Β

ΘΕΜΑ 1. (α). Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε, από τον ορισμό της σύγκλισης των σειρών, ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+1}}{(x^2+2)^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(x^2+2)^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(x^2+2)^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x^2+2}\right)^n$$

Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x^2+2}\right)^n$ συγκλίνει σε πραγματικό αν, και μόνο αν, $2 < x^2 + 2$, δηλαδή αν, και μόνο αν, $x \neq 0$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x^2+2}\right)^n = 2\frac{\frac{2}{x^2+2}}{1-\frac{2}{x^2+2}} = \frac{4}{x^2}$$

Όταν $x = 0$ αυτή η γεωμετρική σειρά απειρίζεται γιατί οι όροι της είναι θετικοί.

Αν $x = 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{6n}+1} = 1$ και άρα $x = 0$ δεν είναι λύση της εξίσωσης. Όταν $|x| < 1$, τότε από τα βασικά όρια γνωρίζουμε ότι $\lim_{n\to\infty} x^{6n} = 0$. Έπεται από αυτό ότι $\lim_{n\to\infty} (x^{6n}+1) = 1 > 0$. Πάλι από τα βασικά όρια συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{6n}+1} = 1$.

Όταν $|x| = 1$, τότε $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{6n}+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, από τα βασικά όρια.

Όταν $|x| > 1$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{6n}+1} = x^6 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{x^{6n}}} = x^6 \cdot 1 = x^6$$

διότι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{6n}} = 0$, από τα βασικά όρια αφού $1/x^6 < 1$, και επιπλέον $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{x^{6n}}) = 1 > 0$, γεγονός που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε από τα βασικά όρια ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{x^{6n}}} = 1$.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω πληροφορίες, καταλήγουμε στα ακόλουθα:

Αν $0 < |x| \leq 1$, η εξίσωση ισοδυναμεί με την $1 = \frac{4}{x^2}$ που δεν έχει λύση για $|x| \leq 1$.

Αν $|x| \geq 1$, η εξίσωση ισοδυναμεί με την $x^6 = \frac{4}{x^2}$ η οποία έχει δύο λύσεις τις $\pm\sqrt[4]{2}$.

(β). (i). Θέτουμε $a_n = (-1)^{n+1} \dfrac{n^4+2n+1}{2n^6+n-\cos(n)}$ και $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6+2n^3+n^2}{2n^6+n-\cos(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+(2/n^3)+(1/n^4)}{2+(1/n^5)-(\cos(n)/n^6)} = 1/2$$

αφού $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$ για κάθε $p > 0$ και επιπλέον, από το θεώρημα sandwitch, $\lim_{n\to\infty} \cos(n)/n^6 = 0$ γιατί $|\cos(n)/n^6| \leq 1/n^6$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Στη συνέχεια βλέπουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει σε πραγματικό ως p-σειρά με $p = 2 > 1$. Εφαρμόζοντας το ΚΟΣ συμπεραίνουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει σε πραγματικό, δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα και άρα συγκλίνει σε πραγματικό, από γνωστό θεώρημα.

(ii). Θέτουμε $a_n = \dfrac{(-1)^{2n-1}}{\sqrt{2n-1}}$ και $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2n-1}} = 1/\sqrt{2}$$

Όμως, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$ ως p-σειρά με $p = \dfrac{1}{2} < 1$. Συμπεραίνουμε από το ΚΟΣ ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$ και άρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$ διότι $a_n < 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii). Θέτουμε $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} e^{\cos(n^2+1)}$ και $b_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε τώρα ότι

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \to \frac{1}{4} < 1$$

Συμπεραίνουμε τώρα από το κριτήριο λόγου ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει σε πραγματικό. Τέλος έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ανισότητα

$$0 < a_n \leq e b_n \text{ γιατί } \cos(n^2+1) \leq 1 \text{ και η } e^x \text{ είναι αύξουσα συνάρτηση}$$

και άρα από το ΚΑΣ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό.

