενικής συνάρτησης

Η έννοια του ορίου μιας γενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών είναι μια απλή γενίκευση της αντίστοιχης έννοιας για πραγματικές συναρτήσεις που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Ορισμός 4.5.1. Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X και $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$. Λέμε ότι η f *έχει όριο το* $\mathbf{L}$ *στο* $\mathbf{x}_0$ και γράφουμε

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$.

Το όριο μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται στο όριο των πραγματικών συναρτήσεων που αποτελούν την ανάλυση της f. Συγκεκριμένα, έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 4.5.2. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το όριο $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ υπάρχει.*

(2) *Αν $f = (f_1, \ldots, f_m)$ είναι η ανάλυση της f τότε το όριο $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x})$ υπάρχει για όλα τα $i = 1, \ldots, m$ και ισχύει ότι*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \left(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}), \ldots, \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_m(\mathbf{x})\right).$$

4.6 Συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Ορισμός 4.6.1. Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in X$. Λέμε ότι η f είναι *συνεχής στο* $\mathbf{x}_0$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\mathbf{x} \in X$ με $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$. Η f καλείται *συνεχής* αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X.

Όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, κάθε συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι αυτομάτως συνεχής στα μεμονωμένα σημεία του X. Συνεπώς, για να δούμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής, αρκεί να ελέγξουμε τα σημεία του X που είναι σημεία συσσώρευσής του. Ισχύει και εδώ το ανάλογο του θεωρήματος για τα όρια.

Πρόταση 4.6.2. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.*

(β) *Ισχύει ότι $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.*

Η συνέχεια μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται στη συνέχεια των συνιστωσών συναρτήσεών της. Συγκεκριμένα, από τις Προτάσεις 4.5.2 και 4.6.2 έχουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 4.6.3. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X. Έστω επίσης $f = (f_1, \dots, f_m)$ η ανάλυση της f. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.*

(β) *Για κάθε $i = 1, \dots, m$ η $f_i : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Παραγώγιση πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την παραγώγιση μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x,y)$ που παίρνει πραγματικές τιμές. Θα ξεκινήσουμε με τις πιο ασθενείς έννοιες παραγώγισης που είναι οι λεγόμενες *μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης ως προς* x και y και οι *κατεύθυνόμενες παράγωγοι*. Κατόπιν θα ορίσουμε την πιο ισχυρή έννοια της *(ολικής) παραγώγου* μιας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών και θα δούμε πως σχετίζεται με τις ασθενέστερες έννοιες των μερικών και των κατά κατεύθυνση παραγώγων.

5.1 Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης

Ορισμός 5.1.1. *(Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \to \mathbb{R}$. Το όριο*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0,y_0)}{t}$$

καλείται **μερική παράγωγος ως προς** x **της συνάρτησης** f **στο σημείο** (x_0, y_0) *και συμβολίζεται με*

$$f_x(x_0,y_0) \quad ή \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Θα λέμε ότι η f είναι **μερικώς παραγωγίσιμη ως προς** x **στο σημείο** (x_0, y_0) *αν το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός.*

Ομοίως, το όριο

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0,y_0)}{t}$$

καλείται **μερική παράγωγος ως προς** y **της συνάρτησης** f **στο σημείο** (x_0, y_0) *και συμβολίζεται με*

$$f_y(x_0,y_0) \quad ή \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Θα λέμε ότι η f είναι **μερικώς παραγωγίσιμη ως προς** y **στο σημείο** (x_0, y_0) *αν το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός.*

Έστω $A_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων (x,y) του A στα οποία η $f_x(x,y)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη. Η συνάρτηση $(x, y) \to f_x(x, y)$, $(x, y) \in A_1$ καλείται ***μερική παράγωγος της*** f ***ως προς*** x και συμβολίζεται με f_x ή $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Ομοίως αν $A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A στα οποία η $f_y(x, y)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη τότε η συνάρτηση $(x, y) \to f_y(x, y)$, $(x, y) \in A_2$ καλείται ***μερική παράγωγος της*** f ***ως προς*** y και συμβολίζεται με f_y ή $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Παράδειγμα 5.1.2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Βρείτε τις $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$.

Έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x \cdot 0|} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot y|} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Πρακτικά για να βρούμε την $f_x(x, y)$ μιας πραγματικής συνάρτησης $f(x, y)$ δύο μετβλητών παραγωγίζουμε την f ως προς x θεωρώντας την μεταβλητή y ως σταθερά. Ανάλογα υπολογίζουμε και την $f_y(x, y)$.

Παράδειγμα 5.1.3. Έστω $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$. Τότε για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$ και $f_y(x, y) = 3y^2 + x^2 + 2xy$.

Υπάρχουν και περιπτώσεις όπου οι $f_x(x, y)$ και $f_y(x, y)$ δεν ορίζονται σε όλα τα σημεία $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα 5.1.4. Έστω $f(x, y) = |x| + |y|$. Τότε οι $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ δεν υπάρχουν. Πράγματι,

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

που ως γνωστόν δεν υπάρχει (αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά). Ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|}{y}$$

που πάλι δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 5.1.5. Ομοίως για την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

οι $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ δεν υπάρχουν, αφού όπως παραπάνω

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x|^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

και

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{|y|^2}}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{|y|}{y}$$

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η ύπαρξη των μερικών παραγώγων σε ένα σημείο (x_0, y_0) δεν συνεπάγεται την ύπαρξη του ορίου της f στο (x_0, y_0).

Παράδειγμα 5.1.6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Τότε οι $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ υπάρχουν ενώ η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Πράγματι, όπως είδαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο (δες Παράδειγμα 4.4.5) το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει και άρα η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Όμως

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

και ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

5.2 Κατευθυνόμενες παράγωγοι

Κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$$

θα καλείται *κατεύθυνση* στο $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 5.2.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Το όριο*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

*καλείται **παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο** (x_0, y_0) και συμβολίζεται με*

$$f_{\mathbf{u}}(x_0, y_0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) \quad \text{ή} \quad \partial_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ είναι στην ουσία η παράγωγος του περιορισμού της f στην τομή της ευθείας $L = \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ με το A. Πιο συγκεκριμμένα, αν

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$$

τότε είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

Επίσης αν $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

και ομοίως

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει ότι η ύπαρξη των κατά κατεύθυνση παραγώγων μιας συνάρτησης f δεν εξασφαλίζει την συνέχεια της f.

Παράδειγμα 5.2.2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Δείξτε ότι

(1) Η f δεν έχει όριο στο $(0,0)$.

(2) Όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι της f στο $(0,0)$ υπάρχουν.

Λύση: (1) Δείτε Παράδειγμα 4.4.6.

(2) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Τότε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tu_1, 0+tu_2) - f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3u_1^2u_2}{t^5u_1^4+t^3u_2^2}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^3u_1^2u_2}{t^3(t^2u_1^4+u_2^2)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{u_1^2u_2}{t^2u_1^4+u_2^2}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να συμβεί $u_1 = u_2 = 0$ αφού $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεισ:

(α) $u_2 = 0$. Τότε $u_1^2 = 1$ και $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0} 0 = 0$.

(β) $u_2 \neq 0$. Τότε $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{u_1^2u_2}{t^2u_1^4+u_2^2} = \dfrac{u_1^2u_2}{u_2^2} = \dfrac{u_1^2}{u_2}$.

5.3 Κλίση και Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

Ορισμός 5.3.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, το διάνυσμα $\big(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\big)$ θα καλείται* κλίση *της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ και θα συμβολίζεται με $\nabla f(x_0, y_0)$.*

Ορισμός 5.3.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Λέμε ότι η f είναι* παραγωγίσιμη *(ή* διαφορίσιμη*) στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) και ισχύει ότι*

$$\lim_{\mathbf{h}\to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{5.3.1}$$

Παρατηρήσεις 5.3.3. (i) Ο Ορισμός 5.3.2 αποτελεί μια επέκταση στις συναρτήσεις δύο μεταβλητών του γνωστού ορισμού της παραγωγισιμότητας συνάρτησης μιας μεταβλητής. Πράγματι αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0$$

(ii) Η (5.3.1) γράφεται ισοδύναμα

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)h-f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0 \tag{5.3.2}$$

(iii) Θέτοντας $x = x_0 + h$ και $y = y_0 + k$, έχουμε και μια ακόμη ισοδύναμη μορφή της (5.3.1)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0 \tag{5.3.3}$$

(iv) Αν θέσουμε $R(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h}$ τότε έχουμε και μια τρίτη ισοδύναμη μορφή,

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h} + R(\mathbf{h}) \quad \text{όπου} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}=0 \tag{5.3.4}$$

Η (5.3.4) γράφεται και ως εξής

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|) \tag{5.3.5}$$

Η ύπαρξη μόνο των μερικών παραγώγων χωρίς την συνθήκη (5.3.1) δεν συνεπάγεται την παραγωγισιμότητα της f. Σχετικά έχουμε το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.3.4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

και $f(0,0) = 0$. Τότε,

(1) Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(2) Ισχύει ότι $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

(3) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Απόδειξη. (1) Παρατηρούμε ότι

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot|y| \le |y|$$

και άρα απο τον κανόνα παρεμβολής $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(2) Έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to0} 0 = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to0} 0 = 0$$

(3) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ τότε θα έπρεπε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\|(x,y)\|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$

Όμως το όριο αυτό δεν υπάρχει. Πράγματι, κατά μήκος του x-άξονα έχουμε $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$ ενώ κατά μήκος της $y = x$, έχουμε $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1/2$. □

Ορισμός 5.3.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).*

(1) Ο πίνακας γραμμή

$$\begin{bmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

*θα καλείται **παράγωγος της f στο σημείο** $\mathbf{x}_0$ και θα συμβολίζεται με $f'(x_0, y_0)$.*

(2) Η γραμμική απεικόνιση

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

με τύπο

$$T(x,y) = f_x(x_0,y_0)x + f_y(x_0,y_0)y$$

*θα καλείται **διαφορικό της f στο σημείο** (x_0, y_0) και θα συμβολίζεται με $Df(x_0, y_0)$.*

Πρόταση 5.3.6. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.*

Απόδειξη. Θέτουμε

$$R(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k \tag{5.3.6}$$

για κάθε $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ με $(x_0+h, y_0+k) \in A$. Τότε

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k + R(h,k). \tag{5.3.7}$$

Από την (5.3.1), έχουμε $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ οπότε

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} R(h,k) = 0.$$

Άρα από την (5.3.7) παίρνουμε ότι

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \Big(f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k + R(h,k) \Big) = f(x_0,y_0)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$. □

5.4 Εφαπτόμενο επίπεδο

Θυμίζουμε πρώτα ότι αν $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ το γράφημα (συμβολίζουμε με $Gr(f)$) της f δίνεται από την σχέση

$$Gr(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in A \text{ και } z = f(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3. \tag{5.4.1}$$

Έστω (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0). Το επίπεδο π του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{5.4.2}$$

θα καλείται ***εφαπτόμενο επίπεδο*** της f στο σημείο (x_0, y_0).

Ορίζουμε επίσης

$$\mathbf{n} = (f_x(x_0, y_0), \ f_y(x_0, y_0), \ -1) \tag{5.4.3}$$

Παρατηρείστε ότι ένα σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ περιέχεται στο εφαπτόμενο επιπέδο της f στο (x_0, y_0) αν και μόνο αν $\mathbf{n} \perp (x - x_0, \ y - y_0, \ z - f(x_0, y_0))$. Για τον λόγο αυτόν το διάνυσμα $\mathbf{n}$ καλείται ***κάθετο διάνυσμα*** της f στο σημείο (x_0, y_0).

5.5 Σχέση παραγώγου και κατά κατεύθυνσης παραγώγου

Πρόταση 5.5.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} \tag{5.5.1}$$

για κάθε κατευθύνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ και $\|\mathbf{u}\| = 1$). Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ για $\mathbf{h} = t\mathbf{u}$, $t \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{\|t\mathbf{u}\|} = 0 \tag{5.5.2}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{\|t\mathbf{u}\|} &= \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{|t| \cdot \|\mathbf{u}\|} \\
&= \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{|t|} \\
&= \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - t\,(\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u})}{t} \right| \\
&= \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}) \right|
\end{aligned}$$

και άρα η (5.5.2) γράφεται

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}) \right| = 0$$

Οπότε
$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)}{t}-(\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u})\right)=0$$
δηλαδή
$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)}{t}=\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u}.$$
Επειδή εξ ορισμού $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)}{t}$, έπεται το ζητούμενο. □

Η Πρόταση 5.5.1 θέλει προσοχή στην εφαρμογή της **γιατί δεν ισχύει απαραίτητα αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο** (x_0, y_0). Παραθέτουμε σχετικά τα επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.5.2. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(0,0)=0$ και $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ αν $(x,y)\neq(0,0)$. Δείξτε τα εξής.

(i) Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(ii) Για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u}=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ η παράγωγος της f στο $(0,0)$ κατά την $\mathbf{u}$ υπάρχει.

(iii) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Απόδειξη. (i) Για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$ έχουμε
$$|f(x,y)|=\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{|x|^3}{x^2+y^2}+\frac{|y|^3}{x^2+y^2}\leq\frac{|x|^3}{x^2}+\frac{|y|^3}{y^2}=|x|+|y|$$
Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(ii) Έστω $\mathbf{u}=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\|=1$. Είναι
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\mathbf{u})-f(\mathbf{0})}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3u_1^3+t^3u_2^3}{t^2u_1^2+t^2u_2^2}}{t}=\frac{u_1^3+u_2^3}{u_1^2+u_2^2}=u_1^3+u_2^3.$$
αφού $\|\mathbf{u}\|^2=u_1^2+u_2^2=1$ ($\mathbf{u}$ μοναδιαίο).

(iii) Από το (ii) για $\mathbf{u}=\mathbf{e}_1=(1,0)$,
$$f_x(0,0)=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0,0)=1,$$
και αντίστοιχα για $\mathbf{u}=\mathbf{e}_2=(0,1)$,
$$f_y(0,0)=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0,0)=1.$$
Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ με δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Από τον Ορισμό 5.3.2 γνωρίζουμε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$
ισοδύναμα,
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y+xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$$

Αλλά τότε αν $x = y = t$ θα πρέπει

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t^3}{\sqrt{2}|t|^3} = 0 \text{ή } \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} = 0,$$

που βέβαια δεν ισχύει.

2ος τρόπος: Απο την Πρόταση 5.5.1 αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ τότε θα έπρεπε $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 = u_1 + u_2$.

Όμως απο το (ii) έχουμε ότι $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = u_1^3 + u_2^3$. Άρα θα είχαμε $u_1^3 + u_2^3 = u_1 + u_2$, για όλα τα $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$, άτοπο. □

Παρατήρηση 5.5.3. Δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 5.5.1. Δηλαδή μπορεί να ισχύει ο τύπος $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$ για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u}$ αλλά η f να μην είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).

Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz ($|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$) έχουμε και το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 5.5.4. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \tag{5.5.3}$$

για κάθε κατευθύνση $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Επιπλέον αν $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq (0, 0)$ τότε οι κατευθύνσεις

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$$

είναι αυτές για τις οποίες η f έχει την μέγιστη και αντίστοιχα ελάχιστη κατευθυνόμενη παράγωγο, δηλαδή

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) = \max\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : u \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|u\| = 1\right\} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \tag{5.5.4}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_2}(\mathbf{x}_0) = \min\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : u \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|u\| = 1\right\} = -\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \tag{5.5.5}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμηστο $\mathbf{x}_0$ απο την Πρόταση 5.5.1 έχουμε

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| = |\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \tag{5.5.6}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_1 = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}\\ = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|^2}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|\end{aligned}$$

Άρα αντικαθιστώντας στην (5.5.6) παίρνουμε

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| \le \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0)$$

που δίνει την (5.5.4). Ομοίως για το $\mathbf{u}_2$. □

5.6 Σχέση παραγώγου και μερικών παραγώγων

Είδαμε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο τότε είναι και μερικώς παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Επίσης είδαμε με παράδειγμα ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ότι αν υποθέσουμε επιπλέον ότι οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν σε μια περιοχή του σημείου και ως συναρτήσεις δύο μεταβλητών είναι συνεχείς στο σημείο αυτό, τότε η φ είναι παραγωγίσιμη. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής.

Θεώρημα 5.6.1. *(**Ικανή συνθήκη παραγωγισιμότητας**) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε οι f_x, f_y ορίζονται σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και είναι συνεχείς στο (x_0, y_0). Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).*

Ορισμός 5.6.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ για την οποία οι f_x, f_y ορίζονται σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς καλείται **συνεχώς παραγωγίσιμη** στο A. Το σύνολο όλων των συνεχώς παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων στο A θα συμβολίζεται με $C^1(A)$.*

Το επόμενο πόρισμα του Θεωρήματος 5.6.1 είναι ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο παραγωγισιμότητας.

Πόρισμα 5.6.3. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Αν $f \in C^1(A)$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο A.*

Παράδειγμα 5.6.4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = e^x y + x^2 e^y$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Επίσης βρείτε την παράγωγο στο σημείο $(1, 0)$.

