A

ΘΕΜΑ 1. (α). Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε, από τον ορισμό της σύγκλισης των σειρών, ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+1}}{(x^4+2)^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(x^4+2)^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n}}{(x^4+2)^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x^4+2}\right)^n$$

Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x^4+2}\right)^n$ συγκλίνει σε πραγματικό αν, και μόνο αν, $2 < x^4+2$, δηλαδή αν, και μόνο αν, $x \neq 0$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x^4+2}\right)^n = 2\frac{\frac{2}{x^4+2}}{1-\frac{2}{x^4+2}} = \frac{4}{x^4}$$

Όταν $x = 0$ αυτή η γεωμετρική σειρά απειρίζεται γιατί οι όροι της είναι θετικοί.

Αν $x = 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{2n}+1} = 1$ και άρα $x = 0$ δεν είναι λύση της εξίσωσης. Όταν $|x| < 1$, τότε από τα βασικά όρια γνωρίζουμε ότι $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$. Έπεται από αυτό ότι $\lim_{n\to\infty}(x^{2n}+1) = 1 > 0$. Πάλι από τα βασικά όρια συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{2n}+1} = 1$.

Όταν $|x| = 1$, τότε $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, από τα βασικά όρια.

Όταν $|x| > 1$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{2n}+1} = x^2 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{x^{2n}}} = x^2 \cdot 1 = x^2$$

διότι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$, από τα βασικά όρια αφού $1/x^2 < 1$, και επιπλέον $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{x^{2n}}) = 1 > 0$, γεγονός που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε από τα βασικά όρια ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{x^{2n}}} = 1$.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω πληροφορίες, καταλήγουμε στα ακόλουθα:

Αν $0 < |x| \leq 1$, η εξίσωση ισοδυναμεί με την $1 = \frac{4}{x^4}$ που δεν έχει λύση για $|x| \leq 1$.

Αν $|x| \geq 1$, η εξίσωση ισοδυναμεί με την $x^2 = \frac{4}{x^4}$ η οποία έχει δύο λύσεις τις $\pm\sqrt[3]{2}$.

(β). (i). Θέτουμε $a_n = (-1)^n \dfrac{n^3+5n+1}{n^5+n+\sin(n)}$ και $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+5n+n^2}{n^5+n+\sin(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+(5/n^4)+(1/n^3)}{1+(1/n^4)+(\sin(n)/n^5)} = 1$$

αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$ για κάθε $p > 0$ και επιπλέον, από το θεώρημα sandwitch, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n)/n^5 = 0$ γιατί $|\sin(n)/n^5| \leq 1/n^5$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Στη συνέχεια βλέπουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει σε πραγματικό ως p-σειρά με $p = 2 > 1$. Εφαρμόζοντας το ΚΟΣ συμπεραίνουμε ότι και η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει σε πραγματικό, δηλαδή η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα και άρα συγκλίνει σε πραγματικό, από γνωστό θεώρημα.

(ii). Θέτουμε $a_n = (-1)^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι εναλλάσουσα αφού $\sqrt{2n+1} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$ (γιατί $\sqrt{2n+1} \to +\infty$) και $\sqrt{2n+1} < \sqrt{2n+3}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (δηλαδή η $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα). Συμπεραίνουμε λοιπόν, μέσω του κριτηρίου Leibnitz, ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό.

(iii). Θέτουμε $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} e^{\sin(n^2)}$ και $b_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε τώρα ότι

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \to \frac{1}{4} < 1$$

Συμπεραίνουμε τώρα από το κριτήριο λόγου ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει σε πραγματικό. Τέλος έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ανισότητα

$$0 < a_n \leq e b_n \text{ γιατί } \sin(n^2) \leq 1 \text{ και η } e^x \text{ είναι αύξουσα συνάρτηση}$$

και άρα από το ΚΑΣ η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό.

(iv). Θέτουμε $a_n = \dfrac{n\ln(n+1) - n\ln(n)}{2n+1}$ και $b_n = \dfrac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $\ln(n+1) > \ln(n)$, διότι η λογαριθμική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, και άρα $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε στη συνέχεια ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} \lim_{n\to\infty} [n\ln(n+1) - n\ln(n)] = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) =$$
$$\frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

γιατί $\dfrac{1}{n} \to 0$, ενώ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$, από τον κανόνα De L'Hopital. Τέλος έχουμε από το ΚΟΣ, ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ διότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$ (αρμονική σειρά).