(iv). Θέτουμε $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε λοιπόν την τηλεσκοπική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

διότι $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2^{n+1}} = 0$ από το κριτήριο λόγου για ακολουθίες: Θέτοντας $b_n = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2(n+1)} = 1/2 < 1 \text{ και άρα } b_n \to 0$$

Συνεπώς, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}.$

ΘΕΜΑ 2. (α). Έχουμε ότι

$$\frac{1}{(x^3+8)} = \frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{-x^3}{8}} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{8^n}, \text{ αν και μόνο αν, } |x| < 2$$

γιατί $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, αν και μόνο αν, $|x| < 1$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειράς λαμβάνουμε ότι

$$\frac{-3x^2}{(x^3+8)^2} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3n\,\frac{x^{3n-1}}{8^n}, \text{ αν και μόνο αν, } |x| < 2$$

Παρατηρούμε ότι η άθροιση στη δυναμοσειρά των παραγώγων αρχίζει από το δείκτη $n = 1$ γιατί η αρχική δυναμοσειρά έχει σταθερό όρο που αντιστοιχεί στο δείκτη $n = 0$, ο οποίος μηδενίζεται στην παραγώγιση. Απλοποιώντας την παραπάνω ισότητα όταν $x \neq 0$, βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{(x^3+8)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n\,\frac{x^{3n-3}}{8^{n+1}}, \text{ όταν } 0 < |x| < 2$$

Βλέπουμε τώρα ότι ο σταθερός όρος αυτής της δυναμοσειράς (αντιστοιχεί στο δείκτη $n = 1$) ισούται με $\dfrac{1}{64}$. Είναι δηλαδή ίσος με την τιμή της συνάρτησης $\dfrac{1}{(x^3-8)^2}$ για $x = 0$. Άρα, η παραπάνω ισότητα επεκτείνεται και για $x = 0$ κι έτσι έχουμε ότι

$$f(x) = \frac{1}{(x^3+8)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n\,\frac{x^{3n-3}}{8^{n+1}}, \text{ αν και μόνο αν, } |x| < 2$$

Αυτό είναι το ανάπτυγμα Maclaurin της f, ενώ το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-2, 2)$.

Για τον υπολογισμό της παραγώγου $f^{(135)}(0)$, γνωρίζουμε ότι

$$\frac{f^{(135)}(0)}{(135)!} = \text{ συντελεστής του } x^{135} \text{ στο ανάπτυγμα Maclaurin της } f$$

Έχουμε τώρα ότι $3n - 3 = 135$ όταν $n = 46$ και άρα το παραπάνω ανάπτυγμα μας δίνει για $n = 46$ ότι

$$\frac{f^{(135)}(0)}{(135)!} = (-1)^{45}\frac{46}{8^{47}}$$

καταλήγοντας στην τιμή $f^{(135)}(0) = -\dfrac{46}{8^{47}}[(135)!]$.

(β). Γνωρίζουμε ότι

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n},\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

και άρα έχουμε την ισότητα

$$\cos(x) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n},\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

από την οποία, για $x = 2$ λαμβάνουμε ότι

$$\cos(2) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, 2^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!}$$

ΘΕΜΑ 3. (i). Θέτοντας $x = \sin(t)$ με $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, έχουμε ότι $\sqrt{1-x^2} = \cos(t)$, $dx = \cos(t)dt$. Έπεται τώρα ότι

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1+2\cos(t)}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(t)+1-1}{1+2\cos(t)}\, dt =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{1+2\cos(t)}\right) dt$$

και άρα

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+2\cos(t)}$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $u = \tan(t/2)$ με $u \in [0, 1]$. Γνωρίζουμε ότι

$$dt = \frac{2du}{u^2+1} \text{ και } \cos(t) = \frac{1-u^2}{u^2+1}$$

και άρα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+2\cos(t)} = \int_0^1 \frac{\frac{2du}{u^2+1}}{1+2\frac{1-u^2}{u^2+1}} = 2\int_0^1 \frac{du}{3-u^2}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}+u} + \frac{1}{\sqrt{3}-u}\right)du = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\ln(\sqrt{3}+u) - \ln(\sqrt{3}-u)\Big]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$$

Καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$$

(ii). Αρχικά αναλύουμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση σε απλά κλάσματα. Υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί A, B, C τέτοιοι ώστε

$$(*)\quad \frac{1}{(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+4},\ \forall\, x \neq -2$$

Έχουμε τώρα ότι $A = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{x^2+4} = \dfrac{1}{8}$. Επίσης έχουμε ότι

$$\frac{x}{(x+2)(x^2+4)} = \frac{Ax}{x+2} + \frac{Bx^2+Cx}{x^2+4},\ \forall\, x \neq -2$$

και άρα

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x+2)(x^2+4)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{Ax}{x+2} + \lim_{x\to+\infty} \frac{Bx^2+Cx}{x^2+4}$$

