

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ
03 /02/2025

Άσκηση 1. (2 μον.) (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο μη κενό και $B \subseteq A$ μη κενό. Δείξτε ότι

$$\inf A \leq \inf B \quad \text{και} \quad \sup B \leq \sup A$$

(β) Δίνονται τα εξής υποσύνολα του $\mathbb{R}$:

$$B_1 = \left\{ \frac{1}{1+k} : k \in \mathbb{N} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{και} \quad A = \left\{ \frac{n}{n+k} : n, k \in \mathbb{N} \right\}$$

(β1) (0.5 μον.) Βρείτε το $\inf B_1$ και το $\sup B_2$.

(β2) (0.5 μον.) Βρείτε το $\inf A$ και το $\sup A$.

Λύση. (α) Το $\inf A$ είναι κάτω φράγμα του A άρα και του $B \subseteq A$. Συνεπώς $\inf A \leq \inf B$ γιατί το $\inf B$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του B . Ομοίως, το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A άρα και του B και συνεπώς $\sup B \leq \sup A$ γιατί το $\sup B$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του B .

(β1) Το B_1 είναι το σύνολο των όρων της ακολουθίας $a_k = \frac{1}{1+k}$ που συγκλίνει στο 0. Επειδή η (a_k) είναι φθίνουσα, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \inf\{a_k : k \in \mathbb{N}\} = \inf B_1$ και άρα $\inf B_1 = 0$. Ομοίως το B_2 είναι το σύνολο των όρων της ακολουθίας $a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ που συγκλίνει στο 1. Επειδή $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, η (a_n) είναι αύξουσα, οπότε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup B_2$. Άρα $\sup B_2 = 1$.

(β2) Επειδή τα B_1, B_2 είναι υποσύνολα του A , από το (α) παίρνουμε ότι

$$\inf A \leq \inf B_1 = 0 \quad \text{και} \quad 1 = \sup B_2 \leq \sup A$$

Αλλά $0 < \frac{n}{n+k} < 1$ για όλα τα $n, k \in \mathbb{N}$ οπότε

$$0 \leq \inf A \quad \text{και} \quad \sup A \leq 1$$

διότι το $\inf A$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του A και το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A .

Άρα $\inf A = 0$ και $\sup A = 1$.

Άσκηση 2. (2 μον.) Έστω $x_1 = \sqrt{2}$ και $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ για κάθε $n \geq 1$.

(α) (1 μον.) Δείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη.

(β) (1 μον.) Υπολογίστε το όριό της.

Λύση. (α) Η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Πράγματι $x_2 = \sqrt{2+x_1} > \sqrt{2} = x_1$. Έστω $x_{k+1} > x_k > 0$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε

$$x_{k+2} = \sqrt{2+x_{k+1}} > \sqrt{2+x_k} = x_{k+1}$$

Με Επαγωγή έχουμε ότι $x_{n+1} > x_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Επίσης με επαγωγή δείχνουμε ότι $x_n < 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, για $n = 1$ ισχύει. Έστω ότι $x_k < 2$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$.

(β) Ως μονότονη και φραγμένη η (x_n) είναι συγκλίνουσα. Έστω $x = \lim x_n$. Τότε $x = \sqrt{2+x} \Rightarrow x^2 = 2+x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$. Άρα $x = 2$ ή $x = -1$. Επειδή $x_n > 0$ έπεται $\lim x_n = x \geq 0$ και άρα $x = 2$.

Άσκηση 3. (2 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

(α) (1 μον.) Δείξτε ότι για κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε
$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

(β) (1 μον.) Αν για κάθε διάστημα $[a, b]$ ισχύει ότι $\int_a^b f(x) dx = 0$ δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. (α) Η συνάρτηση $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεώρημα Μέση Τιμής έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi) \Leftrightarrow \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = f(\xi) \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

(β) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\xi_n \in \mathbb{R}$ με $x_0 - \frac{1}{n} < \xi_n < x_0 + \frac{1}{n}$ και $f(\xi_n) = 0$. Πράγματι, θεωρούμε το διάστημα $\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$. Τότε από το (α) υπάρχει $\xi_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$ με

$$\int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} f(x) dt = f(\xi_n) \frac{2}{n}$$

και άρα αφού το ολοκλήρωμα της f σε κάθε διάστημα είναι μηδέν, έχουμε ότι $f(\xi_n) = 0$.

Επειδή $x_0 - \frac{1}{n} < \xi_n < x_0 + \frac{1}{n}$, από Κριτήριο Ισοσυγκλινοσών ακολουθιών, $\xi_n \rightarrow x_0$. Όμως από Αρχή Μεταφοράς θα πρέπει $f(\xi_n) \rightarrow f(x_0)$ και άρα $f(x_0) = 0$.

Άσκηση 4. (3 μον.) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή όχι δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α) (1 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f δεν είναι γνησίως μονότονη τότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = 0$.

(β) (1 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ υπάρχει τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

(γ) (1 μον.) Υπάρχει $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $|x| = \int_{-1}^x f(t) dt + 1$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Λύση. (α) Σωστή. Αν η f δεν είναι μονότονη τότε αφού είναι συνεχής η f δεν είναι 1-1 ισοδύναμα υπάρχουν $a < b$ με $f(a) = f(b)$. Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ με $f'(x_0) = 0$.

(β) Σωστή. Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Λόγω συνέχειας της f στο x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ και άρα το παραπάνω όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$. Αφού το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ υπάρχει, από τον Κανόνα de l'Hospital παίρνουμε ότι

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

(γ) Λάθος. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού η συνάρτηση $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in [-1, 1]$. Αλλά τότε και η $F(x) + 1 = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, 1]$. Όμως η συνάρτηση $|x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Άσκηση 5. (3 μον.) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\phi(a) = f(a)$ και
$$\phi(x) = \frac{\int_a^x f(t) dt}{x - a} \text{ αν } a < x \leq b.$$

(α) (0.5 μον.) Δείξτε ότι η ϕ είναι συνεχής στο $x_0 = a$.

(β) (1 μον.) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = a$ δείξτε ότι και η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = a$ και υπολογίστε την $\phi'(a)$.

(γ) (0.5 μον.) Δείξτε ότι $\phi'(x) = \frac{f(x) - \phi(x)}{x - a}$ για κάθε $x \in (a, b]$.

(δ) (1 μον.) Αν η f είναι αύξουσα δείξτε ότι και η ϕ είναι αύξουσα.

Λύση. (α) Έστω $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a, b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού,

$$\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = F'(a) = f(a) = \phi(a)$$

και άρα η ϕ είναι συνεχής στο $x = a$.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \phi'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\phi(x) - \phi(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\phi(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt - f(a)(x - a)}{(x - a)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\int_a^x f(t) dt)' - (f(a)(x - a))'}{((x - a)^2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{2(x - a)} = \frac{1}{2} f'(a) \end{aligned}$$

(γ) Για κάθε $x \in (a, b]$ έχουμε

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \left(\frac{F(x)}{x - a} \right)' = \frac{F'(x) \cdot (x - a) - F(x) \cdot (x - a)'}{(x - a)^2} \\ &= \frac{f(x)(x - a) - F(x)}{(x - a)^2} \\ &= \frac{\left(f(x) - \frac{F(x)}{x - a} \right) (x - a)}{(x - a)^2} = \frac{f(x) - \phi(x)}{x - a} \end{aligned} \tag{1}$$

(δ) Έστω $x \in (a, b]$. Αν η f είναι αύξουσα τότε $f(t) \leq f(x)$ για κάθε $a \leq t \leq x$ και άρα από την ιδιότητα μονοτονίας του ολοκληρώματος,

$$\phi(x) = \frac{\int_a^x f(t) dt}{x - a} \leq \frac{f(x)(x - a)}{x - a} = f(x)$$

Οπότε $\phi'(x) = \frac{f(x) - \phi(x)}{x - a} \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b]$. Άρα η ϕ είναι αύξουσα ως συνεχής στο $[a, b]$ με μη αρνητική παράγωγο στο εσωτερικό του $[a, b]$.