ΘΕΜΑ 2. (α). Έχουμε ότι

$$\frac{1}{(x^3-8)} = \frac{-1}{8}\frac{1}{1-\frac{x^3}{8}} = \frac{-1}{8}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n}, \text{ αν και μόνο αν, } |x| < 2$$

γιατί $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, αν και μόνο αν, $|x| < 1$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειράς λαμβάνουμε ότι

$$\frac{-3x^2}{(x^3-8)^2} = \frac{-1}{8}\sum_{n=1}^{\infty} 3n\,\frac{x^{3n-1}}{8^n}, \text{ αν και μόνο αν, } |x| < 2$$

Παρατηρούμε ότι η άθροιση στη δυναμοσειρά των παραγώγων αρχίζει από το δείκτη $n = 1$ γιατί η αρχική δυναμοσειρά έχει σταθερό όρο που αντιστοιχεί στο δείκτη $n = 0$, ο οποίος μηδενίζεται στην παραγώγιση. Απλοποιώντας την παραπάνω ισότητα όταν $x \neq 0$, βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{(x^3-8)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{x^{3n-3}}{8^{n+1}}, \text{ όταν } 0 < |x| < 2$$

Βλέπουμε τώρα ότι ο σταθερός όρος αυτής της δυναμοσειράς (αντιστοιχεί στο δείκτη $n = 1$) ισούται με $\dfrac{1}{64}$. Είναι δηλαδή ίσος με την τιμή της συνάρτησης $\dfrac{1}{(x^3-8)^2}$ για $x = 0$. Άρα, η παραπάνω ισότητα επεκτείνεται και για $x = 0$ κι έτσι έχουμε ότι

$$f(x) = \frac{1}{(x^3-8)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{x^{3n-3}}{8^{n+1}},\ \text{αν και μόνο αν},\ |x|<2$$

Αυτό είναι το ανάπτυγμα Maclaurin της f, ενώ το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-2,2)$.

Για τον υπολογισμό της παραγώγου $f^{(129)}(0)$, γνωρίζουμε ότι

$$\frac{f^{(129)}(0)}{(129)!} = \text{ συντελεστής του } x^{129} \text{ στο ανάπτυγμα Maclaurin της } f$$

Έχουμε τώρα ότι $3n-3=129$ όταν $n=44$ και άρα το παραπάνω ανάπτυγμα μας δίνει για $n=44$ ότι

$$\frac{f^{(129)}(0)}{(129)!} = \frac{44}{8^{45}}$$

καταλήγοντας στην τιμή $f^{(129)}(0) = \dfrac{44}{8^{45}}[(129)!]$.

(β). Γνωρίζουμε ότι

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1},\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

και άρα έχουμε την ισότητα

$$\sin(x) - x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1},\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

από την οποία, για $x=\dfrac{1}{2}$ λαμβάνουμε ότι

$$\sin\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{1}{2^{2n+1}}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας με το 2 βρίσκουμε τελικά ότι

$$2\sin\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)!}$$

ΘΕΜΑ 3. (i). Θέτοντας $x=\sin(t)$ με $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, έχουμε ότι $\sqrt{1-x^2}=\cos(t)$, $dx=\cos(t)dt$. Έπεται τώρα ότι

$$\int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{2+\cos(t)}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)+2-2}{2+\cos(t)}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{2}{2+\cos(t)}\right) dt$$

και άρα

$$\int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos(t)}$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $u = \tan(t/2)$ με $u \in [0,1]$. Γνωρίζουμε ότι

$$dt = \frac{2du}{u^2+1} \text{ και } \cos(t) = \frac{1-u^2}{u^2+1}$$

και άρα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos(t)} = \int_0^1 \frac{\frac{2du}{u^2+1}}{2+\frac{1-u^2}{u^2+1}} = 2\int_0^1 \frac{du}{u^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\Big]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

αφού $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

(ii). Αρχικά αναλύουμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση σε απλά κλάσματα. Υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί A, B, C τέτοιοι ώστε

$$(*) \quad \frac{1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}, \forall x \neq 1$$