Απόδειξη. Έχουμε $f_x(x, y) = ye^x + 2xe^y$ και $f_y(x, y) = e^x + x^2 e^y$. Οι f_x, f_y είναι συνεχείς. Πράγματι, έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Τότε $f_x(x_n, y_n) = y_n e^{x_n} + 2x_n e^{y_n} \to ye^x + 2xe^y$, απο τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων πραγματικών ακολουθιών. Αφού λοιπόν οι f_x, f_y είναι συνεχείς η f είναι παραγωγίσιμη. Η παράγωγος της f σε ένα οποιοδήποτε σημείο (x, y) εξ ορισμού είναι ο πίνακας γραμμή $f'(x, y) = [f_x(x, y) \quad f_y(x, y)]$. Άρα $f'(1, 0) = [2 \quad e + 1]$. □

Παράδειγμα 5.6.5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = e^{x+2y}$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|}$$

Απόδειξη. Είναι $f_x(x, y) = e^{x+2y}$ και $f_y(x, y) = 2e^{x+2y}$. Άρα η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και συνεπώς είναι παραγωγίσιμη.

Επίσης

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \right)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

λόγω παραγωγισιμότητας της f στο $(0, 0)$. Επειδή

$$\left|\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|}\right| \leq 1$$

έπεται ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|} = 0.$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Παραγώγιση γενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

6.1 Παραγώγιση πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Η θεωρία παραγώγισης μιας πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών είναι άμεση επέκταση της αντίστοιχης θεωρίας παραγώγισης πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

6.1.1 Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης

Ορισμός 6.1.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ εσωτερικό σημείο του A και $f : A \to \mathbb{R}$. Έστω $1 \leq i \leq n$. Το όριο (αν υπάρχει)*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)}{h}.$$

καλείται **μερική παράγωγος ως προς** x_i **της συνάρτησης** f **στο σημείο** $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *και συμβολίζεται με*

$$f_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \quad ή \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

Θα λέμε ότι η f είναι **μερικώς παραγωγίσιμη ως προς** x_i **στο σημείο** $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *αν το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός.*

Αν $A_i \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ του A στα οποία η $f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη τότε η συνάρτηση $(x_1, \ldots, x_n) \to f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in A_1$ καλείται *μερική παράγωγος της f ως προς x_i* και συμβολίζεται με f_{x_i} ή $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Παράδειγμα 6.1.2. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2yz + xy^2z^3$$

Για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, έχουμε

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3x^2 + 2xyz + y^2z^3,$$

$$f_y(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3y^2 + x^2 z + 2xyz^3$$

$$f_z(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + x^2 y + 3xy^2 z^2.$$

6.1.2 Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Κάθε $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ με $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} = 1$ θα καλείται *κατεύθυνση* στο $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 6.1.3. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^n$. Το όριο (αν υπάρχει)*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0 + tu_1, \ldots . x_n^0 + tu_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{t}$$

καλείται ***παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο*** $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$*. Το όριο αυτό συμβολίζεται με*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)$$

Όπως και στην περίπτωση συνάρτησης δύο μεταβλητών παρατηρούμε ότι η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ είναι στην ουσία η παράγωγος του περιορισμού της f στην τομή της ευθείας $L = \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ με το A. Πιο συγκεκριμμένα έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$. Ορίζουμε $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}), \quad t \in (-\delta, \delta)$$

τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η g είναι καλά ορισμένη και

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

Επίσης αν $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = f_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$.

6.1.3 Κλίση, παράγωγος και διαφορικό πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Ορισμός 6.1.4. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Έστω ότι η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ (δηλαδή υπάρχουν οι $f_{x_i}(\mathbf{x}_0)$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και είναι πεπερασμένες). Το διάνυσμα*

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = (f_{x_1}(\mathbf{x}_0), \ldots, f_{x_n}(\mathbf{x}_0))$$

καλείται κλίση ή ανάδελτα *της f στο $\mathbf{x}_0$.*

Ορισμός 6.1.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Λέμε ότι η f είναι* ***παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) στο σημείο*** $\mathbf{x}_0$ *αν η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και ισχύει ότι*

$$\lim_{\mathbf{h}\to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{6.1.1}$$

Παρατήρηση 6.1.6. Θέτοντας $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \Leftrightarrow \mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, ο τύπος (6.1.1) γράφεται και ως εξής

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0. \tag{6.1.2}$$

Ορισμός 6.1.7. *Τον πίνακα γραμμή*

$$[f_{x_1}(\mathbf{x}_0)\dots f_{x_n}(\mathbf{x}_0)]$$

θα τον καλούμε παράγωγο της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$ και θα το συμβολίζουμε με $f'(\mathbf{x}_0)$. Την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$T(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{x} = f_{x_1}(\mathbf{x}_0)\,x_1 + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{x}_0)\,x_n$$

θα την καλούμε διαφορικό της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$ και θα την συμβολίζουμε με $D_{\mathbf{x}_0}f$.

Παράδειγμα 6.1.8. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ μια γραμμική συνάρτηση απο το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$. παρατηρούμε ότι $f_{x_i}(\mathbf{x}) = a_i$ για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \le i \le n$. Άρα για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (a_1,\dots,a_n)\,,\quad f'(\mathbf{x}) = [a_1\ \dots\ a_n],\quad D_{\mathbf{x}}f = f$$

Παράδειγμα 6.1.9. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0,0)$. (Σημειώνουμε εδώ ότι σε ένα προηγούμενο παράδειγμα είχαμε δεί ότι η συνάρτηση $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$)

Έχουμε

$$f_x(0,0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0,0)-f(0,0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

και ομοίως

$$f_y(0,0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h,0)-f(0,0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$f_z(0,0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0,h)-f(0,0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0,0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z)-f(0,0,0)-f_x(0,0,0)x-f_y(0,0,0)y-f_z(0,0,0)z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\sqrt{\frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

Πράγματι, για κάθε $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ έχουμε

$$0 \le \frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} = |x|\cdot\frac{|yz|}{x^2+y^2+z^2} \le |x|$$

(διότι $y^2+z^2 \ge 2|yz| \ge |yz|$) και άρα απο τον κανόνα παρεμβολής $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} = 0.$

6.1.4 Σχέση παραγώγου και κατά κατεύθυνση παραγώγου

Πρόταση 6.1.10. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = f_{x_1}(\mathbf{x}_0)u_1 + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{x}_0)u_n = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} \tag{6.1.3}$$

για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.

Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz ($|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$) έχουμε και το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 6.1.11. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \tag{6.1.4}$$

για κάθε κατευθύνση $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Επιπλέον αν $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq (0,0)$ και

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$$

(οπότε $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1$) τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) = \max\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : u \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|u\| = 1\right\} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \tag{6.1.5}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_2}(\mathbf{x}_0) = \min\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : u \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|u\| = 1\right\} = -\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \tag{6.1.6}$$

6.1.5 Συνεχώς παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Το Θεώρημα 5.6.1 γενικεύεται ως εξής.

Θεώρημα 6.1.12. ***(Ικανή συνθήκη παραγωγισιμότητας)*** *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε για όλα τα $i = 1, \dots, n$ οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της f ως προς x_i ορίζονται σε μια περιοχή του $\mathbf{x}_0$ και είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.*

Το επόμενο πόρισμα του Θεωρήματος 6.1.12 είναι ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο παραγωγισιμότητας.

Πόρισμα 6.1.13. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $i = 1, \dots, n$ η f_{x_i} ορίζεται στο A και είναι συνεχής. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A.*

Ορισμός 6.1.14. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $i = 1, \dots, n$ η f_{x_i} ορίζεται σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχής καλείται* ***συνεχώς παραγωγίσιμη*** *στο A. Το σύνολο όλων των συνεχώς παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων στο A θα συμβολίζεται με $C^1(A)$.*

Με την ορολογία του παραπάνω ορισμού το Πόρισμα 6.1.13 αναδιατυπώνεται ως εξής:

Πόρισμα 6.1.15. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f \in C^1(A)$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A.*

Παρατήρηση 6.1.16. Παρατηρείστε ότι $f \in C^1(A)$ αν και μόνο αν η συνάρτηση $\nabla f : A \to \mathbb{R}^n$ με $\nabla f(\mathbf{x}) = (f_{x_1}(\mathbf{x}), \ldots, f_{x_n}(\mathbf{x}))$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής.

Παράδειγμα 6.1.17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y, z) = xyz$. Βρείτε την παράγωγο της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (1, 2, 3)$.

Λύση: Εύκολα βλέπουμε ότι $f_x(x, y, z) = yz$, $f_y(x, y, z) = xz$ και $f_z(x, y, z) = xy$. Αφού η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους είναι παραγωγίσιμη. Άρα απο την Πρόταση 6.1.10,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1, 2, 3) &= \nabla f(1, 2, 3) \cdot \mathbf{u} \\ &= f_x(1, 2, 3)u_1 + f_y(1, 2, 3)u_2 + f_z(1, 2, 3)u_3 \\ &= 6 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot 0 = \frac{30}{5} = 6.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.1.18. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = e^{x+y^2+z^3}.$$

Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και βρείτε την παράγωγο της στο σημείο $(1, 0, 0)$. Υπολογίστε επίσης το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \frac{e^{x+y^2+z^3} - ex}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}}$$

Λύση: Έχουμε

$$f_x(x, y, z) = e^{x+y^2+z^3}, \;\; f_y(x, y, z) = 2ye^{x+y^2+z^3}, \;\; f_z(x, y, z) = 3z^2 e^{x+y^2+z^3}$$

για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Οι f_x, f_y, f_z είναι συνεχείς. Αφού λοιπόν όλες οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς, έχουμε ότι $f \in C^1(A)$ και άρα απο το Πόρισμα 6.1.15, η f είναι παραγωγίσιμη παντού στο A. Η παράγωγος της f σε ένα οποιοδήποτε σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ εξ ορισμού είναι ο πίνακας γραμμή $f'(x, y, z) = [f_x(x, y, z) \;\; f_y(x, y, z) \;\; f_z(x, y, z)]$. Άρα

$$f'(1, 0, 0) = [f_x(1, 0, 0) \;\; f_y(1, 0, 0) \;\; f_z(1, 0, 0)] = [e \;\; 0 \;\; 0]$$

Επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο $(1, 0, 0)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \frac{f(x, y, z) - f(1, 0, 0) - \nabla f(1, 0, 0) \cdot (x - 1, y, z)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

οπότε αντικαθιστώντας

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \frac{e^{x+y^2+z^3} - e - e(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

και άρα

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \frac{e^{x+y^2+z^3} - ex}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

6.1.6 Εφαπτόμενο υπερεπίπεδο γραφήματος πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Το *υπερεπίπεδο* του $\mathbb{R}^{n+1}$ με εξίσωση

$$x_{n+1} = f(\mathbf{x}_0) + f_{x_1}(\mathbf{x}_0)(x_1 - x_1^0) + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{x}_0)(x_n - x_n^0) \tag{6.1.7}$$

καλείται ***εφαπτόμενο υπερεπίπεδο της f στο σημείο*** $\mathbf{x}_0$. Το διάνυσμα

$$\mathbf{n} = (f_{x_1}(\mathbf{x}_0), \ldots, f_{x_n}(\mathbf{x}_0), \ -1) \in \mathbb{R}^{n+1} \tag{6.1.8}$$

καλείται ***κάθετο διάνυσμα της f στο σημείο*** $\mathbf{x}_0$. Παρατηρείστε ότι ένα σημείο $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ περιέχεται στο εφαπτόμενο υπερεπιπέδο της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ αν και μόνο αν το διάνυσμα $\mathbf{n}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\left(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0, \ x_{n+1} - f(\mathbf{x}_0)\right)$.

Παράδειγμα 6.1.19. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και βρείτε τον τύπο του εφαπτόμενου υπερεπιπέδου της f στο $(1, 2, 3)$.

Λύση: Έχουμε $f_x(x, y, z) = 2x$, $f_y(x, y, z) = 2y$ και $f_z(x, y, z) = 2z$. Παρατηρούμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f ορίζονται σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ και είναι συνεχείς. Άρα η f είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Επίσης $f(1, 2, 3) = 14$ $f_x(1, 2, 3) = 2$, $f_y(1, 2, 3) = 4$ και $f_z(1, 2, 3) = 6$. Άρα (αναπαριστώντας τα σημεία του $\mathbb{R}^4$ με $\mathbf{x} = (x, y, z, w)$) η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο σμείο $(1, 2, 3)$ είναι

$$w = 14 + 2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) \Leftrightarrow 2x + 4y - 6z - w - 4 = 0$$

6.2 Παραγώγιση διανυσματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Η έννοια της παραγώγου διανυσματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών αποτελεί μια άμεση επέκταση των αντίστοιχων ορισμών που δώσαμε για πραγματική συνάρτηση.

Σταθεροποιούμε για τα επόμενα μια συνάρτηση $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και έστω

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$$

η ανάλυση της f σε m συνιστώσες πραγματικές συναρτήσεις $f_i : A \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$. Έστω επίσης $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A.

Πρώτα γενικεύουμε τον ορισμό της κλίσης.

Ορισμός 6.2.1. *Έστω ότι για κάθε $(i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη. Ο $m \times n$ πίνακας*

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ . & . & \ldots & . \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \tag{6.2.1}$$

καλείται κλίση *ή* Ιακωβιανός πίνακας της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x}_0$ *και θα συμβολίζεται με*

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \quad \acute{\eta} \quad \frac{\partial (f_1, \ldots, f_m)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{x}_0)$$

Ορισμός 6.2.2. *Η* $\mathbf{f}$ *θα καλείται* παραγωγίσιμη *(ή* διαφορίσιμη*) στο σημείο* $\mathbf{x}_0$ *αν για κάθε* $1 \leq i \leq m$*, η* i*-συνιστώσα συνάρτηση* $f_i : A \to \mathbb{R}$ *είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο* $\mathbf{x}_0$ *και ισχύει ότι*

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0} \tag{6.2.2}$$

όπου για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \tag{6.2.3}$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε (α) ο Ιακωβιανός πίνακας της $\mathbf{f}$ ορίζεται να είναι η *παράγωγος* της $\mathbf{f}$ και θα συμβολίζεται και με $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ και (β) η γραμμική απεικόνιση με πεδίο ορισμού τον R^n και τιμές στον $\mathbb{R}^m$ που ορίζεται στην (6.2.3) θα καλείται *διαφορικό* της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x}_0$ και θα συμβολίζεται με $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

Η επόμενη πρόταση είναι απλή συνέπεια των Ορισμών 6.2.2 και 6.1.5.

Πρόταση 6.2.3. *Η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbf{x}_0$ *αν και μόνο αν για κάθε* $1 \leq i \leq m$ *η συνάρτηση* $f_i : A \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbf{x}_0$*.*

Από την Πρόταση 6.2.3 και το Πόρισμα 6.1.13 παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 6.2.4. ***(Ικανή συνθήκη παραγωγισιμότητας)*** *Έστω* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και* $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$*. Αν* $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ *και οι* $f_1, \ldots, f_m$ *είναι κλάσης* $C^1(A)$ *(δηλαδή οι μερικές παράγωγοι* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ *ορίζονται για κάθε* $\mathbf{x} \in A$ *και είναι συνεχείς για όλα τα* $i = 1, \ldots, m$ *και* $j = 1, \ldots, n$*) τότε η* $\mathbf{f}$ *είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του* A*.*

Παράδειγμα 6.2.5. Έστω $\mathbf{f}(x, y, z) = \left(x^2 + y^3 + z^4, \sin(xyz)\right)$. Δείξτε ότι η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγό της στο σημείο $(0, 1, 2)$.

Λύση: Έχουμε $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ με $f_1(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$ και $f_2(x, y, z) = \sin(xyz)$. Είναι

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2 \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = 4z^3$$

και

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = yz\cos(xyz), \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = xz\cos(xyz) \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = xy\cos(xyz)$$

Άρα, αφού όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης των f_1, f_2 υπάρχουν και είναι συνεχείς, ε΄χουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη. Απο τον ορισμό της παραγώγου, η παράγωγος της $\mathbf{f}$ σε ένα σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

δίνεται απο τον τύπο

$$\mathbf{f}'(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 3y^2 & 4z^3 \\ yz\cos(xyz) & xz\cos(xyz) & xy\cos(xyz) \end{bmatrix}$$

και άρα

$$\mathbf{f}'(0,1,2) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 32 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.3 Κανόνας αλυσίδας

Με τον όρο *τροχιά* (ή *παραμετρική καμπύλη*) στον $\mathbb{R}^n$ εννοούμε μια συνεχή συνάρτηση $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Το σύνολο τιμών $\{\mathbf{r}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ θα το καλούμε *ίχνος της τροχιάς*. Αν η $\mathbf{r}(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο $t = t_0$ τότε από τον Ορισμό 6.2.1 η παράγωγος της $\mathbf{r}$ στο t_0 είναι ο πίνακας στήλη

$$\mathbf{r}'(t_0) = \begin{bmatrix} x_1'(t_0) \\ . \\ . \\ . \\ x_n'(t_0) \end{bmatrix} \tag{6.3.1}$$

Το διάνυσμα $(x_1'(t_0), \ldots, x_m'(t_0))$ καλείται *εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο* t_0 και θα το συμβολίζουμε και αυτό με $\mathbf{r}'(t_0)$. Αν θεωρήσουμε ότι η μεταβλητή t εκφράζει τον χρόνο και η $\mathbf{r}(t)$ την θέση του κινητού στον $\mathbb{R}^n$ τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{r}'(t_0)$ εκφράζει την ταχύτητα του κινητού την χρονική στιγμή $t = t_0$.

Θεώρημα 6.3.1. ***(Κανόνας Αλυσίδας για Τροχιές)*** *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ μια τροχιά στον $\mathbb{R}^2$. Ορίζουμε $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να είναι η σύνθεσή τους, δηλαδή*

$$F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t)),$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έστω $t_0 \in \mathbb{R}$ και έστω $\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$. Αν η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και ισχύει

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= f_x(x(t_0), y(t_0))\, x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))\, y'(t_0) \\ &= \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0). \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $x_0 = x(t_0)$ και $y_0 = y(t_0)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x_0, y_0)}{t - t_0} \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0 \tag{6.3.4}$$

Για κάθε $(x,y) \in A$ θέτουμε

$$E(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (x_0,y_0) \end{cases}$$

Παρατηρείστε ότι από την (6.3.4) έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} E(x,y) = 0 \tag{6.3.5}$$

(δηλαδή η $E(x,y)$ είναι συνεχής στο (x_0,y_0)), και

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &\quad + E(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \end{aligned} \tag{6.3.6}$$

ότι για όλα τα $(x,y) \in A$ (συμπεριλαμβανομένου του (x_0,y_0)).

Έχουμε τώρα

$$\begin{aligned} F(t) - F(t_0) &= f\,(x(t), y(t)) - f\,(x_0,y_0) \\ &\overset{(6.3.6)}{=} f_x(x_0,y_0)\,(x(t)-x_0) + f_y(x_0,y_0)\,(y(t)-y_0) \\ &\quad + E\,(x(t),y(t))\,\sqrt{(x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t\to t_0} \frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} \\ &= f_x(x_0,y_0)\lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + f_y(x_0,y_0)\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \\ &\quad + \lim_{t\to t_0}\frac{E\,(x(t),y(t))\,\sqrt{(x(t)-x(t_0))^2+(y(t)-y(t_0))^2}}{t-t_0} \\ &= f_x(x_0,y_0)x'(t_0) + f_y(x_0,y_0)y'(t_0) \\ &\quad + \lim_{t\to t_0}\frac{E\,(x(t),y(t))\,\sqrt{(x(t)-x(t_0))^2+(y(t)-y(t_0))^2}}{t-t_0} \end{aligned}$$

Για να ολοκληρωθεί συνεπώς η απόδειξη αρκεί να δειχθεί ότι

$$\lim_{t\to t_0}\frac{E\,(x(t),y(t))\,\sqrt{(x(t)-x(t_0))^2+(y(t)-y(t_0))^2}}{t-t_0} = 0 \tag{6.3.7}$$

Πράγματι, το πηλίκο $\dfrac{E\,(x(t),y(t))\,\sqrt{(x(t)-x(t_0))^2+(y(t)-y(t_0))^2}}{t-t_0}$ γράφεται ως γινόμενο

$$E\,(x(t),y(t))\cdot\frac{\sqrt{(x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2}}{t-t_0}.$$

Το όριο στο t_0 του πρώτου παράγοντα, από την (6.3.5), είναι το μηδέν αφού

$$\lim_{t\to t_0} E\,(x(t),y(t)) = E(x(t_0),y(t_0)) = E(x_0,y_0) = 0 \tag{6.3.8}$$

Επίσης το όριο του δεύτερου παράγοντα στο t_0 υπάρχει και είναι πεπερασμένο:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}\frac{\sqrt{(x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2}}{t-t_0} &= \lim_{t\to t_0}\sqrt{\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\right)^2+\left(\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right)^2}\\ &= \sqrt{(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2}\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 6.3.2. Έστω $F(t)=f(x(t),y(t))$ όπου $f(x,y)=x^2+2y^2$, $x(t)=\sin t$ και $y(t)=\cos t$. Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}=4y,\ \ x'(t)=\cos t,\ \ y'(t)=-\sin t$$

Άρα

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}y'(t)=2x\cos t-4y\sin t=2\sin t\cos t-4\cos t\sin t=-2\cos t\sin t$$

Παρατήρηση 6.3.3. Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την $F'(t)$ και ως εξής

$$F(t)=f(x(t),y(t))=x^2(t)+2y^2(t)=\sin^2 t+2\cos^2 t=1+\cos^2 t$$

οπότε $F'(t)=-2\cos t\sin t$.

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται άμεσα με ανάλογη απόδειξη:

Θεώρημα 6.3.4. *Έστω $f(x_1,\dots,x_n)$ πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών και $\mathbf{r}(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$ μια τροχιά στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ να είναι η σύνθεσή τους δηλαδή*

$$F(t)=f\,(\mathbf{r}(t))=f\,(x_1(t),\dots,x_n(t))\,,$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Αν η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0\in\mathbb{R}$ και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0)$ τότε η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και ισχύει ότι

$$F'(t_0)=\nabla f\,(\mathbf{r}(t_0))\cdot\mathbf{r}'(t_0)\quad(\textit{εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων}) \tag{6.3.9}$$

ή ισοδύναμα

$$F'(t_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{r}(t_0)) \ \dots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{r}(t_0))\right] \cdot \begin{bmatrix} x_1'(t_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n'(t_0) \end{bmatrix}$$
$$(6.3.10) \qquad = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{r}(t_0))\, x_1'(t_0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{r}(t_0))\, x_n'(t_0)$$

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ μια τροχιά στο $\mathbb{R}^2$. Η καμπύλη–τροχιά $C = \{\mathbf{r}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ θα καλείται ***ισοσταθμική καμπύλη της*** f αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{r}(t)) = c$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 6.3.5. ***(Καθετότητα του*** ∇f ***και των ισοσταθμικών)*** *Έστω* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *και* $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ *μια ισοσταθμική καμπύλη της* f. *Αν για κάθε* $t \in \mathbb{R}$ *η* $\mathbf{r}$ *είναι παραγωγίσιμη και η* f *παραγωγίσιμη στο* $\mathbf{r}(t)$ *τότε για κάθε* $t \in \mathbb{R}$ *το διάνυσμα* $\nabla f(\mathbf{r}(t))$ *της κλίσης της* f *στο σημείο* $\mathbf{r}(t)$ *είναι κάθετο με το εφαπτόμενο διάνυσμα* $\mathbf{r}'(t)$ *της τροχιάς στο* t.

Απόδειξη. Έστω $F(t) = f(\mathbf{r}(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Η F είναι σταθερή συνάρτηση και άρα $F'(t) = 0$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}$. Απο την άλλη μεριά έχουμε ότι $F'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$. Άρα $\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ δηλαδή $\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$. □

Θεώρημα 6.3.6. ***(Θεώρημα Μέσης Τιμής για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών*** *Έστω* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *ανοικτό και* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ *δύο διαφορετικά σημεία του* A *τέτοια ώστε το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *με άκρα τα* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *να περιέχεται στο* A. *Έστω* $f : A \to \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε η* f *είναι συνεχής σε κάθε* (x, y) *στο κλειστό ευθ. τμήμα* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) : t \in (0, 1)\}$ *και παραγωγίσιμη σε κάθε* (x, y) *στο ανοικτό ευθ. τμήμα* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. *Τότε υπάρχει* $\xi \in (0, 1)$ *τέτοιο ώστε*

$$(6.3.11) \qquad f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Ισοδύναμα, υπάρχει σημείο $\boldsymbol{\xi}$ *στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *τέτοιο ώστε*

$$(6.3.12) \qquad f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ και έστω $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})),$$

για κάθε $t \in [0, 1]$. Επειδή $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] \subseteq A$ η F είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον το εφαπτόμενο διάνυσμα της $\mathbf{r}(t)$ είναι σταθερό με $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, για οποιοδήποτε $t \in [0, 1]$. Άρα, αφού η f είναι παραγωγίσιμη, απο τον κανόνα αλυσίδας έπεται ότι και η F είναι παραγωγίσιμη με

$$(6.3.13) \qquad F'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \nabla f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

για κάθε $t \in (0, 1)$. Απο το Θεώρημα Μέσης Τιμής (για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) έχουμε

$$(6.3.14) \qquad F(1) - F(0) = F'(\xi)$$

για κάποιο $\xi \in (0,1)$. Επειδή $F(0) = f(\mathbf{a})$ και $F(1) = f(\mathbf{b})$ αντικαθιστώντας στην (6.3.14) παίρνουμε

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f\,(\mathbf{a} + \xi(\mathbf{b}-\mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b}-\mathbf{a})$$

Θέτοντας τώρα $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{a} + \xi(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ έχουμε ότι $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{a},\mathbf{b})$ και

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f\,(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{b}-\mathbf{a})$$

□

Πόρισμα 6.3.7. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η f είναι σταθερή.

(2) Για κάθε $(x,y) \in A$, ισχύει ότι $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$.

Απόδειξη. (1) $\implies$ (2) Αν η f είναι σταθερή τότε

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

και ομοίως

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

(2) $\implies$ (1) Έστω $\mathbf{a} = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ και έστω $c = f(\mathbf{a})$. Έστω $\mathbf{b} = (b_1,b_2)$ τυχόν σημείο του $\mathbb{R}^2$ διαφορετικό του $\mathbf{a}$. Αφού οι f_x, f_y ως σταθερές είναι και συνεχείς έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$. Τώρα απο το Θεώρημα 6.3.6 έχουμε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{a},\mathbf{b})$ με

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = f_x(\boldsymbol{\xi})(b_1 - a_1) + f_y(\boldsymbol{\xi})(b_2 - a_2)$$

και άρα αφού $f_x = f_y = 0$ έπεται ότι $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = 0$ δηλαδή $f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) = c$. □

Σημείωση: Το Πόρισμα 6.3.7 δεν ισχύει όταν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Πχ. έστω $A = D_1 \cup D_2$, όπου D_1, D_2 δύο ξένοι ανοικτοί δίσκοι του $\mathbb{R}^2$ και $f(x,y) = 1$ αν $(x,y) \in D_1$ ενώ $f(x,y) = 2$ αν $(x,y) \in D_2$. Τότε $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ αλλά η f δεν είναι σταθερή. Το πρόβλημα εδώ είναι ότι ένα ευθ. τμήμα που συνδέει ένα σημείο απο τον ένα δίσκο με ένα σημείο απο τον άλλον δεν περιέχεται όλο στο A και έτσι το Θεώρημα 6.3.6 δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Θεώρημα 6.3.8. ***(Γενικός Κανόνας Αλυσίδας)*** *Έστω $n,m,k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ και έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$. Αν η $\mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$ τότε η $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και ισχύει ότι*

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'\,(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'\,(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{x}_0) \tag{6.3.15}$$

Η (6.3.15) λέει ότι ο πίνακας των μερικών παραγώγων της σύνθεσης $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ ισούται με το γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$.

Πόρισμα 6.3.9. *Έστω $f = f(x,y)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών και έστω $x = x(u,v)$ και $y = y(u,v)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Τότε η συνάρτηση*

$$F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$$

είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \textit{και} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Πόρισμα 6.3.10. *Έστω $f(x,y,z)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τριών μεταβλητών και έστω $x(u,v,w)$ και $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις τριών μεταβλητών. Τότε η συνάρτηση*

$$F(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\
\frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial v} \\
\frac{\partial F}{\partial w} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial w}
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.3.11. Έστω $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $x = x(u,v) = u + v$, $y = y(u,v) = 2u - v$. Έστω $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Υπολογίστε τις $\frac{\partial F}{\partial u}$ και $\frac{\partial F}{\partial v}$.

Έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = (2x+y) + 2(x+2y) = 4x + 5y = 4(u+v) + 5(2u-v) = 14u + v$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = (2x+y) - (x+2y) = x - y = u + v - 2u + v = -u + 2v$$

Παράδειγμα 6.3.12. Έστω $f(x,y,z)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x(u,v,w) = u - v$, $y(u,v,w) = v - w$, $z = z(u,v,w) = w - u$ και $F(u,v,w) = f(x(u,v,w), x(u,v,w), x(u,v,w))$. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

Έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial F}{\partial w} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w} = -\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε την ζητούμενη σχέση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Μερικές Παράγωγοι ανώτερης τάξης, Θεώρημα Taylor

7.1 Μερικές Παράγωγοι ανώτερης τάξης για συναρτήσεις δύο μεταβλητών

7.1.1 Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Έστω (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε οι f_x, f_y να υπάρχουν τουλάχιστον σε μια περιοχή του (x_0, y_0). Οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων f_x, f_y ως προς x και y στο σημείο (x_0, y_0) (εφόσον υπάρχουν) καλούνται ***μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της*** f ***στο σημείο*** (x_0, y_0).

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τέσσερεις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x_0, y_0) &= (f_x)_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f_x(x, y_0) - f_x(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
f_{xy}(x_0, y_0) &= (f_x)_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f_x(x_0, y) - f_x(x_0, y_0)}{y - y_0} \\
f_{yx}(x_0, y_0) &= (f_y)_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f_y(x, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
f_{yy}(x_0, y_0) &= (f_y)_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f_y(x_0, y) - f_y(x_0, y_0)}{y - y_0}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε επίσης τους συμβολισμούς

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) &= f_{xx}(x_0, y_0), \quad & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) &= f_{xy}(x_0, y_0) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) &= f_{yx}(x_0, y_0), \quad & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) &= f_{yy}(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Οι μερικές παράγωγοι $f_{xx}(x_0, y_0)$, $f_{xy}(x_0, y_0)$, $f_{yy}(x_0, y_0)$ και $f_{yx}(x_0, y_0)$ είναι οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0). Ειδικότερα, οι $f_{xy}(x_0, y_0)$ και $f_{yx}(x_0, y_0)$ καλούνται ***μεικτές*** μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0).

Με τον παραπάνω τρόπο ορίζονται οι συναρτήσεις f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} στα κατάλληλα σύνολα των σημείων (x, y) του A όπου οι τιμές $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένες.

Παράδειγμα 7.1.1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$. Για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε $f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$, $f_y(x, y) = 3y^2 + x^2 + 2xy$ και

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y)(= (f_x)_x(x, y)) &= 6x + 2y, \quad & f_{xy}(x, y)(= (f_x)_y(x, y)) &= 2x + 2y, \\ f_{yx}(x, y)(= (f_y)_x(x, y)) &= 2x + 2y, \quad & f_{yy}(x, y)(= (f_y)_y(x, y)) &= 6y + 2x. \end{aligned}$$

7.1.2 Συμμετρία των μεικτών παραγώγων δεύτερης τάξης

Στο Παράδειγμα 7.1.1 οι μεικτές μερικές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} είναι ίσες. Αυτό δεν είναι τυχαίο διότι για τη συνάρτηση του παραπάνω παραδείγματος ισχύουν οι υποθέσεις του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 7.1.2 (Θεώρημα Schwarz). *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Αν οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης ορίζονται σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και είναι συνεχείς στο (x_0, y_0), τότε $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.*

Το Θεώρημα 7.1.2 διατυπώνεται και σε ισχυρότερη μορφή ως εξής.

Θεώρημα 7.1.3. *(Ισχυρή μορφή του Θεωρήματος Schwarz) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y και f_{xy} ορίζονται και έστω ότι η f_{xy} είναι συνεχής στο (x_0, y_0). Τότε ορίζεται και η $f_{yx}(x_0, y_0)$ και ισχύει ότι $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$.*

Για την απόδειξη του θεωρήματος 7.1.3 θα χρειασθούμε κάποια προεργασία. Δείχνουμε καταρχάς την εξής πρόταση.

Πρόταση 7.1.4. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ορίζουμε*

$$\Delta(x, y) = f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)$$

(i) *Έστω ότι η μερική παράγωγος $f_x(x, y)$ και η μεικτή παράγωγος $f_{xy}(x, y)$ ορίζονται για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Τότε για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $x \neq x_0$ και $y \neq y_0$ υπάρχουν $\overline{x} = \overline{x}(x, y) \in \mathbb{R}$ και $\overline{y} = \overline{y}(x, y) \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το $\overline{x}$ είναι μεταξύ των x_0 και x, το $\overline{y}$ είναι μεταξύ των y_0 και y τέτοιο ώστε*

$$\frac{\Delta(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)} = f_{xy}\left(\overline{x}, \overline{y}\right).$$

Ειδικότερα αν η f_{xy} είναι συνεχής στο (x_0, y_0) τότε

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\Delta(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)} = f_{xy}\left(x_0, y_0\right)$$

(ii) *Αν η μερική παράγωγος $f_y(x, y)$ της f ορίζεται για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τότε*

$$\lim_{y\to y_0} \frac{\Delta(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)} = \frac{f_y(x, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{(x - x_0)(y - y_0)}$$

για κάθε $x \neq x_0$.

(iii) *Αν η μερική παράγωγος $f_x(x, y)$ της f ορίζεται για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τότε*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\Delta(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)} = \frac{f_x(x_0, y) - f_x(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

για κάθε $y \neq y_0$.

(iv) *Αν οι μερικές παράγωγοι $f_x(x,y)$ και $f_y(x,y)$ της f ορίζονται για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ τότε*

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0}\frac{\Delta(x,y)}{(x-x_0)(y-y_0)}\right) = f_{yx}(x_0,y_0) \quad \textit{και} \quad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta(x,y)}{(x-x_0)(y-y_0)}\right) = f_{xy}(x_0,y_0)$$

Απόδειξη. (iii) Έστω $y \neq y_0$ και έστω

$$\Delta_y(x) = f(x,y) - f(x,y_0)$$

Τότε

$$\Delta_y(x) - \Delta_y(x_0) = f(x,y) - f(x,y_0) - f(x_0,y) + f(x_0,y_0) = \Delta(x,y) \tag{7.1.1}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η συνάρτηση Δ_y είναι παραγωγίσιμη με

$$\Delta_y'(x) = f_x(x,y) - f_x(x,y_0) \tag{7.1.2}$$

Σταθεροποιούμε τώρα ένα $x \neq x_0$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει $\overline{x}$ μεταξύ των x_0 και x τέτοιο ώστε

$$\frac{\Delta_y(x) - \Delta_y(x_0)}{x - x_0} = \Delta_y'(\overline{x}) \overset{(7.1.1),(7.1.2)}{\Rightarrow} \frac{\Delta(x,y)}{x-x_0} = f_x(\overline{x},y) - f_x(\overline{x},y_0) \tag{7.1.3}$$

Εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την συνάρτηση $\varphi(y) = f_x(\overline{x},y)$, έχουμε ότι υπάρχει $\overline{y}$ μεταξύ των y_0, y τέτοιο ώστε

$$f_x(\overline{x},y) - f_x(\overline{x},y_0) = f_{xy}(\overline{x},\overline{y})(y-y_0) \tag{7.1.4}$$

Αντικαθιστώντας στην (7.1.3) προκύπτει ότι

$$\frac{\Delta(x,y)}{(x-x_0)(y-y_0)} = f_{xy}(\overline{x},\overline{y})$$

(ii) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από τον ορισμό των $f_y(x,y_0)$ και $f_y(x_0,y_0)$ έχουμε

$$\begin{aligned} f_y(x,y_0) - f_y(x_0,y_0) &= \lim_{y\to y_0}\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} - \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} \\ &= \lim_{y\to y_0}\frac{f(x,y)-f(x,y_0)-f(x_0,y)+f(x_0,y_0)}{y-y_0} = \lim_{y\to y_0}\frac{\Delta(x,y)}{y-y_0} \end{aligned}$$

(iii) Ομοίως έστω $y \in \mathbb{R}$. Από τον ορισμό των $f_x(x,y_0)$ και $f_x(x_0,y_0)$ έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x_0,y) - f_x(x_0,y_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y)-f(x_0,y)}{x-x_0} - \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y)-f(x_0,y)-f(x,y_0)+f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\Delta(x,y)}{x-x_0} \end{aligned}$$

(iv) Από το (ii) έχουμε

$$f_{yx}(x_0,y_0) = (f_y)_x(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f_y(x,y_0)-f_y(x_0,y_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0}\frac{\Delta(x,y)}{(x-x_0)(y-y_0)}\right)$$

Αντίστοιχα, από το (iii), παίρνουμε

$$f_{xy}(x_0,y_0) = (f_x)_y(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0}\frac{f_x(x_0,y)-f_x(x_0,y_0)}{y-y_0} = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta(x,y)}{(x-x_0)(y-y_0)}\right)$$

□

Θα χρειασθούμε επίσης και την εξής γενική πρόταση.

Πρόταση 7.1.5. *Έστω $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ και έστω $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) *Το $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}F(x,y)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.*

(ii) *Το $\lim_{y\to y_0}F(x,y)$ υπάρχει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.*

(iii) *Το $\lim_{x\to x_0}F(x,y)$ υπάρχει για κάθε $y\in\mathbb{R}$.*

Τότε

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0}F(x,y)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0}f(x,y)\right) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}F(x,y)$$

Απόδειξη. Θέτουμε $L=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$. Από τον ορισμό του ορίου έχουμε ότι

$$(\forall\varepsilon>0)\ \ (\exists\delta>0)\ \left[\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\Rightarrow|f(x,y)-L|<\varepsilon\right]$$

Άρα θέτοντας $g(y)=\lim_{x\to x_0}F(x,y)$ και $h(x)=\lim_{y\to y_0}F(x,y)$ παίρνουμε ότι

$$|y-y_0|<\delta\Rightarrow|g(y)-L|\leqslant\varepsilon \text{ και } |x-x_0|<\delta\Rightarrow|h(x)-L|\leqslant\varepsilon$$

Παίρνοντας πάλι όρια έπεται ότι

$$\lim_{y\to y_0}|g((y)-L|\leqslant\varepsilon \text{ και } \lim_{x\to x_0}|h(x)-L|\leqslant\varepsilon$$

Όμως αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon>0$. Άρα

$$\lim_{y\to y_0}g(y) = \lim_{x\to x_0}h(x) = L$$

ισοδύναμα

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0}F(x,y)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{x\to x_0}F(x,y)\right) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}F(x,y)$$

□

Απόδειξη του θεωρήματος 7.1.3. Από τα (i)-(ii) της Πρότασης (7.1.4) προκύπτει ότι όλες οι υποθέσεις της 7.1.5 ικανοποιούνται για την συνάρτηση $F(x,y)=\dfrac{\Delta(x,y)}{(x-x_0)(y-y_0)}$. Από το iv της Πρότασης (7.1.4) και το συμπέρασμα της 7.1.5 έχουμε τελικά ότι $f_{yx}(x_0,y_0)=f_{xy}(x_0,y_0)$. □

Το επόμενο παράδειγμα που δείχνει ότι η υπόθεση της συνέχειας των μερικών παραγώγων είναι απαραίτητη.

Παράδειγμα 7.1.6 (παράδειγμα συνάρτησης για την οποία $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

αν $(x,y) \neq (0,0)$. Θα δείξουμε ότι $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} \tag{7.1.5}$$

και

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x}. \tag{7.1.6}$$

Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε τις $f_x(0,0), f_y(0,0), f_x(0,y)$ και $f_y(x,0)$. Για το σημείο $(0,0)$ έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

Για το σημείο $(0,y)$, με $y \neq 0$,

$$f_x(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = -y,$$

και τέλος για το $(x,0)$ με $x \neq 0$,

$$f_y(x,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = x.$$

Αντικαθιστώντας στις (7.1.5) και (7.1.6) παίρνουμε

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1$$

ενώ

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1.$$

□

7.1.3 Μερικές παράγωγοι τρίτης και μεγαλύτερης τάξης

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης να υπάρχουν σε όλα τα σημεία μιας περιοχής του (x_0,y_0). Οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ ως προς x και y στο σημείο (x_0,y_0) (εφόσον υπάρχουν) καλούνται ***μερικές παράγωγοι τρίτης τάξης της*** f ***στο σημείο*** (x_0,y_0). Υιοθετώντας αντίστοιχο συμβολισμό με αυτόν των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης, συμβολίζουμε τις μερικές παραγώγους τρίτης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0) ως εξής:

$$\begin{aligned}
f_{xxx}(x_0,y_0) &= (f_{xx})_x(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)\\
f_{xxy}(x_0,y_0) &= (f_{xx})_y(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x_0,y_0)\\
f_{xyx}(x_0,y_0) &= (f_{xy})_x(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x_0,y_0)\\
f_{xyy}(x_0,y_0) &= (f_{xy})_y(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(x_0,y_0)\\
f_{yxx}(x_0,y_0) &= (f_{yx})_x(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_0,y_0)\\
f_{yxy}(x_0,y_0) &= (f_{yx})_y(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}(x_0,y_0)\\
f_{yyx}(x_0,y_0) &= (f_{yy})_x(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_0,y_0)\\
f_{yyy}(x_0,y_0) &= (f_{yy})_y(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

Αν τώρα οι μερικές παράγωγοι της f έως και τρίτης τάξης υπάρχουν σε όλα τα σημεία μιας περιοχής του (x_0, y_0) τότε οι μερικές τους παράγωγοι στο σημείο (x_0, y_0) ως προς x και y (εφόσον υπάρχουν) καλούνται ***μερικές παράγωγοι τέταρτης τάξης της f στο σημείο*** (x_0, y_0). Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε τις ***μερικές παραγώγους n-τάξης της f στο σημείο*** (x_0, y_0).

Το Θεώρημα 7.1.2 γενικεύεται με επαγωγή ως εξής.

Θεώρημα 7.1.7. *Έστω $n \geq 2$, $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A. Αν οι μερικές παράγωγοι της f έως και n-τάξης ορίζονται σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και είναι συνεχείς στο (x_0, y_0) τότε όλες οι μεικτές μερικές παράγωγοι στο (x_0, y_0) που περιέχουν τον ίδιο αριθμό παραγωγίσεων ως προς x και τον ίδιο αριθμό παραγωγίσεων ως προς y με διαφορετική σειρά είναι ίσες.*

Για παράδειγμα, αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 7.1.7 για $n = 3$ τότε

$$f_{xyx}(x_0,y_0) = f_{xxy}(x_0,y_0) = f_{yxx}(x_0,y_0).$$

7.2 Μερικές Παράγωγοι ανώτερης τάξης για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

7.2.1 Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης

Ορισμός 7.2.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ εσωτερικό σημείο του A και $f : A \to \mathbb{R}$. Έστω επίσης $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ και έστω ότι η f_{x_i} ορίζεται σε μια περιοχή του $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Τότε αν υπάρχει η μερική παράγωγος της f_{x_i} ως προς x_j στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, δηλαδή αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_j^0 + h, \ldots, x_n^0) - f_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_j^0, \ldots x_n^0)}{h}.$$

τότε αυτό καλείται **μερική παράγωγος της** f **στο σημείο** $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ **ως προς** x_i **και** x_j *και συμβολίζεται με*

$$f_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \quad ή \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

Ειδικότερα αν $i = j$ *τότε γράφουμε*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1^0, \ldots, x_n^0))$$

Παρατηρείστε ότι

$$\begin{aligned} f_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0) &= (f_{x_i})_{x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_1^0, \ldots, x_n^0) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \end{aligned}$$

Η μερική παράγωγος $f_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ καλείται ***δεύτερης τάξης*** μερική παράγωγος στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Ειδικότερα αν $i \neq j$ η $f_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ καλείται ***μεικτή***.

Παράδειγμα 7.2.2. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3.$$

Για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, έχουμε

$$f_x(x, y, z) = 3x^2, \quad f_y(x, y, z) = 3y^2, \quad f_z(x, y, z) = 3z^2$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y, z) &= (f_x)_x(x, y, z) = 6x \\ f_{xy}(x, y, z) &= (f_x)_y(x, y, z) = 0, \\ f_{xz}(x, y, z) &= (f_x)_z(x, y, z) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yx}(x, y, z) &= (f_y)_x(x, y, z) = 0 \\ f_{yy}(x, y, z) &= (f_y)_y(x, y, z) = 6y \\ f_{yz}(x, y, z) &= (f_y)_z(x, y, z) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{zx}(x, y, z) &= (f_z)_x(x, y, z) = 0 \\ f_{zy}(x, y, z) &= (f_z)_y(x, y, z) = 0 \\ f_{zz}(x, y, z) &= (f_z)_z(x, y, z) = 6z. \end{aligned}$$

7.2.2 Συμμετρία των μεικτών παραγώγων δεύτερης τάξης

Το Θεώρημα 7.1.3 αναδιατυπώνεται γενικότερα για συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ως εξής.

Θεώρημα 7.2.3. *Έστω* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *και* $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. *Υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι* f_{x_i}, f_{x_j} *και* $f_{x_i x_j}$ *ορίζονται και έστω ότι η* $f_{x_i x_j}$ *είναι συνεχής στο* $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. *Τότε ορίζεται και η* $f_{x_j x_i}(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ *και ισχύει ότι* $f_{x_j x_i}(x_0^1, \ldots, x_0^n) = f_{x_i x_j}(x_0^1, \ldots, x_0^n)$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7.1.3 για την συνάρτηση $f(x_0^1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_0^n)$. □

Πόρισμα 7.2.4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$. Έστω ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς. Τότε οι μεικτές μερικές παράγωγοι $f_{x_i x_j}$ και $f_{x_j x_i}$ είναι ίσες.*

7.2.3 Μερικές παράγωγοι τρίτης και μεγαλύτερης τάξης

Ορισμός 7.2.5. *(**Μερικές παράγωγοι τρίτης τάξης**) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ εσωτερικό σημείο του A και $f : A \to \mathbb{R}$. Έστω επίσης $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ και έστω ότι η $f_{x_i x_j}$ ορίζεται σε μια περιοχή του $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Τότε αν υπάρχει η μερική παράγωγος της $f_{x_i x_j}$ ως προς x_k στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, δηλαδή αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_{x_i x_j}(x_1^0, \dots, x_k^0 + h, \dots, x_n^0) - f_{x_i}(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots x_n^0)}{h}.$$

*τότε αυτό καλείται **μερική παράγωγος της f στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ ως προς** x_i, x_j **και** x_k και συμβολίζεται με*

$$f_{x_i x_j x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0) \quad \acute{\eta} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

Ειδικότερα αν $i = j \neq k$ τότε γράφουμε

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i^2}(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

και αν $i = j = k$,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k^3}(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

Παρατήρηση 7.2.6. Παρατηρείστε ότι

$$\begin{aligned} f_{x_i x_j x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0) &= \left(f_{x_i x_j}\right)_{x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0) \\ &= \left((f_{x_i})_{x_j}\right)_{x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0) \\ &= (f_{x_i})_{x_j x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0) \end{aligned}$$

Η μερική παράγωγος $f_{x_i x_j x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0)$ καλείται ***τρίτης τάξης*** μερική παράγωγος στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Ειδικότερα αν τουλάχιστον δύο απο τα i, j, k είναι διαφορετικά τότε η $f_{x_i x_j x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0)$ καλείται ***μεικτή***. Αν τώρα οι μερικές παράγωγοι της f εως και τρίτης τάξης υπάρχουν σε μιας περιοχή του $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ τότε οι μερικές τους παράγωγοι στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ ως προς x_i (εφόσον υπάρχουν) καλούνται ***τέταρτης τάξης μερικές παραγώγους της f στο σημείο*** $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τις n-***τάξης μερικές παράγωγοι της f στο σημείο*** $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το Πόρισμα 7.2.4 γενικεύεται ως εξής.

Θεώρημα 7.2.7. *Έστω $n \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f έως και n- τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς (συμβολικά $f \in C^n(A)$). Τότε όλες οι μεικτές παράγωγοι που περιέχουν τις ίδιες παραγωγίσεις με διαφορετική σειρά είναι ίσες.*

7.3 Πολυώνυμα Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Σταθεροποιούμε για την συνέχεια μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και έστω $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$.

Το *πολυώνυμο Taylor μηδενικής τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$* ορίζεται να είναι το σταθερό πολυώνυμο

$$T_0(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Αν η f είναι κλάσης $C^1(A)$, το *πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$* ορίζεται να είναι το πολυώνυμο

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Αν η f είναι κλάσης $C^2(A)$ ορίζουμε *το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$* να είναι το πολυώνυμο

$$T_2(x, y) = T_1(x, y) + \frac{1}{2}\Big(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2\Big).$$

Παράδειγμα 7.3.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = e^{3x+2y}$. Υπολογίστε τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0 = (0, 1)$.

Λύση. Ελέγχουμε εύκολα ότι

$$f_x(x, y) = 3e^{3x+2y}, \quad f_y(x, y) = 2e^{3x+2y}$$

και

$$f_{xx}(x, y) = (f_x)_x(x, y) = 9e^{3x+2y}, \ f_{xy}(x, y) = (f_x)_y(x, y) = 6e^{3x+2y}$$

$$f_{yx}(x, y) = (f_y)_x(x, y) = 6e^{3x+2y}, f_{yy}(x, y) = (f_y)_y(x, y) = 4e^{3x+2y}.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Επίσης βλέπουμε ότι

$$f_x(0, 1) = 3e^2, \ f_y(0, 1) = 2e^2$$

και

$$f_{xx}(0, 1) = 9e^2, \ f_{xy}(0, 1) = f_{yx}(0, 1) = 6e^2, \ f_{yy}(0, 1) = 4e^2.$$

Συνεπώς, το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $(x_0, y_0) = (0, 1)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= f(0, 1) + f_x(0, 1)x + f_y(0, 1)(y - 1) \\ &= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y - 1) \\ &= -e^2 + 3e^2x + 2e^2y. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0,1)$ είναι το

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) &= f(0,1) + f_x(0,1)x + f_y(0,1)(y-1) \\
&+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(0,1)x^2 + 2f_{xy}(0,1)x(y-1) + f_{yy}(0,1)(y-1)^2\right] \\
&= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y-1) \\
&+ \frac{1}{2!}\left[9e^2x^2 + 12e^2x(y-1) + 4e^2(y-1)^2\right].
\end{aligned}$$

Για να ορίσουμε το πολυώνυμο Taylor n-τάξης με κέντρο το $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ μιας συνάρτησης $f \in C^n(A)$ θα χρειασθεί να εισάγουμε κάποιο συμβολισμό. Πιο συγκεκριμμένα ορίζουμε πρώτα έναν *διαφορικό τελεστή* ως εξής: Αν $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$(\mathbf{h}\cdot\nabla)^{(k)} = \left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{\partial^k}{\partial x^{k-j}\partial y^j}h_1^{k-j}h_2^j \tag{7.3.1}$$

όπου

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \tag{7.3.2}$$

Ο συμβολισμός $\left[h_1\frac{\partial f}{\partial x} + h_2\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{(k)}$ προέρχεται από τον τύπο του *διωνύμου του Νεύτωνα*: Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $k \geq 0$ ακέραιος, τότε

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}b^j \tag{7.3.3}$$

Παράδειγμα 7.3.2. Στις ειδικές περιπτώσεις όπου $k = 0, 1, 2, 3,$ ο διαφορικός τελεστής (7.3.1) δρά ως εξής

$$(\mathbf{h}\cdot\nabla)^{(0)} f(x,y) = \left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(0)} f(x,y) = f(x,y)$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{h}\cdot\nabla)^{(1)} f(x,y) = \left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(1)} f(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h_2 \\
&= f_x(x,y)h_1 + f_y(x,y)h_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{h}\cdot\nabla)^{(2)} f(x,y) = \left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)h_2^2 \\
&= f_{xx}(x,y)h_1^2 + 2f_{xy}(x,y)h_1h_2 + f_{yy}(x,y)h_2^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{h}\cdot\nabla)^{(3)} f(x,y) = \left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{(3)} f(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)h_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)h_1h_2^2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)h_1^2h_2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)h_2^3 \\
&= f_{xxx}(x,y)h_1^3 + +3f_{xxy}(x,y)h_1^2h_2 + 3f_{xyy}(x,y)h_1h_2^2 + f_{yyy}(x,y)h_2^3
\end{aligned}$$

Είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε γενικά τα πολυώνυμα Taylor για οποιαδήποτε τάξη.

Ορισμός 7.3.3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $n \geq 0$ ακέραιος, $f \in C^n(A)$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$. Το πολυώνυμο

$$
\begin{aligned}
T_n(x,y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left((\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot\nabla\right)^{(k)} f(\mathbf{x}_0) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(x_0,y_0) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}}(x_0,y_0)\,(x-x_0)^j (y-y_0)^{k-j}\right)
\end{aligned}
\tag{7.3.4}
$$

καλείται ***πολυώνυμο Taylor*** n***-τάξης της*** f ***με κέντρο το*** $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.

7.4 Θεώρημα Taylor I- Τύπος Taylor για συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Στα επόμενα για κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0), \mathbf{x} = (x, y)$ του $\mathbb{R}^2$ με $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ συμβολίζουμε το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{x}$, δηλαδή

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{x}_0,\mathbf{x}] &= \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), t\in[0,1]\right\} \\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = a_1 + t(b_1-a_1), y = y_0 + t(b_2-y_0), t\in[0,1]\right\}
\end{aligned}
\tag{7.4.1}
$$

Με $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ συμβολίζουμε το ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{x}$, δηλαδή

$$
(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}) = \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), t\in(0,1)\right\}
\tag{7.4.2}
$$

Θεώρημα 7.4.1. *(**Θεώρημα Taylor I**) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $n \geq 0$, $f \in C^{n+1}(A)$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$. Τότε για κάθε $\mathbf{x} = (x, y) \neq \mathbf{x}_0 \in A$ με $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subseteq A$, υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε*

$$
f(x,y) = T_n(x,y) + \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n+1)} f(\xi_1,\xi_2)
\tag{7.4.3}
$$

όπου $(\xi_1, \xi_2) = (x_0 + \xi(x - x_0), y_0 + \xi(y - y_0))$ και $T_n(x, y)$ είναι το πολυώνυμο Taylor n-τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.

Σκιαγράφιση της απόδειξης: Σταθεροποιούμε ένα $\mathbf{x} = (x, y) \in A$ με $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subseteq A$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$
F(t) = f\left(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0)\right) \quad t\in[0,1].
$$

Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι

$$
F^{(k)}(t) = \left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f\left(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0)\right)
\tag{7.4.4}
$$

για κάθε $k = 1, \ldots, m + 1$ και κάθε $t \in [0, 1]$. Από τον τύπο του Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής (Θεώρημα 2.4.6) έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$
F(1) = F(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}
\tag{7.4.5}
$$

Όμως $F(0) = f(x_0, y_0)$, $F(1) = f(x, y)$ και από την (7.4.4) για $t = 0$,

$$F^{(k)}(0) = \left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(x_0, y_0)$$

Άρα

$$F(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(x_0, y_0) = T_n(x, y)$$

και άρα η σχέση (7.4.5) δίνει την (7.4.3). □

7.4.1 Οι πρώτες περιπτώσεις

Το Θεώρημα 7.4.1 για $n = 0$ δίνει το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 7.4.2. ***(Θεώρημα Μέσης Τιμής για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών)*** *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^1(A)$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Τότε για κάθε $\mathbf{x} = (x, y) \in A$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subseteq A$ υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε αν $(\xi_1, \xi_2) = (x_0 + \xi(x - x_0), y_0 + \xi(y - y_0))$, τότε*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(\xi_1, \xi_2)(x - x_0) + f_y(\xi_1, \xi_2)(y - y_0) \tag{7.4.6}$$

Απόδειξη. Έχουμε $T_0(x, y) = f(x_0, y_0)$. Από το Θεώρημα 7.4.1 (για $n = 0$) υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε αν $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) = (x_0 + \xi(x - x_0), y_0 + \xi(y - y_0))$ τότε

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \left[(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{(1)} (\xi_1, \xi_2) \\ &= f(x_0, y_0) + (x - x_0)f_x(\xi_1, \xi_2)) + (y - y_0)f_y(\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \tag{7.4.7}$$

□

Παράδειγμα 7.4.3. Δίνεται C^1 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f_x(x, y) = 5x$ και $f_y(x, y) = 2y$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι $|f(x, y)| \leq 5|x| + 2|y|$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Λύση. Για $(x, y) = (0, 0)$ η ανισότητα προφανώς ισχύει. Έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x, y) \neq (0, 0)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x, y) = f(0, 0) + f_x(\xi x, \xi y)(x - 0) + f_y(\xi x, \xi y)(y - 0) = 5\xi x + 2\xi y \tag{7.4.8}$$

Από την (7.4.8) παίρνουμε

$$|f(x, y)| = |5\xi x + 2\xi y| \leq 5|x| + 2|y| \tag{7.4.9}$$

Ομοίως, για $n = 1$ παίρνουμε το επόμενο.

Πόρισμα 7.4.4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^2(A)$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$. Τότε για κάθε $\mathbf{x} = (x, y) \in A$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subseteq A$, υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε*

$$\begin{aligned} f(x, y) &= T_1(x, y) + R_2(x, y) \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R_2(x, y) \end{aligned} \tag{7.4.10}$$

όπου

$$R_2(x,y) = \frac{1}{2}\Big(f_{xx}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(\xi_1,\xi_2)(y-y_0)^2\Big) \tag{7.4.11}$$

και $(\xi_1,\xi_2) = (x_0+\xi(x-x_0), y_0+\xi(y-y_0))$.

Παράδειγμα 7.4.5. Έστω C^2 συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Αν $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = f_{xy}(x,y) = 2$ για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, αποδείξτε ότι $f(x,y) = (x+y)^2$.

Λύση. Έστω $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ με $(x,y)\neq(0,0)$. Από το Πόρισμα 7.4.4, έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\Big(f_{xx}(\xi x,\xi y)x^2 + 2f_{xy}(\xi x,\xi y)xy + f_{yy}(\xi x,\xi y)y^2\Big) \\ &= x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2 \end{aligned}$$

για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$. Επειδή για $(x,y)=(0,0)$ ο παραπάνω τύπος δίνει ότι $f(0,0)=0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x,y) = x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$, για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

7.5 Θεώρημα Taylor II

Στο κεφάλαιο για την παραγώγιση είδαμε ότι μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0,y_0)$ αν και μόνο αν οι μερικές παράγωγοι $f_x(x_0,y_0)$ και $f_y(x_0,y_0)$ υπάρχουν και

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0. \tag{7.5.1}$$

Επειδή το πρώτης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0 = (x_0,y_0)$ ορίζεται να είναι το

$$T_1(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

ο τύπος (7.5.1) γράφεται και ως εξής

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-T_1(x,y)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} = 0. \tag{7.5.2}$$

Ισοδύναμα, θέτοντας $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x,y)-T_1(x,y)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|}$ έχουμε ότι

$$f(x,y) = T_1(x,y) + \varepsilon(x,y)\cdot\|(x-x_0,y-y_0)\| \text{ όπου } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x,y) = 0 \tag{7.5.3}$$

Ο τύπος (7.5.3) λέει ότι η f γύρω από το $\mathbf{x}_0$ *γραμμικοποιείται*, ισούται δηλαδή με το πολυώνυμο πρώτου βαθμού $T_1(x,y)$. Το επόμενο θεώρημα γενικεύει τις (7.5.2) και (7.5.3) όταν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως και n-τάξης.

Θεώρημα 7.5.1 (Θεώρημα Taylor II). *Έστω $n\geq 1$ ακέραιος, $A\subseteq\mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f\in C^n(A)$. Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_0,y_0)\in A$ και $T_n(x,y)$ το πολυώνυμο Taylor n-τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0$. Τότε για κάθε $(x,y)\in A$,*

$$f(x,y) = T_n(x,y) + \varepsilon(x,y)\cdot\|\,(x-x_0.y-y_0)\,\|^n \text{ όπου } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x,y) = 0. \tag{7.5.4}$$

Ισοδύναμα,

(7.5.5)
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-T_n(x,y)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|^n} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-T_n(x,y)}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^{n/2}} = 0.$$

Για παράδειγμα, αν $n=2$, έχουμε το εξής

Πόρισμα 7.5.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^2(A)$. Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$ και $T_2(x,y)$ το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0$. Τότε,*

$$f(x,y) = T_2(x,y) + \varepsilon_2(x,y)\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)$$

για κάθε $(x,y) \in A$, ή ισοδύναμα,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-T_2(x,y)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = 0$$

Ειδικότερα αν $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ τότε

$$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right] + \varepsilon_2(x,y)\left(x^2+y^2\right)$$

με $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon_2(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-T_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0.$

Παράδειγμα 7.5.3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $(0,0)$ δίνεται από τον τύπο $T_2(x,y) = x^2 - y^2$.

(α) Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους της f έως και δεύτερης τάξης στο $(0,0)$.

(β) Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{T_2(x,y)}{x^2+y^2}$.

(γ) Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$.

Λύση. (α) Από τον γενικό τύπο του πολυωνύμου Taylor της f δεύτερης τάξης με κέντρο το $(0,0)$ έχουμε

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right) \\ &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές παίρνουμε

$$f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0,\ \ f_{xx}(0,0) = 2,\ \ f_{yy}(0,0) = -2,\ \ f_{xy}(0,0) = 0$$

(β) Πάνω στον x-άξονα έχουμε

$$\lim_{x\to 0, y=0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = +1$$

ενώ πάνω στον y-άξονα έχουμε

$$\lim_{y\to 0, x=0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -1$$

Συνεπώς, το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{T_2(x,y)}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει.

(γ) Από το Θεώρημα Taylor γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-T_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$. Άρα αν υποθέσουμε ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ υπάρχει, τότε θα υπήρχε και το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{T_2(x,y)}{x^2+y^2}$ και θα ήταν ίσα. Όμως από το προηγούμενο θερώτημα το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{T_2(x,y)}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει. Συνεπώς, και το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 7.5.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = e^{x+y}$. Βρίσκοντας πρώτα τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0,0)$, υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}-1-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

και

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}-1-x-y-xy}{x^2+y^2}.$$

Λύση. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f οποιασδήποτε τάξης ταυτίζονται με την f και συνεπώς όλες οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0)$ οποιασδήποτε τάξης είναι ίσες με το $e^0 = 1$. Συνεπώς, τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0,0)$ είναι αντίστοιχα τα

$$T_1(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 1 + x + y$$

και

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right] \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2!}\left[x^2 + 2xy + y^2\right]. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-T_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}-1-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Επίσης

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-T_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}-1-x-y-\frac{1}{2!}\left[x^2+2xy+y^2\right]}{x^2+y^2} =$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{e^{x+y}-1-x-y-xy}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}\right] = 0$$

που σημαίνει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}-1-x-y-xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Τοπικά ακρότατα

8.1 Τοπικά ακρότατα και Κρίσιμα σημεία

Ορισμός 8.1.1. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}_0 \in X$.*

*(1) Λέμε ότι η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ **τοπικό μέγιστο** αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}) \tag{8.1.1}$$

για όλα τα $\mathbf{x} \in X$ με $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.

*(2) Λέμε ότι η f έχει στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ **τοπικό ελάχιστο** αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \tag{8.1.2}$$

για όλα τα $\mathbf{x} \in X$ με $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.

*(3) Λέμε ότι η f έχει στο το $\mathbf{x}_0$ **τοπικό ακρότατο** αν η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.*

Ένα από τα πλέον κλασικά θεωρήματα σχετικά με τα ακρότατα για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής είναι ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται για συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ως εξής.

Θεώρημα 8.1.2. ***(Θεώρημα Ακροτάτων Τιμών)*** *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό και φραγμένο, και $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο K, δηλαδή υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ με*

$$f(\mathbf{x}_1) = \min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K\} \ \text{και} \ f(\mathbf{x}_2) = \max\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K\}$$

Ορισμός 8.1.3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση που έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in A$ καλείται *κρίσιμο* σημείο της f αν $f_{x_1}(\mathbf{x}_0) = f_{x_2}(\mathbf{x}_0) = \cdots = f_{x_n}(\mathbf{x}_0) = 0$ ή ισοδύναμα αν $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Παρατήρηση 8.1.4. Αν $n = 2$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) τότε ο τύπος του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ είναι

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Συνεπώς, αν το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο της f τότε ο τύπος του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο (x_0, y_0) γίνεται

$$z = f(x_0, y_0)$$

και άρα είναι το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που είναι παράλληλο προς το xy-επίπεδο και διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0, z_0), όπου $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Πρόταση 8.1.5. *(**Θεώρημα Fermat**) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση που έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Τότε, κάθε σημείο τοπικού ακροτάτου της f είναι και κρίσιμο σημείο της f.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x}_0 \in A$ σημείο τοπικού ακροτάτου της f. Για κάθε $1 \leq i \leq n$ έχουμε

$$f_{x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{F_i(t) - F_i(0)}{t} = F_i'(0) \tag{8.1.3}$$

όπου

$$F_i(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i)$$

με $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ για κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$ ώστε $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i \in A$. Αφού $F_i(0) = f(\mathbf{x}_0)$ και το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f, έπεται ότι το $t_0 = 0$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της F_i. Άρα, από την γνωστή πρόταση του Fermat για τοπικά ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής, συμπεραίνουμε ότι $F'(0) = 0$, που λόγω της (8.1.3) σημαίνει ότι $f_{x_i}(\mathbf{x}_0) = 0$. □

Όπως συμβαίνει και στις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, το αντίστροφο της Πρότασης 8.1.5 δεν ισχύει, δηλαδή ένα κρίσιμο σημείο δεν είναι απαραίτητα τοπικό ακρότατο. Παρατηρείστε ότι ένα σημείο $\mathbf{x}_0$ δεν είναι τοπικό ακρότατο για την f αν σε κάθε ανοικτή περιοχή του υπάρχουν σημεία όπου η f λαμβάνει τιμές εκατέρωθεν (δηλαδή μικρότερες και μεγαλύτερες) της τιμής που λαμβάνει στο $\mathbf{x}_0$. Για παράδειγμα, είναι εύκολο να δούμε ότι το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο της $f(x, y) = x^3 + y^3$ αλλά δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου. Πράγματι $f(x, y) > 0$ αν $x > 0$ και $y > 0$ ενώ $f(x, y) < 0$ αν $x < 0$ και $y < 0$.

Ορισμός 8.1.6. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$, με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in A$ θα καλείται **σαγματικό** αν είναι κρίσιμο σημείο της f αλλά δεν είναι τοπικό ακρότατο της f.*

Αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τότε όπως είδαμε στην Παρατήρηση (8.1.4), σε ένα κρίσιμο σημείο (x_0, y_0) το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $z = f(x, y)$ είναι το οριζόντιο επίπεδο (δηλαδή το παράλληλο με το xy-επίπεδο) $z = f(x_0, y_0)$. Όμως αν το $\mathbf{x}_0$ είναι σαγματικό τότε υπάρχουν σημεία όσο κοντά θέλουμε στο (x_0, y_0) όπου η f λαμβάνει και μεγαλύτερες και μικρότερες τιμές από την τιμή που λαμβάνει στο (x_0, y_0). Αυτό σημαίνει ότι οσοδήποτε κοντά στο (x_0, y_0) θα υπάρχουν σημεία (x, y) όπου το γράφημα $z = f(x, y)$ θα βρίσκεται και από πάνω και από κάτω του $z = f(x_0, y_0)$ και άρα δεν θα λέγαμε ότι το $z = f(x_0, y_0)$ εφάπτεται στην επιφάνεια $z = f(x, y)$ αλλά μάλλον ότι την διασχίζει. Αντίστοιχο φαινόμενο υπάρχει και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ έχει το $x_0 = 0$ κρίσιμο σημείο αλλά όχι τοπικό ακρότατο και η εφαπτομένη της $y = f(x)$ στο $x = 0$ είναι ο x-άξονας που διασχίζει την γραφική παράσταση της f. Το σημείο $x_0 = 0$ λεγόταν σημείο *καμπής* της $f(x) = x^3$. Τα σαγματικά σημεία είναι τα αντίστοιχα σημεία καμπής για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Συνήθως γύρω από ένα σαγματικό σημείο η επιφάνεια της f συνήθως μοιάζει με σέλα (σάγμα) εξου και η ονομασία. Υπάρχουν όμως και εξαιρέσεις. Π.χ. το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της συνάρτησης $f(x, y) = y^3$ αλλά το γράφημα της f στο $(0, 0)$ δεν μοιάζει με σέλα, αφού παράγεται από την παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης $f(y) = y^3$ κατά μήκος του x-άξονα. Σε αυτές τις περιπτώσεις υπάρχουν δύο ευθείες ή γενικότερα δύο καμπύλες του $\mathbb{R}^n$ που τέμνονται εγκάρσια σε αυτό το σημείο (με την έννοια ότι δεν είναι εφαπτόμενες) και στην μια από αυτές το σημείο είναι τοπικό μέγιστο για την f ενώ στην άλλη είναι τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα 8.1.7. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 - y^2$. (α) Δείξτε το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f. (β) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

Απάντηση: (α) Έχουμε $f_x(x, y) = 2x$ και $f_y(x, y) = 2y$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη. Από το Θεώρημα 8.1.5 έχουμε ότι τα τοπικά ακρότατα της f αν υπάρχουν θα είναι κρίσιμα σημεία δηλαδή θα είναι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το $(0, 0)$ είναι η μοναδική λύση.

(β) Παρατηρούμε ότι

(1) για κάθε σημείο $(x, y) \neq (0, 0)$ της ευθείας $y = 0$ έχουμε $f(x, 0) = x^2 > 0$ και άρα $f(x, 0) \geq f(0, 0)$ δηλαδή το $(0, 0)$ είναι ελάχιστο για την f στην ευθεία $y = 0$.

(2) για κάθε σημείο $(x, y) \neq (0, 0)$ της ευθείας $x = 0$ έχουμε $f(0, y) = -y^2 < 0$ και άρα $f(0, y) \leq f(0, 0)$ δηλαδή το $(0, 0)$ είναι μέγιστο για την f στην ευθεία $x = 0$.

Άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Παράδειγμα 8.1.8. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^4$. (α) Δείξτε το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f. (β) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

Απάντηση: (α) Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)^3$ και $f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)^3$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)^3 = 0 \\ f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)^3 = 0 \end{cases}$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων, παίρνουμε ότι $x^3 + y^3 = 0$ ή ισοδύναμα

$$y = -x \tag{8.1.4}$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$4x^3 - 4(x - y)^3 = 4x^3 - 4(2x)^3 = 4x^3 - 32x^3 = -28x^3 = 0$$

και άρα $x = 0$. Οπότε απο την (8.1.4) παίρνουμε ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0, 0)$.

(β) Παρατηρούμε ότι

(1) $f(0,0)=0$,

(2) για κάθε σημείο της ευθείας $y=x$ διάφορο του $(0,0)$, είναι $f(x,y)=f(x,x)=2x^4>0$ και

(3) για κάθε σημείο της ευθείας $y=-x$ διάφορο του $(0,0)$, είναι $f(x,y)=f(x,-x)=2x^4-16x^4<0$.

Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

8.2 Το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για συναρτήσεις δυο μεταβλητών

Θυμίζουμε ότι για συναρτήσεις μιας μεταβλητής έχουμε το παρακάτω κριτήριο για τοπικά ακρότατα (ειδική περίπτωση της Πρότασης 2.4.9).

Πρόταση 8.2.1. *(Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) Έστω I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$, $x_0\in I$ και $f:I\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Έστω $f'(x_0)=0$ (δηλαδή το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f) και έστω ότι $f''(x_0)\neq 0$.*

(1) Αν $f''(x_0)>0$ τότε η f έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

(2) Αν $f''(x_0)<0$ τότε η f έχει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

Το κλασσικό παράδειγμα για το παραπάνω κριτήριο είναι οι συναρτήσεις x^2 και $-x^2$. Για την x^2 το $x_0=0$ είναι ελάχιστο και η δεύτερη παράγωγος είναι το $2>0$ ενώ για την $-x^2$ το $x_0=0$ είναι μέγιστο και η δεύτερη παράγωγος είναι το $-2<0$. Παρατηρείστε επίσης ότι το κριτήριο δεν αποφαίνεται στην περίπτωση που $f''(x_0)=0$. Πράγματι, αν $f(x)=x^3$ τότε το $x_0=0$ είναι κρίσιμο σημείο με $f''(0)=0$ αλλά δεν είναι τοπικό ακρότατο. Αντιθέτως αν $f(x)=x^4$ το $x_0=0$ είναι ελάχιστο με $f''(0)=0$.

Η Πρόταση 8.2.1 γενικεύεται για συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 8.2.2. ***(Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών)*** *Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^2$ ανοικτό, και $f:A\to\mathbb{R}$ κλάσης $C^2(A)$. Έστω $(x_0,y_0)\in A$ κρίσιμο σημείο της f, δηλαδή $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$. Έστω*

$$f''(x_0,y_0)=\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0)\\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{bmatrix}$$

ο Εσσιανός πίνακας της f στο (x_0,y_0) και έστω

$$\Delta(x_0,y_0)=\det f''(x_0,y_0)=f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-\left(f_{xy}(x_0,y_0)\right)^2 \tag{8.2.1}$$

η ορίζουσά του.

(α) Αν $\Delta(x_0,y_0)>0$ και $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο (x_0,y_0).

(β) Αν $\Delta(x_0,y_0)>0$ και $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο (x_0,y_0).

(γ) Αν $\Delta(x_0,y_0)<0$ τότε το (x_0,y_0) είναι σαγματικό σημείο της f.

Σκιαγράφηση της απόδειξης. Από το Θεώρημα Taylor II για $n = 2$ (Πόρισμα 7.5.2) έχουμε ότι για κάθε $\mathbf{x} = (x, y) \in A$,

$$f(x,y) = T_2(x,y) + \varepsilon(x,y)\Big((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\Big) \quad \text{με} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x,y) = 0 \tag{8.2.2}$$

όπου $T_2(x,y)$ είναι το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το (x_0, y_0). Επειδή το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο έχουμε $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ και άρα ο τύπος του $T_2(x, y)$ απλοποιείται και γράφεται

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\Big(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big) \tag{8.2.3}$$

Θέτοντας $h = x - x_0$, $k = y - y_0$ και

$$a = f_{xx}(x_0,y_0), \quad b = f_{xy}(x_0,y_0) \quad c = f_{yy}(x_0,y_0)$$

η (8.2.2) γράφεται

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\Big(ah^2 + 2bhk + ck^2\Big) + \varepsilon(h,k)(h^2+k^2) \quad \text{με} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0 \tag{8.2.4}$$

Συναρτήσεις της μορφής

$$Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$, καλούνται *τετραγωνικές συναρτήσεις* και είναι γνωστές από την Γραμμική Άλγεβρα.

Αποδεικνύεται ότι αν $ac - b^2 > 0$ τότε η $Q(h,k)$ διατηρεί πρόσημο. Ειδικότερα αν $a > 0$ τότε $Q(h,k) > 0$ ενώ αν $a < 0$, $Q(h,k) < 0$ για κάθε $(h,k) \neq (0,0)$. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την (8.2.4) συνεπάγεται ότι αν $\Delta(x_0,y_0) > 0$ η διαφορά $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ για (x,y) αρκετά κοντά στο (x_0,y_0), γίνεται θετική ή αρνητική (ανάλογα αν $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ ή $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$). Άρα στην περίπτωση όπου $\Delta(x_0,y_0) > 0$ το (x_0,y_0) είναι τοπικό ελάχιστο για την f αν $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ ή τοπικό μέγιστο αν $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$. Στην περίπτωση όπου $ac - b^2 < 0$ αποδεικνύεται η $Q(h,k)$ δεν διατηρεί πρόσημο το οποίο οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το (x_0,y_0) είναι σαγματικό σημείο για την f. □

Παρατηρήσεις 8.2.3. (α) Αν $\Delta(x_0,y_0) = 0$ τότε το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου δεν εφαρμόζεται. Στις περιπτώσεις αυτές το κρίσιμο σημείο (x_0,y_0) μπορεί να είναι τοπικό ακρότατο μπορεί και όχι.

(β) Αν $\Delta(x_0,y_0) \neq 0$ τότε οι τρεις περιπτώσεις (1)-(3) του θεωρήματος είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις που μπορούν να συμβούν. Πράγματι, η περίπτωση $\Delta(x_0,y_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0,y_0) = 0$ είναι αδύνατον να συμβαίνει αφού τότε από τον ορισμό του $\Delta(x_0,y_0)$ (εξίσωση (8.2.1)) θα είχαμε $f_{xy}^2(x_0,y_0) < 0$ που φυσικά δεν μπορεί να ισχύει.

(γ) Στην περίπτωση (γ) του Θεωρήματος 8.2.2 αποδεικνύεται ειδικότερα ότι υπάρχουν δύο ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από το (x_0,y_0) όπου στην μια η f έχει το (x_0,y_0) ως τοπικό μέγιστο ενώ στην άλλη το έχει ως τοπικό ελάχιστο. Άρα στην περίπτωση που $\Delta(x_0,y_0) < 0$ η γραφική παράσταση της f στο (x_0,y_0) θα μοιάζει όντως με σέλα.

(δ) Υπάρχουν κάποιες λίγες περιπτώσεις (ειδικά αν η συνάρτηση που μελετούμε έχει πολύ απλό τύπο) όπου το κριτήριο δεν χρειάζεται να εφαρμοστεί. Πχ. μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το $(0,0)$ είναι το μοναδικό τοπικό ακρότατο που έχει η $f(x,y) = x^2 + y^2$. Πράγματι, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0)$ και άρα η f έχει στο $(0,0)$ τοπικό (και μάλιστα ολικό) ελάχιστο. Αν τώρα υπήρχε και άλλο τοπικό ακρότατο τότε θα έπρεπε αυτό να ήταν κρίσιμο σημείο ισοδύναμα θα ήταν λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x = 0 \\ f_y(x,y) &= 2y = 0 \end{aligned}$$

Επειδή το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση την $(0,0)$, η f δεν έχει άλλο τοπικό ακρότατο εκτός του $(0,0)$.

Παράδειγμα 8.2.4. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + 3y \\ f_y(x,y) &= 3y^2 + 3x \\ f_{xx}(x,y) &= 6x \\ f_{yy}(x,y) &= 6y \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 3 \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + 3y = 0 \\ f_y(x,y) &= 3y^2 + 3x = 0 \end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται $y = -x^2$ και άρα αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε

$$x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1$$

Άρα έχουμε δύο κρίσιμα σημεία, τα $(0,0)$ και $(-1,-1)$.

Για κάθε (x,y) είναι

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \big(f_{xy}(x,y)\big)^2 = 36xy - 9$$

Έχουμε $\Delta(0,0) = -9 < 0$ και άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό. Επίσης $\Delta(-1,-1) = 36 - 9 > 0$ και $f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$. Άρα το $(-1,-1)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Παράδειγμα 8.2.5. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση: Η $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 - 4(x-y) = 4x^3 - 4x + 4y \\ f_y(x,y) &= 4y^3 + 4(x-y) = 4y^3 + 4x - 4y \\ f_{xx}(x,y) &= 12x^2 - 4 \\ f_{yy}(x,y) &= 12y^2 - 4 \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 4 \end{aligned}$$

όλες συνεχείς. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4(x-y) = 0$$
$$f_y(x,y) = 4y^3 + 4(x-y) = 0$$

με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^3 = -y^3$ ισοδύναμα

$$y = -x$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-2) = 0$ και άρα

$$x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$$

Συνεπώς τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \ \text{ και } \ (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Έχουμε

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2 = (12x^2-4)\cdot(12y^2-4) - 16$$

(1) $\Delta(0,0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Παρατηρούμε ότι

(α) $f(0,0) = 0$,

(β) για κάθε σημείο $(x,y) \neq (0,0)$ της ευθείας $y = 0$ με $x \in (-1,1)$ είναι $f(x,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ και

(γ) για κάθε σημείο $(x,y) \neq (0,0)$ της ευθείας $y = x$ είναι $f(x,y) = f(x,x) = 2x^4 > 0$.

Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

(2) Όπως εύκολα βλέπουμε

$$\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

και $f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ οπότε στα σημεία $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα 8.2.6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = ax^4 + by^4$, όπου a, b μη μηδενικές σταθερές.

(α) Αν $a \cdot b > 0$ δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f.

(β) Αν $a \cdot b < 0$ δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

Λύση. Επειδή $f_x(x,y) = 4x^3$ και $f_y(x,y) = by^3$ έχουμε ότι $f_x(0,0) = 0$ και $f_y(0,0) = 0$ και άρα το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο. Επιπλέον $f_{xx}(x,y) = 12x^2$, $f_{yy}(x,y) = 12y^2$ και $f_{xy}(0,0) = 0$. Οπότε $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = 0$ και άρα $\Delta(0,0) = 0$. Συνεπώς το Κριτήριο Δεύτερης παραγώγου δεν μπορεί να αποφανθεί. Εξετάζοντας όμως τον τύπο της f βλέπουμε τα εξής:

(α) Αν $a > 0$ και $b > 0$ τότε $f(x,y) = ax^4 + by^4 \geq 0 = f(0,0)$ για όλα τα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου. Αντίστοιχα αν $a < 0$ και $b < 0$ τότε $f(x,y) = ax^4 + by^4 \leq 0$ για όλα τα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού μεγίστου.

(β) Αν $a < 0$ και $b > 0$ τότε για όλα τα σημεία $(x,0)$ στον x-άξονα έχουμε $f(x,0) = ax^4 \leq 0$ ενώ για όλα τα σημεία $(0,y)$ στον y-άξονα $f(0,y) = by^4 \geq 0$. Άρα στον x-άξονα το $(0,0)$ είναι σημείο ελαχίστου ενώ στον y-άξονα σημείο μεγίστου. Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο. Αντίστοιχα αν $a > 0$ και $b < 0$.

Παράδειγμα 8.2.7. Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x,y) = 4x^2 - x^4 - y^4$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 8x - 4x^3 \\ f_y(x,y) &= -4y^3 \\ f_{xx}(x,y) &= 8 - 12x^2 \\ f_{yy}(x,y) &= -12y^2 \\ f_{xy}(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία, δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 8x - 4x^3 = 0 \\ f_y(x,y) &= -4y^3 = 0. \end{aligned}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι οι λύσεις είναι τα σημεία $(0,0), (\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},0)$. Επειδή

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = -12(8-12x^2)y^2$$

και σε όλα τα κρίσιμα σημεία η y-συντεταγμένη είναι μηδενική έχουμε ότι

$$\Delta(0,0) = \Delta(\sqrt{2},0) = \Delta(-\sqrt{2},0) = 0$$

που σημαίνει ότι το κριτήριο δεν αποφαίνεται για κανένα από τα κρίσιμα σημεία.

Παρατηρούμε ότι $f(\pm\sqrt{2},0) = 4$ και

$$f(x,y) = 4x^2 - x^4 - y^4 = 4x^2 - x^4 - 4 + 4 - y^4 = 4 - (x^2-2)^2 - y^4 < 4$$

για κάθε $(x,y) \neq (\pm\sqrt{2},0)$. Άρα η f παρουσιάζει αυστηρό ολικό μέγιστο στα σημεία $(\pm\sqrt{2},0)$.

Επίσης $f(0,0) = 0$, $f(0,y) = -y^4 < 0$ για κάθε σημείο $(0,y) \neq (0,0)$ ενώ $f(x,0) = 4x^2 - x^4 > 0$ για κάθε $(x,0) \neq (0,0)$ με $|x| < 2$. Συνεπώς το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

8.3 Τοπικά Ακρότατα υπό συνθήκη, η μέθοδος των Πολλαπλασιαστών Lagrange

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάσαμε μία μέθοδο για τον εντοπισμό των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών που είναι ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$, οπότε γύρω απο κάθε σημείο του A οι μεταβλητές x, y ήταν *ελέυθερες*. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης όταν οι μεταβλητές της ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς. Οι περιορισμοί εκφράζονται με την μορφή εξισώσεων που συνδέουν τις μεταβλητές της συνάρτησης και περιορίζουν το πεδίο ορισμού της. Σε αυτές τις περιπτώσεις τα ακρότατα της συνάρτησης ονομάζονται *ακρότατα υπό συνθήκες* ή *δεσμευμένα ακρότατα*. Εδώ θα μελετήσουμε τα δεσμευμένα ακρότατα με μία μόνο συνθήκη που θα δίνεται μέσω μιας εξίσωσης της μορφής $g(x,y) = c$ (ή $g(x,y,z) = c$). Γεωμετρικά, κάτω από κάποιες απλές προυποθέσεις για την g η συνθήκη αυτή ορίζει μια καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ (αν είναι δύο μεταβλητών) ή μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ (αν είναι τριών μεταβλητών). Π.χ. η συνθήκη $x^2 + y^2 = 1$ ορίζει τον μοναδιαίο κύκλο του $\mathbb{R}^2$, ή συνθήκη $y - x = 0$ μια ευθεία του $\mathbb{R}^2$ και αντίστοιχα η συνθήκη $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ απεικονίζει την μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$ ενώ η συνθήκη $x + y + z = 1$ ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$.

Ορισμός 8.3.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και $f, g : A \to \mathbb{R}$. Ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in A$ καλείται* ***σημείο τοπικού ακροτάτου της f υπό την συνθήκη*** *$g(\mathbf{x}) = c$, αν το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της συνάρτησης $f|_S : S \to \mathbb{R}$, όπου $S = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) = c\}$.*

Η γενική μέθοδος αντιμετώπισης προβλημάτων ακροτάτων υπό συνθήκη είναι η λεγόμενη *μέθοδος των Πολλαπλασιαστών Lagrange*. Θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε την μέθοδο αυτή μελετώντας το εξής πρόβλημα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια C^1-συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και έστω S μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ (για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι S είναι η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$). Θέλουμε να βρούμε τα σημεία της S όπου η f όταν την περιορίζουμε πάνω στην S λαμβάνει την μεγαλύτερη ή την μικρότερη τιμή, με άλλα λόγια ψάχνουμε τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f|_S : S \to \mathbb{R}$$

Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο πάνω στην επιφάνεια S στο (x_0, y_0, z_0). Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο πάνω στην επιφάνεια S στο (x_0, y_0, z_0). Αυτό εξ ορισμού σημαίνει ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x, y, z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$ για όλα τα $(x, y, z) \in S \cap B_\delta(x_0, y_0, z_0)$.

Έστω C μια παραγωγίσιμη καμπύλη της S που διέρχεται από το $\mathbf{x}_0$. Η καμπύλη C μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}$ όπου I είναι ένα ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ με $0 \in I$ και $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$ Τότε η συνάρτηση $F : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(t) = f(\mathbf{r}(t))$, παρουσιάζει στο $t = 0$ τοπικό ακρότατο. Επομένως, από τον Κανόνα Αλυσίδας (δείτε Πόρισμα 6.3.4),

$$F'(0) = \nabla f(\mathbf{r}(0)) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0$$

Άρα $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \perp \mathbf{r}'(0)$ για οποιαδήποτε παραγωγίσιμη καμπύλη $\mathbf{r}(t)$ της S που διέρχεται από το $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$. Αυτό σημαίνει ότι το $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια S. Αν επιπλέον η S είναι ισοσταθμική επιφάνεια μιας C^1 συνάρτησης g δηλαδή $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = c\}$ τότε αν $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ το διάνυσμα $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ είναι κάθετο στην S στο σημείο (x_0, y_0, z_0). Επομένως, θα πρέπει

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \parallel \nabla g(x_0, y_0, z_0) \tag{8.3.1}$$

αφού και τα δύο είναι κάθετα στην S στο ίδιο σημείο. Η σχέση (8.3.1) σημαίνει ότι θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

Ο αριθμός αυτός λ καλείται *πολλαπλασιαστής Lagrange*. Η μέθοδος που αναπτύξαμε παραπάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάθε διάσταση n και συνοψίζεται στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 8.3.2. ***(Lagrange)*** *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f, g : A \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Έστω $\mathbf{x}_0 \in A$ σημείο τοπικού ακροτάτου της f υπό την συνθήκη*

$g(\mathbf{x}) = c$. Αν $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0) \tag{8.3.2}$$

Παρατηρήσεις 8.3.3. (α) Η προυπόθεση $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq 0$ του Θεωρήματος 8.3.2 είναι απαραίτητη για να ισχύει το θεώρημα (δείτε Παράδειγμα 8.3.8 παρακάτω).

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι και $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ τότε η σχέση 8.3.2 σημαίνει ότι οι ισοσταθμικές επιφάνειες $S = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) = c\}$ και $T = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$ των g και f αντίστοιχα που διέρχονται από το $\mathbf{x}_0$ δέχονται κοινό εφαπτόμενο επιπεδο στο $\mathbf{x}_0$, με άλλα λόγια οι επιφάνειες S και T εφάπτονται στο $\mathbf{x}_0$.

Πόρισμα 8.3.4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και $f, g : A \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Αν $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \in A$ με $g(\mathbf{x}) = c$ τότε τα πιθανά τοπικά ακρότατα της f υπό την συνθήκη $g(\mathbf{x}) = c$ ικανοποιούν το σύστημα*

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = c \end{cases} \tag{8.3.3}$$

Οι λύσεις του συστήματος 8.3.3 καλούνται και **κρίσιμα σημεία της f υπό την συνθήκη** $g(\mathbf{x}) = c$.

Παράδειγμα 8.3.5. Με βρείτε τα ακρότατα της συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$ πάνω στην ευθεία $y = x + 1$.

Λύση: Θέτουμε $g(x, y) = y - x - 1$. Επειδή $\nabla g(x, y) = (-1, 1) \neq (0, 0)$, έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x = -\lambda \\ 2y = \lambda \\ y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

Από το σύστημα αυτό προκύπτει μόνο ένα σημείο το $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Για να προσδιορίσουμε το είδος του ακροτάτου κάνουμε την εξής σκέψη: Καθώς οι ισοσταθμικές της f που είναι οι κύκλοι με κέντρο το $(0, 0)$ απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων η τιμή της f μεγαλώνει. Επομένως εκεί που εφάπτεται η ισοσταθμική με την ευθεία $y - x - 1 = 0$ θα έχουμε ελάχιστο για την f πάνω στην ευθεία γιατί κάθε άλλο σημείο της ευθείας είναι σημείο τομής της ευθείας με κύκλο μεγαλύτερης ακτίνας.

Παρατήρηση 8.3.6. Στην επόμενη παράγραφο θα δώσουμε έναν άλλο τρόπο λύσης του Παραδείγματος 8.3.5.

Παράδειγμα 8.3.7. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x + y + z$ υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Λύση: Θέτουμε $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ και συνεπώς η συνθήκη γίνεται $g(x, y, z) = 1$. Έχουμε $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = 2(x, y, z) \neq \mathbf{0}$ όταν $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και άρα κάθε σημείο όπου η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1, 1, 1) = \lambda(2x, 2y, 2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Από το παραπάνω σύστημα παίρνουμε ότι πιθανά τοπικά ακρότατα της f είναι τα σημεία

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{και} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Επειδή η επιφάνεια $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$ που είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, και η f είναι συνεχής από το θεώρημα των ακροτάτων τιμών (Θεώρημα 8.1.2) έχουμε ότι η $f|_S : S \to \mathbb{R}$ λαμβάνει σίγουρα μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Με σύγκριση των τιμών της f στα παραπάνω δύο σημεία βλέπουμε ότι στο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ λαμβάνεται η μέγιστη τιμή και αντίστοιχα στο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ λαμβάνεται η ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα 8.3.8. Δείξτε ότι το σημείο $(0, 1)$ είναι ολικό ελάχιστο της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ υπό την συνθήκη $g(x, y) = x^2 - (y - 1)^3 = 0$ (ισοδύναμα το σημείο $(0, 1)$ είναι το σημείο της καμπύλης $x^2 - (y - 1)^3 = 0$ που είναι το πλησιέστερο στο $(0, 0)$).

(2) Δείξτε ότι το $(0, 1)$ δεν μπορεί να εντοπισθεί με την μέθοδο των Πολλαπλασιαστών Lagrange. Ποιός είναι ο λόγος ;

Λύση. (1) Πράγματι, για κάθε σημείο (x, y) της καμπύλης $x^2 - (y - 1)^3 = 0$ ισχύει ότι

$$(y - 1)^3 = x^2 \geq 0 \Rightarrow (y - 1)^3 \geq 0 \Rightarrow y - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$$

οπότε $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq y^2 \geq 1 = f(0, 1)$.

(2) Θα δούμε τώρα ότι το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = c \end{array}\right. \tag{8.3.4}$$

δεν έχει λύση.

Έχουμε $g_x(x, y) = 2x$, $g_y(x, y) = -3(y - 1)^2$, $f_x(x, y) = 2x$ και $f_y(x, y) = 2y$. Άρα το σύστημα (8.3.4) γράφεται

$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda x \\ 2y &= -3\lambda(y - 1)^2 \\ x^2 - (y - 1)^3 &= 0 \end{aligned}$$

Απο την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$(\lambda - 1)x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \lambda = 1$$

Αν $x = 0$ τότε η τρίτη εξίσωση δίνει $y = 1$ που όμως δεν ικανοποιεί την δεύτερη εξίσωση. Αν τώρα $\lambda = 1$, η δεύτερη εξίσωση γράφεται

$$2y + 3(y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2y + 3y^2 - 6y + 3 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 3 = 0$$

που είναι αδύνατη. Άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Ο λόγος για τον οποίο το $(0, 1)$ δεν εντοπίζεται από το σύστημα (8.3.4) είναι ότι

$$\nabla g(0, 1) = (g_x(0, 1), g_y(0, 1)) = (0, 0)$$

και άρα δεν ισχύει η υπόθεση $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ του Θεωρήματος Lagrange.

Στις επόμενες υποπαραγράφους δίνουμε και δύο άλλες μεθόδους εύρεσης τοπικών ακροτάτων υπό συνθήκη.

8.3.1 Εύρεση δεσμευμένων ακροτάτων με επίλυση της συνθήκης

Αν η συνθήκη $g(\mathbf{x}) = c$ λύνεται ως προς την μια από τις μεταβλητές τότε το πρόβλημα της εύρεσης των τοπικών ακροτάτων μετατρέπεται σε πρόβλημα εύρεσης ελεύθερων ακροτάτων χωρίς περιορισμό των μεταβλητών. Π.χ. το Παράδειγμα 8.3.5 θα μπορούσε να λυθεί ως εξής.

Παράδειγμα 8.3.9. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + y^2$ πάνω στην ευθεία $y = x+1$.

Λύση. Η εξίσωση της σψνθήκης $y = x+1$ είναι ήδη λυμένη ως προς y. Αντικαθιστούμε στον τύπο της f το y με $x+1$ και έχουμε μια συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$F(x) = f(x, x+1) = x^2 + (x+1)^2 = x^2 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x + 1$$

Παρατηρείστε ότι ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι τοπικό (αντ. ολικό) ελάχιστο για την F αν και μόνο αν το (x_0, x_0+1) είναι τοπικό (αντ. ολικό) ελάχιστο για την f πάνω στην ευθεία $y = x+1$. Ομοίως ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι τοπικό (αντ. ολικό) μέγιστο για την F αν και μόνο αν το (x_0, x_0+1) είναι τοπικό (αντ. ολικό) μέγιστο για την f πάνω στην ευθεία $y = x+1$. Με αυτό τον τρόπο, το πρόβλημα της εύρεσης των τοπικών ακροτάτων υπό συνθήκη της συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x,y)$ ανάγεται σε πρόβλημα εύρεσης των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης μιας μεταβλητής $F(x)$ χωρίς κάποια συνθήκη.

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της F. Έχουμε

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Άρα η F έχει ένα μομναδικό κρίσιμο σημείο. Επειδή $F'(x) < 0$ για $x < -1/2$ και $F'(x) > 0$ για $x > 1/2$, η F είναι φθίνουσα για $x \leq -1/2$ και αύξουσα για $x \geq -1/2$ και συνεπώς στο $x = -1/2$ η F παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Ισοδύναμα, η f παρουσιάζει ένα μοναδικό τοπικό ακρότατο που είναι ειδικότερα ολικό ελάχιστο πάνω στην ευθεία $y = x+1$ στο σημείο $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Παράδειγμα 8.3.10. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y,z) = xyz$ υπό την συνθήκη $x + y + z = 1$.

Λύση. Λύνοντας την συνθήκη ως προς z έχουμε $z = 1-x-y$ οπότε αντικαθιστώντας στη f παίρνουμε την συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x,y) = f(x,y,1-x-y) = xy(1-x-y) = xy - x^2y - xy^2$$

Παρατηρούμε ότι ένα σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $f(x,y,z)$ υπο την συνθήκη $x + y + z = 1$ αν και μόνο αν (x_0, y_0) είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $F(x,y)$. Άρα το πρόβλημά μας απο πρόβλημα ακροτάτων τριών δεσμευμένων μεταβλητών μετατρέπεται σε πρόβλημα ελεύθερων τοπικών ακροτάτων δύο μεταβλητών. Μπορούμε να μελετήσουμε τα ακρότατα της F με τον τρόπο που αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο δηλαδή βρίσκοντας πρώτα τα κρίσιμα σημεία της και εφαρμόζοντας μετά το κριτήριο δεύτερης μερικής παραγώγου.

Ως γνωστόν τα κρίσιμα σημεία της F είναι οι λύσεις του συστήματος

$$F_x(x, y) = y - 2xy - y^2 = y(1 - 2x - y) = 0$$

$$F_y(x, y) = x - x^2 - 2xy = x(1 - x - 2y) = 0$$

Άν $y = 0$ τότε $x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$, οπότε τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ είναι κρίσιμα. Αν $x = 0$ τότε $y(1 - y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = 1$, οπότε και το $(0, 1)$ είναι κρίσιμο. Αν $x, y \neq 0$ τότε έχουμε το σύστημα

$$2x + y = 1$$

$$x + 2y = 1$$

που δίνει το κρίσημο σημείο $(1/3, 1/3)$.

Πάμε τώρα να εφαρμόσουμε το κριτήριο με τις δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους για να διακρίνουμε ποιά απο τα παραπάνω σημεία είναι τοπικά ακρότατα. Έχουμε

$$F_{xx}(x, y) = -2y,\ F_{xy}(x, y) = 1 - 2x - 2y,\ F_{yy}(x, y) = -2x$$

και

$$\Delta = F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\Delta(0, 0) = -1 < 0$, $\Delta(1, 0) = -1 < 0$, $\Delta(0, 1) = -1 < 0$ και άρα όλα αυτά τα σημεία είναι σαγματικά. Επίσης $\Delta(1/3, 1/3) = 1/3 > 0$ και $F_{xx}(1/3, 1/3) = -2/3 < 0$ το σημείο $(1/3, 1/3)$ είναι το μοναδικό τοπικό μέγιστο της F. Άρα το σημείο $(1/3, 1/3, 1/3)$ είναι το μοναδικό τοπικό ακρότατο της $f(x, y, z) = xyz$ υπό την συνθήκη $x + y + z = 1$.

Παρατήρηση 8.3.11. Αν περιορισθούμε στην περίπτωση όπου τα x, y, z είναι όλα μη αρνητικά τότε το $(1/3, 1/3, 1/3)$ είναι σημείο *ολικού μεγίστου* της $f(x, y, z) = xyz$. υπό την συνθήκη $x + y + z = 1$. Πράγματι το σύνολο $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z = 1\}$ είναι κλειστό και φραγμένο (αποτελεί ένα ισοσκελές ορθογώνιο τετράεδρο στον $\mathbb{R}^3$ με κορψφή το $(0, 0, 0)$). Επειδή η $f(x, y, z) = xyz$ είναι συνεχής συνάρτηση, από το Θεώρημα των Ακροτάτων Τιμών, θα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο M. Επειδή αυτά είναι και σημεία τοπικών ακροτάτων θα πρέπει το σημείο ολικού μεγίστου της f στο M να είναι αναγκαστικά το $(1/3, 1/3, 1/3)$. (Το σημείο ολικού ελαχίστου είναι όπως εύκολα βλέπουμε το $(0, 0, 0)$). Έχουμε δηλαδή ότι για όλα τα $x, y, z \geq 0$ με $x + y + z = 1$ ισχύει ότι $xyz \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$. Γενικότερα, αν $c > 0$ τότε για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς ακέραιους x, y, z με $x + y + z = c$ ισχύει ότι $xyz \leq \left(\frac{c}{3}\right)^3$. Αυτό γεωμετρικά σημαίνει ότι *από όλα τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με δεδομένο άθροισμα ακμών ο κύβος έχει τον μεγαλύτερο όγκο.*

8.3.2 Εύρεση δεσμευμένων ακροτάτων με παραμετρικοποίηση της συνθήκης

Μια άλλη μέθοδος για εύρεση τοπικών ακροτάτων υπό συνθήκη είναι η παραμετρικοποίηση της συνθήκης.

Παράδειγμα 8.3.12. Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = x + y$ υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 = 1$.

Λύση. Έστω $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$ μια παραμετρικοποίηση του μοναδιαίου κύκλου. Το πρόβλημα της εύρεσης των ακροτάτων της $f(x, y)$ πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ ανάγεται στην εύρεση των ακροτάτων μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής και συγκεκριμένα της της συνάρτησης

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t)) = -x(t) - y(t) = \cos t + \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Όπως γνωρίζουμε Τα πιθανά τοπικά ακρότατα της g περιέχονται είτε στα άκρα $0, 2\pi$ ή στα εσωτερικά σημεία του $[0, 2\pi]$ που μηδενίζουν την παράγωγο της g. Έχουμε

$$g'(t) = \sin t - \cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t = \cos t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \text{ ή } t = \frac{5\pi}{4}$$

Επειδή η g σίγουρα λαμβάνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή (ως συνεχής σε κλειστό φραγμένο διάστημα) και

$$g(0) = g(2\pi) = 1, \quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \quad \text{και } g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

συγκρίνοντας τις τιμές έπεται ότι η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $t = \dfrac{5\pi}{4}$ και μέγιστο στο $t = \dfrac{\pi}{4}$. Άρα πάνω στον μοναδιαίο κύκλο η f λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο σημείο $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ με $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$ και μέγιστη στο $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ με $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$.

8.3.3 Ακρότατα σε κλειστά και φραγμένα υποσύνολα με εσωτερικό

Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό και φραγμένο με μη κενό εσωτερικό (πχ. το D είναι ένας κλειστός δίσκος του $\mathbb{R}^2$). Αν $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε από το Θεώρημα 8.1.2 η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή πάνω στο D. Επειδή το D είναι κλειστό ισχύει ότι $D = D^\circ \cup \partial D$. Για να προσδιορίσουμε τα σημεία αυτά εργαζόμαστε ως εξής:

(i) Βρίσκουμε πρώτα τα **κρίσιμα σημεία της f στο εσωτερικό του** D δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \tag{8.3.5}$$

Από το Θεώρημα Fermat κάθε τοπικό ακρότατο του περιορισμού της f στο εσωτερικό του D είναι του παραπάνω συστήματος.

(ii) Βρίσκουμε τα **κρίσιμα σημεία της f στο σύνορο του** D. Αν $g(\mathbf{x}) = c$ είναι η εξίσωση του συνόρου του D και $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \in \partial D$ τότε για να προσδιορίσουμε τα σημεία αυτά επιλύουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = c \end{cases} \tag{8.3.6}$$

Από το Θεώρημα Lagrange κάθε τοπικό ακρότατο του περιορισμού της f πάνω στο σύνορο του D είναι λύση αυτού του παραπάνω συστήματος.

(iii) Συγκρίνουμε τις τιμές της f στα σημεία που βρήκαμε στα προηγούμενα δύο βήματα. Η μεγαλύτερη τιμή αντιστοιχεί στα σημεία όπου έχουμε ολικό μέγιστο της f στο D και η μικρότερη στα σημεία όπου έχουμε ολικό ελάχιστο της f στο D.

Παράδειγμα 8.3.13. Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y - 1$$

πάνω στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Λύση. Βρίσκουμε πρώτα τα κρίσιμα στο εσωτερικό του D. Έχουμε $\nabla f(x, y) = (2x - 1, 2y - 1)$ και άρα

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Περνάμε τωρα στην εύρεση των ακροτάτων στο σύνορο του D που σημαίνει στα τοπικά ακρότατα της f υπό την συνθήκη $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Επειδή $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ για όλα τα $(x, y) \in \vartheta D$ τα πιθανά τοπικά ακρότατα της f υπό την συνθήκη $g(x, y) = 1$ είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = 1 \end{cases} \tag{8.3.7}$$

Επειδή $x^2 + y^2 = 1$ ο τύπος της f απλοποιείται και παίρνει την μορφή $f(x, y) = 1 - x - y$. Άρα το σύστημα στην (8.3.7) γράφεται

$$\begin{cases} (-1, -1) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Βλέπουμε εύκολα ότι οι λύσεις του συστήματος είναι τα σημεία

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{και} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Έχουμε

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

και

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \sqrt{2}, \; f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

Συγκρίνοντας τις τιμές, βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ολικό μέγιστο στο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Πεπλεγμένες συναρτήσεις

9.1 Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης για δύο μεταβλητές

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε το πρόβλημα της επίλυσης μιας εξίσωσης δύο μεταβλητών

$$F(x,y)=0 \tag{9.1.1}$$

ως προς τη μία από τις μεταβλητές συναρτήσει της άλλης. Θέλουμε δηλαδή να δώσουμε κάποιες συνθήκες ώστε δεδομένης της εξίσωσης (9.1.1) να υπάρχει μια λύση της μορφής

$$y=f(x) \quad \text{ή} \quad x=g(y). \tag{9.1.2}$$

Το ερώτημα αυτό έχει και την εξής γεωμετρική διατύπωση: Πότε το σύνολο των σημείων $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την εξίσωση $F(x,y)=0$, αποτελεί το ίχνος μιας «φυσιολογικής» καμπύλης του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή είναι το γράφημα μιας συνάρτησης από ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$; Ας δούμε δύο παραδείγματα.

Αν η $F(x,y)=0$ είναι η εξίσωση

$$ax+by+c=0 \tag{9.1.3}$$

και $b\neq 0$ τότε η (9.1.3) λύνεται ως προς τη μεταβλητή y:

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \tag{9.1.4}$$

και συνεπώς όλα τα σημεία $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την (9.1.3) αποτελούν το γράφημα της συνάρτησης (9.1.4), δηλαδή μια ευθεία του $\mathbb{R}^2$.

Από την άλλη πλευρά, αν $F(x,y)=0$ είναι η εξίσωση

$$x^2+y^2-1=0 \tag{9.1.5}$$

βλέπουμε ότι για κάθε $x\in(-1,1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά y_1,y_2 με $F(x,y_1)=F(x,y_2)=0$ και αντίστοιχα για κάθε $y\in(-1,1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά x_1,x_2 με $F(x_1,y)=F(x_2,y)=0$. Συνεπώς, η εξίσωση $x^2+y^2-1=0$ δεν μπορεί να επιλυθεί πλήρως ως προς καμία από τις μεταβλητές x, y. Όμως, αν περιορίσουμε τα (x,y) με $F(x,y)=0$ που θεωρούμε, τότε μπορούμε να επιλύσουμε την $F(x,y)=0$

ως προς μία μεταβλητή συναρτήσει της άλλης. Για παράδειγμα, αν περιοριστούμε στο άνω ημικύκλιο (δηλαδή για $y \geq 0$), έχουμε

$$F(x,y) = 0 \text{ και } y \geq 0 \Longleftrightarrow y = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1].$$

Ομοίως,

$$F(x,y) = 0 \text{ και } x \leq 0 \Longleftrightarrow x = -\sqrt{1-y^2}, y \in [-1,1].$$

Θεώρημα 9.1.1. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $F : U \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και $(x_0,y_0) \in U$ τέτοιο ώστε $F(x_0,y_0) = 0$. Αν $F_y(x_0,y_0) \neq 0$ τότε υπάρχουν ανοικτές περιοχές $X = (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ και $Y = (y_0-\delta_2, y_0+\delta_2)$ του x_0 και του y_0 αντίστοιχα και μια συνάρτηση $f : X \to Y$ παραγωγίσιμη με παράγωγο συνεχή και τέτοια ώστε*

$$\{(x,y) \in (X \times Y) \cap U : F(x,y) = 0\} = \{(x, f(x)) : x \in X\} \tag{9.1.6}$$

Η συνάρτηση f που ικανοποιεί την (9.1.6) λέμε ότι ορίζεται ***πεπλεγμένα μέσω της*** $F(x,y) = 0$ ***στο*** (x_0,y_0). Επίσης λέμε ότι η $F(x,y) = 0$ ***λύνεται ως προς*** $y = y(x)$ ***σε μια περιοχή του*** (x_0,y_0). Η (9.1.6) σημαίνει ότι οι λύσεις της $F(x,y) = 0$ γύρω από το (x_0,y_0) σχηματίζουν μια καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ και συγκεκριμμένα την γραφική παράσταση της $f : X \to Y$.

Αποδεικνύεται επίσης ότι η παράγωγος της f δίνεται από τον εξής τύπο

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\Big|_{y=f(x)} \tag{9.1.7}$$

Ειδικότερα, για $x = x_0$ ισχύει ότι

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}. \tag{9.1.8}$$

Παρατηρήσεις 9.1.2. (1) Το παράδειγμα της ευθείας $F(x,y) = ax+by+c = 0$ είναι ένα απλό παράδειγμα που επιβεβαιώνει τη συνθήκη $F_y(x,y) \neq 0$. Πράγματι, η F λύνεται ως προς y συναρτήσει του x αν $b = F_y(x,y) \neq 0$.

(2) Παρατηρήστε ότι η επίλυση της $F(x,y) = 0$ ως προς $y = f(x)$ είναι *τοπική* στο (x_0,y_0), δηλαδή υπάρχει μια περιοχή X του x_0 και μια περιοχή Y του y_0, όπου η $F(x,y) = 0$ λύνεται ως προς y συναρτήσει του x. Γενικά όμως μπορεί για κάποια ή και για όλα τα $x \in X$ να υπάρχουν και άλλα y που δεν ανήκουν στο Y αλλά ικανοποιούν την $F(x,y) = 0$. Στο παράδειγμα όπου $F(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$, αν $(x_0,y_0) = (0,1)$, $X = (-1,1)$ και $Y = (0,2)$ έχουμε $F(x, +\sqrt{1-x^2}) = 0$ για κάθε $x \in X$ (εδώ $f(x) = +\sqrt{1-x^2}$), ενώ για $Y = (-2,0)$, $F(x, -\sqrt{1-x^2}) = 0$, πάλι για κάθε $x \in X$ (και άρα $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$).

(3) Γενικά η συνάρτηση $f : X \to Y$ που επιλύει την $F(x,y) = 0$ ως προς y στο (x_0,y_0) όταν $F_y(x_0,y_0) \neq 0$ συνήθως δεν δίνεται από κάποιον *κλειστό τύπο*, ούτε και τα διαστήματα X και Y μπορούν να προσδιορισθούν εύκολα. Αυτό που γνωρίζουμε για την f είναι ότι ανήκει στην κλάση C^1. Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι αν $F \in C^k(A)$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ (ή αντίστοιχα C^∞) τότε και η f είναι $C^k(X)$ (αντίστοιχα C^∞).

Παράδειγμα 9.1.3. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2e^y + y - 1 = 0$ ορίζει πεπλεγμένα στο $(0,1)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f'(0) = 0$.

Λύση. Η συνάρτηση $F(x,y) = x^2e^y + y - 1$ είναι C^1 με

$$F_x(x,y) = 2xe^y, \quad F_y(x,y) = x^2e^y + 1$$

Επειδή $F(0,1) = 0$ και $F_y(x,y) \neq 0$ από το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης έχουμε ότι η εξίσωση $x^2e^y + y - 1 = 0$ ορίζει πεπλεγμένα στο $(0,1)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f με

$$f'(0) = -\frac{F_x(0,1)}{F_y(0,1)} = -\frac{0}{1} = 0.$$

Παράδειγμα 9.1.4. Αποδείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ ορισμένη σε ανοικτό διάστημα I του $\mathbb{R}$ με κέντρο το $x_0 = 1$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = 2x^{f(x)}$, για όλα τα $x \in I$.

Λύση. Θέτοντας $y = f(x)$ έχουμε $y = 2x^y \iff 2x^y - y = 0$. Θέτουμε $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $F : A \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x,y) = 2x^y - y.$$

Έχουμε

$$F_x(x,y) = 2yx^{y-1} \text{ και } \quad F_y(x,y) = 2\ln x \cdot x^y - 1$$

και άρα η F είναι C^1. Επίσης,

$$F(1,2) = 0 \text{ και } \quad F_y(1,2) = -1 \neq 0.$$

Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης η F λύνεται στο $(1,2)$ ως προς y, δηλαδή υπάρχουν ανοικτά διαστήματα X και Y με κέντρα τα $x_0 = 1$ και $y_0 = 2$ αντίστοιχα, και μια C^1 συνάρτηση $f : X \to Y$ τέτοια ώστε $F(x,y) = 0 \iff y = f(x)$, για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$. Συνεπώς, $f(1) = 2$ και $F(x, f(x)) = 0 \iff 2x^{f(x)} - f(x) = 0 \iff f(x) = 2x^{f(x)}$, για κάθε $x \in X$.

Με εναλλαγή των x και y στο Θεώρημα 9.1.1 παίρνουμε το εξής.

Θεώρημα 9.1.5. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $F : U \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και $(x_0, y_0) \in U$ τέτοιο ώστε $F(x_0, y_0) = 0$. Αν $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ τότε υπάρχουν ανοικτές περιοχές $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ και $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ του x_0 και του y_0 αντίστοιχα και μια συνάρτηση $g : Y \to X$ παραγωγίσιμη με παράγωγο συνεχή και τέτοια ώστε*

$$\{(x,y) \in (X \times Y) \cap U : F(x,y) = 0\} = \{(g(y), y) : y \in Y\} \tag{9.1.9}$$

Η συνάρτηση $x = g(y)$ που ορίζεται πεπλεγμένα μέσω της $F(x,y) = 0$ γύρω από το (x_0, y_0), είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύει ότι

$$g'(y) = -\frac{F_y(x,y)}{F_x(x,y)}\bigg|_{x=f(y)} \tag{9.1.10}$$

Ειδικότερα,

$$g'(y_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)} \tag{9.1.11}$$

Από τα Θεωρήματα 9.1.1 και 9.1.5 έχουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 9.1.6. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $F : U \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Έστω*

$$C = \{(x, y) \in U : F(x, y) = 0\}$$

Τότε για οποιοδήποτε σημείο $(x_0, y_0) \in C$ με

$$\nabla F(x_0, y_0) \neq \mathbf{0} \tag{9.1.12}$$

υπάρχει ένα ανοικτό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο R με κέντρο το (x_0, y_0) τέτοιο ώστε η τομή $R \cap C$ είναι το γράφημα μιας C^1 πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής.

9.2 Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης για τρείς μεταβλητές

Το Θεώρημα 9.1.1 γενικεύεται και για εξισώσεις με τρείς μεταβλητές.

Θεώρημα 9.2.1. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό, $F : U \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και $(x_0, y_0, z_0) \in U$ τέτοιο ώστε $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Αν $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ τότε υπάρχουν ανοικτά διαστήματα X, Y και Z με κέντρα τα x_0, y_0 και z_0 αντίστοιχα και μια συνάρτηση $f : X \times Y \to Z$ τέτοια ώστε*

$$\{(x, y, z) \in U \cap X \times Y \times Z : F(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in X \times Y\} \tag{9.2.1}$$

Η συνάρτηση f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και ισχύει ότι

$$f_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}\bigg|_{z=f(x,y)} \quad \text{και} \quad f_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}\bigg|_{z=f(x,y)} \tag{9.2.2}$$

Ειδικότερα,

$$f_x(x_0, y_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{και} \quad f_y(x_0, y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)} \tag{9.2.3}$$

Η συνάρτηση f που ικανοποιεί την (9.2.1) λέμε ότι ορίζεται ***πεπλεγμένα μέσω της*** $F(x, y, z) = 0$ ***στο*** (x_0, y_0). Επίσης λέμε ότι η $F(x, y, z) = 0$ ***λύνεται ως προς*** $z = z(x, y)$ ***σε μια περιοχή του*** (x_0, y_0, z_0). Η (9.1.6) σημαίνει ότι οι λύσεις της $F(x, y, z) = 0$ γύρω από το (x_0, y_0, z_0) σχηματίζουν μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ και συγκεκριμμένα την γραφική παράσταση της $f : X \times Y \to z$.

Αντίστοιχα διατυπώνεται το Θεώρημα 9.2.1 όταν $F_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ή $F_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Το ανάλογο γεώμετρικό πόρισμα είναι το εξής.

Πόρισμα 9.2.2. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό και $F : U \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Έστω*

$$S = \{(x, y, z) \in A : F(x, y, z) = 0\}.$$

Τότε για οποιοδήποτε σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in S$ με

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$$

υπάρχει ένα ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R με κέντρο το (x_0, y_0, z_0) τέτοιο ώστε η τομή $R \cap S$ είναι το γράφημα μιας C^1 πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών.

Παράδειγμα 9.2.3. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4 = 0$$

λύνεται ως προς $z = z(x,y)$ σε μια περιοχή του σημείου $(1,1,2)$.

Λύση. Πράγματι,

$$F_x(x,y,z) = 3x^2 - 3yz, \quad F_y(x,y,z) = 3y^2 - 3xy, \quad F_z(x,y,z) = 3z^2 - 3xy.$$

Άρα, η F είναι C^1. Επιπλέον, $F(1,1,2) = 0$ και $F_z(1,1,2) = 12 - 3 = 9 \neq 0$. Άρα, από το Θεώρημα 9.2.1 μπορούμε να βρούμε ανοικτή περιοχή $U \subseteq \mathbb{R}^2$ του $(1,1)$ και ανοικτή περιοχή $Z \subseteq \mathbb{R}$ του $z = 2$ ώστε για κάθε $(x,y) \in U$ να υπάρχει μοναδικό $z = z(x,y) \in Z$ με $F(x,y,z(x,y)) = 0$. Επίσης,

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}_{z=z(x,y)}, \quad z_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}|_{z=z(x,y)}$$

και άρα (αφού $z(1,1) = 2$),

$$z_x(1,1) = -\frac{-3}{9} = 1/3, \quad z_y(1,1) = -\frac{-3}{9} = 1/3.$$

Παράδειγμα 9.2.4. Δίνεται η συνάρτηση $F(x,y,z) = z^3 + z - x^2 - y^2 - 2$.

(α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $F(x,y,z) = 0$ ορίζει πεπλεγμένα μια συνάρτηση $z = z(x,y)$ σε μια περιοχή του $(0,0,1)$.

(β) Αποδείξτε ότι η $z(x,y)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $(0,0)$.

(γ) Γράψτε το πολυώνυμο Taylor $T_2(x,y)$ δεύτερης τάξης της $z = z(x,y)$ με κέντρο το $(0,0)$ και υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{z(x,y) - z(0,0)}{x^2 + y^2}$.

Απάντηση: (α) Η F είναι C^2 συνάρτηση ως πολυωνυμική. Επίσης έχουμε $F(0,0,1) = 0$ και $F_z(x,y,z) = 3z^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (οπότε και $F_z(0,0,1) \neq 0$). Άρα, η εξίσωση $F(x,y,z) = 0$ λύνεται ως προς $z = z(x,y)$, όπου η $z = z(x,y) : U \to \mathbb{R}$ είναι C^2 συνάρτηση και $U \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι μια ανοικτή περιοχή του $(0,0)$.

(β) Έχουμε $F_x(x,y,z) = -2x$, $F_y(x,y,z) = -2y$ και όπως ειδαμε $F_z(x,y,z) = 3z^2 + 1$. Υπολογίζουμε:

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}_{z=z(x,y)} = \frac{2x}{3z^2(x,y)+1}, \quad z_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}_{z=z(x,y)} = \frac{2y}{3z^2(x,y)+1}$$

και άρα

$$\begin{aligned}
z_{xx}(x,y) &= \frac{2(3z^2(x,y)+1) - 2x \cdot 6z(x,y)z_x(x,y)}{(3z^2+1)^2} \\
z_{yy}(x,y) &= \frac{2(3z^2(x,y)+1) - 2y \cdot 6z(x,y)z_y(x,y)}{(3z^2(x,y)+1)^2} \\
z_{xy}(x,y) &= \frac{-2x \cdot 6z(x,y)z_y(x,y)}{(3z^2(x,y)+1)^2}.
\end{aligned}$$

Άρα, επειδή $z(0,0) = 1$, $z_x(0,0) = z_y(0,0) = 0$. Συνεπώς το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την $z = z(x,y)$. Επιπλέον, $z_{xx}(0,0) = z_{yy}(0,0) = 8/16 = 1/2$ και $z_{xy}(0,0) = 0$. Άρα, $z_{xx}(0,0) > 0$ και $\Delta = z_{xx}(0,0) \cdot z_{yy}(0,0) -$

$z_{xy}(0,0)^2 = 1/4 > 0$ και άρα, από το κριτήριο δεύτερης μερικής παραγώγου, η $z(x,y)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $(0,0)$.

(β) Έχουμε

$$T_2(x,y) = z(0,0) + z_x(0,0)x + z_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(z_{xx}(0,0)x^2 + 2z_{xy}(0,0)xy + z_{yy}(0,0)y^2\right)$$

και άρα αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$T_2(x,y) = 1 + \frac{1}{4}(x^2 + y^2).$$

Από το θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - T_2(x,y)}{x^2 + y^2} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - 1 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{z(x,y) - 1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{4}\right] = 0.$$

Συνεπώς, αφού $z(0,0) = 1$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - z(0,0)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}.$$