

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ
03 /02/2025

Άσκηση 1. (2 μον.) (α) (1 μον.) Έστω A φραγμένο μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $B \subseteq A$ μη κενό. Δείξτε ότι

$$\inf A \leq \inf B \quad \text{και} \quad \sup B \leq \sup A$$

(β) Δίνονται τα εξής υποσύνολα του $\mathbb{R}$:

$$B_1 = \left\{ \frac{1}{1+k} : k \in \mathbb{N} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{και} \quad A = \left\{ \frac{n}{n+k} : n, k \in \mathbb{N} \right\}$$

(β1) (0.5 μον.) Βρείτε το $\inf B_1$ και το $\sup B_2$. (β2) (0.5 μον.) Βρείτε το $\inf A$ και το $\sup A$.

Άσκηση 2. (2 μον.) Έστω $x_1 = \sqrt{2}$ και $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ για κάθε $n \geq 1$.

(α) (1 μον.) Δείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη.

(β) (1 μον.) Υπολογίστε το όριό της.

Άσκηση 3. (2 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

(α) (1 μον.) Δείξτε ότι για κάθε διάστημα $[a, b]$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$.

(β) (1 μον.) Αν για κάθε διάστημα $[a, b]$ ισχύει ότι $\int_a^b f(x) dx = 0$ δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4. (3 μον.) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή όχι δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α) (1 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f δεν είναι γνησίως μονότονη τότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = 0$.

(β) (1 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ υπάρχει τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

(γ) (1 μον.) Υπάρχει $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $|x| = \int_{-1}^x f(t) dt + 1$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Άσκηση 5. (3 μον.) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\phi(a) = f(a)$ και $\phi(x) = \frac{\int_a^x f(t) dt}{x-a}$ αν $a < x \leq b$.

(α) (0.5 μον.) Δείξτε ότι η ϕ είναι συνεχής στο $x_0 = a$.

(β) (1 μον.) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = a$ δείξτε ότι και η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = a$ και υπολογίστε την $\phi'(a)$.

(γ) (0.5 μον.) Δείξτε ότι $\phi'(x) = \frac{f(x) - \phi(x)}{x-a}$ για κάθε $x \in (a, b]$.

(δ) (1 μον.) Αν η f είναι αύξουσα δείξτε ότι και η ϕ είναι αύξουσα.