Έχουμε τώρα ότι $A = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{5}$. Επίσης έχουμε ότι

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{Ax}{x-1} + \frac{Bx^2+Cx}{x^2+4}, \forall x \neq 1$$

και άρα

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x-1)(x^2+4)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{Ax}{x-1} + \lim_{x\to+\infty} \frac{Bx^2+Cx}{x^2+4}$$

Συνάγεται τώρα από την παραπάνω ισότητα ότι

$$0 = A + B \text{ και άρα } B = \frac{-1}{5}$$

Η σχέση $(*)$ για $x = 0$ δίνει ότι

$$-A + \frac{C}{4} = \frac{-1}{4} \text{ και άρα } C = \frac{-1}{5}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος τώρα έχουμε ότι

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int \frac{x+1}{x^2+4}\,dx =$$
$$\frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\int \frac{(x^2+4)'}{x^2+4}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+4} =$$
$$\frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln(x^2+4) - \frac{1}{10}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

όπου, είτε $x \in (-\infty, 1)$, είτε $x \in (1, +\infty)$, ενώ $c \in \mathbb{R}$ είναι αυθαίρετη σταθερά.

ΘΕΜΑ 4. (α). Το μήκος L αυτής της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx$$

Έχουμε ότι

$$y'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} \text{ και } [y'(x)]^2 = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)^2 = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{2}$$

και άρα

$$1 + [y'(x)]^2 = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{2} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)^2$$

Συνεπώς

$$L = \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx = \int_1^3 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)dx = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x}\Big]_1^3 = \frac{14}{3}$$

(β). Γενικευμένο ολοκλήρωμα 2ου είδους. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

Θα δείξουμε ότι καθένα από τα παραπάνω γενικευμένα ολοκληρώματα 1ου είδους συγκλίνει (σε πραγματικό αριθμό). Για το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\,dx$ παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}},\ \forall\, x \in (0,1]$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\gamma\to 0}\int_\gamma^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\gamma\to 0}(2 - 2\sqrt{\gamma}) = 2$$

και άρα το κριτήριο άμεσης σύγκρισης δίνει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\right| dx$ συγκλίνει (σε πραγματικό). Από γνωστό θεώρημα λαμβάνουμε ότι και το $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνει (σε πραγματικό).

Για το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\,dx$ έχουμε καταρχήν ότι για κάθε $\gamma > 1$

$$(**)\ \int_1^{\gamma} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{\gamma} \left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)' \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{\sin(2x)}{2\sqrt{x}}\Bigg]_1^{\gamma} - \frac{1}{2}\int_1^{\gamma} \sin(2x)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' dx$$
$$= \frac{\sin(2\gamma)}{2\sqrt{\gamma}} - \frac{\sin(2)}{2} + \frac{1}{4}\int_1^{\gamma} \frac{\sin(2x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Έχουμε ακόμα ότι $\left|\dfrac{\sin(2\gamma)}{\sqrt{\gamma}}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}$, για κάθε $\gamma > 0$ και άρα το θεώρημα sandwitch μας δίνει ότι $\displaystyle\lim_{\gamma\to+\infty} \frac{\sin(2\gamma)}{\sqrt{\gamma}} = 0$, γιατί $\displaystyle\lim_{\gamma\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = 0$. Παίρνοντας τώρα όρια για $\gamma \to +\infty$, και στα δύο μέλη της ισότητας $(**)$, λαμβάνουμε ότι

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\,dx = -\frac{\sin(2)}{2} + \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ συγκλίνει (σε πραγματικό). Πράγματι,

$$\left|\frac{\sin(2x)}{x^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},\ \forall\, x \geq 1$$

ενώ

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\gamma\to+\infty} \int_1^{\gamma} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\gamma\to+\infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right) = 2$$

Συνάγεται τώρα, από το κριτήριο άμεσης σύγκρισης, ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(2x)}{x^{\frac{3}{2}}}\right| dx$ συγκλίνει (σε πραγματικό). Από γνωστό θεώρημα λαμβάνουμε ότι και το $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ συγκλίνει (σε πραγματικό), και άρα το $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνει (σε πραγματικό).

Συμπερασματικά, τα γενικευμένα ολοκληρώματα 1ου είδους $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\,dx$ και $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνουν. Άρα και το $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνει.