

Άσκηση 1. (2.5 μον) Έστω $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$.

(α) (1 μον) Με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου υπολογίστε την $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$.

(β) (0.5 μον) Υπολογίστε την κλίση $\nabla f(0, 0) = (f_x(0, 0), f_y(0, 0))$ της f στο $(0, 0)$.

(γ) (1 μον) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$?

Λύση. (α) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 u_1^3 + t^3 u_2^3}{t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2}}{t} = \frac{u_1^3 + u_2^3}{u_1^2 + u_2^2} = u_1^3 + u_2^3.$$

αφού $u_1^2 + u_2^2 = 1$ ($\mathbf{u}$ μοναδιαίο).

(β) Από το (α) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$, παίρνουμε

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0, 0) = 1^3 + 0^3 = 1,$$

και αντίστοιχα για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$,

$$f_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0, 0) = 0^3 + 1^3 = 1.$$

Άρα $\nabla f(0, 0) = (1, 1)$.

(γ) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ τότε θα είχαμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{u} = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 = u_1 + u_2 \quad (1)$$

για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Όμως από το (α) έχουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = u_1^3 + u_2^3$$

Άρα θα έπρεπε

$$u_1^3 + u_2^3 = u_1 + u_2$$

για όλα τα $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$ που όμως δεν ισχύει (πχ. για $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$). Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Άσκηση 2. (2.5 μον) Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 8$.

(α) (0.5 μον) Βρείτε τις μερικές παραγώγους της f έως και δεύτερης τάξης.

(β) (1 μον) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

(γ) (1 μον) Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

Λύση. (α) Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 - 4y$, $f_y(x, y) = -4x + 4y$, $f_{xx}(x, y) = 12x^2$, $f_{xy}(x, y) = -4$, και $f_{yy}(x, y) = 4$.

(β) Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$ ή ισοδύναμα

$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$. Η δεύτερη εξίσωση δίνει $y = x$ και με αντικατάσταση στην πρώτη παίρνουμε $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$. Αντίστοιχα έχουμε, $y = 0$ ή $y = 1$ ή $y = -1$, δηλαδή τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία

$$(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$$

(γ) Έχουμε $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 48x^2 - 16$. Οπότε, $\Delta(0, 0) = -16 < 0$ και άρα το $(0, 0)$ σαγματικό σημείο. Επίσης $\Delta(1, 1) = \Delta(-1, -1) > 0$ και $f_{xx}(1, 1) = f_{xx}(-1, -1) > 0$. Άρα τα σημεία $(-1, -1)$ και $(1, 1)$ είναι σημεία τοπικού ελαχίστου.

Άσκηση 3. (2.5 μον)

(α) (1 μον) Εστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση. Γράψτε τον γενικό τύπο του πολωνύμου Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 0)$.

(β) (1.5 μον) Εστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση τέτοια ώστε το δεύτερης τάξης πολωνύμο Taylor της f με κέντρο το $(0, 0)$ είναι το $T_2(x, y) = x^2 - y^2$. Εξετάστε αν το $(0, 0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f .

Λύση. (α) Το πολωνύμου Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 0)$ δίνεται από τον γενικό τύπο

$$T_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2)$$

(β) Έχουμε

$$T_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) = x^2 - y^2$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές παίρνουμε

$$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0, \quad f_{xx}(0, 0) = 2, \quad f_{yy}(0, 0) = -2, \quad f_{xy}(0, 0) = 0$$

Αφού $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο και επειδή $\Delta(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 2 \cdot (-2) - 0 = -4 < 0$ το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της f .

Άσκηση 4. (2.5 μον) Έστω $f(x) = \arctan x + \arctan \left(\frac{1}{x}\right)$ για κάθε $x \neq 0$. (α) (1 μον) Βρείτε την παράγωγο της f . (β) (1.5 μον) Υπολογίστε τις τιμές $f(2025)$ και $f(-2025)$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

(β) Αφού $f'(x) = 0$ έπεται ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Άρα

$$f(2025) = f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2 \arctan 1 = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

και

$$f(-2025) = f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = 2 \arctan(-1) = -2 \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

Άσκηση 5. (2 μον) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x + \sin^2 x} dx$.

Λύση.

(α) Θέτουμε $y = \sin x$. Έχουμε $dy = \cos x dx$ και

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x + \sin^2 x} dx = \int_{1/2}^1 \frac{1}{y^3 + y^2} dy = \int_{1/2}^1 \frac{1}{y^2(y+1)} dy$$

$$\frac{1}{y^2(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y+1}$$

$$Ay(y+1) + B(y+1) + Cy^2 = 1$$

$$(A+C)y^2 + (A+B)y + B = 1$$

Άρα

$$A+C=0, \quad A+B=0 \quad \text{και} \quad B=1$$

Οπότε $A=-1$, $B=1$ και $C=1$. Άρα,

$$\frac{1}{y^2(y+1)} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y+1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2(y+1)} dy &= -\int_{1/2}^1 \frac{1}{y} dy + \int_{1/2}^1 \frac{1}{y^2} dy + \int_{1/2}^1 \frac{1}{y+1} dy \\ &= -\ln y \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{y} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \ln(y+1) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = -\ln 2 - (1-2) + \left(\ln 2 - \ln \frac{3}{2} \right) = 1 - \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$