Συνάγεται τώρα από την παραπάνω ισότητα ότι

$$0 = A + B \text{ και άρα } B = \frac{-1}{8}$$

Η σχέση $(*)$ για $x = 0$ δίνει ότι

$$\frac{A}{2} + \frac{C}{4} = \frac{1}{8} \text{ και άρα } C = \frac{1}{4}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος τώρα έχουμε ότι

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{8}\int \frac{x-2}{x^2+4}\,dx =$$
$$\frac{1}{8}\ln|x+2| - \frac{1}{16}\int \frac{(x^2+4)'}{x^2+4}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+4} =$$
$$\frac{1}{8}\ln|x+2| - \frac{1}{16}\ln(x^2+4) + \frac{1}{8}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

όπου, είτε $x \in (-\infty, -2)$, είτε $x \in (-2, +\infty)$, ενώ $c \in \mathbb{R}$ είναι αυθαίρετη σταθερά.

ΘΕΜΑ 4. (α). Το μήκος L αυτής της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_2^4 \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx$$

Έχουμε ότι

$$y'(x) = x^3 - \frac{1}{4x^3} \ \text{ και } \ [y'(x)]^2 = \left(x^3 - \frac{1}{4x^3}\right)^2 = x^6 + \frac{1}{16x^6} - \frac{1}{2}$$

και άρα

$$1 + [y'(x)]^2 = x^6 + \frac{1}{16x^6} + \frac{1}{2} = \left(x^3 + \frac{1}{4x^3}\right)^2$$

Συνεπώς

$$L = \int_2^4 \sqrt{\left(x^3 + \frac{1}{4x^3}\right)^2}\, dx = \int_2^4 \left(x^3 + \frac{1}{4x^3}\right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{8x^2}\Big]_2^4 = 60 + \frac{3}{128}$$

(β). Γενικευμένο ολοκλήρωμα 2ου είδους. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\, dx$$

Θα δείξουμε ότι καθένα από τα παραπάνω γενικευμένα ολοκληρώματα 1ου είδους συγκλίνει (σε πραγματικό αριθμό). Για το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\, dx$ παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}},\ \forall\, x \in (0, 1]$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\gamma \to 0} \int_\gamma^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\gamma \to 0}(2 - 2\sqrt{\gamma}) = 2$$

και άρα το κριτήριο άμεσης σύγκρισης δίνει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \left|\frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\right| dx$ συγκλίνει (σε πραγματικό). Από γνωστό θεώρημα λαμβάνουμε ότι και το $\int_0^1 \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\, dx$ συγκλίνει (σε πραγματικό).

Για το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\,dx$ έχουμε καταρχήν ότι για κάθε $\gamma > 1$

$$(**)\ \int_1^{\gamma} \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{\gamma} \left(\frac{1}{3}\sin(3x)\right)' \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{\sin(3x)}{3\sqrt{x}}\Bigg]_1^{\gamma} - \frac{1}{3}\int_1^{\gamma} \sin(3x)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' dx$$
$$= \frac{\sin(3\gamma)}{3\sqrt{\gamma}} - \frac{\sin(3)}{3} + \frac{1}{6}\int_1^{\gamma} \frac{\sin(3x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Έχουμε ακόμα ότι $\left|\dfrac{\sin(3\gamma)}{\sqrt{\gamma}}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}$, για κάθε $\gamma > 0$ και άρα το θεώρημα sandwitch μας δίνει ότι $\displaystyle\lim_{\gamma\to+\infty} \frac{\sin(3\gamma)}{\sqrt{\gamma}} = 0$, γιατί $\displaystyle\lim_{\gamma\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = 0$. Παίρνοντας τώρα όρια για $\gamma \to +\infty$, και στα δύο μέλη της ισότητας $(**)$, λαμβάνουμε ότι

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\,dx = -\frac{\sin(3)}{3} + \frac{1}{6}\int_1^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ συγκλίνει (σε πραγματικό). Πράγματι,

$$\left|\frac{\sin(3x)}{x^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},\ \forall\, x \geq 1$$

ενώ

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\gamma\to+\infty} \int_1^{\gamma} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\gamma\to+\infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right) = 2$$

Συνάγεται τώρα, από το κριτήριο άμεσης σύγκρισης, ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(3x)}{x^{\frac{3}{2}}}\right| dx$ συγκλίνει (σε πραγματικό). Από γνωστό θεώρημα λαμβάνουμε ότι και το $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ συγκλίνει (σε πραγματικό), και άρα το $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνει (σε πραγματικό).

Συμπερασματικά, τα γενικευμένα ολοκληρώματα 1ου είδους $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\,dx$ και $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνουν. Άρα και το $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνει.