

ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΑΤΜ, 24/01/2025

Άσκηση 1. (2.5 μον) Έστω $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$.

(α) (1 μον) Με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου υπολογίστε την $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$.

(β) (0.5 μον) Υπολογίστε την κλίση $\nabla f(0, 0) = (f_x(0, 0), f_y(0, 0))$ της f στο $(0, 0)$.

(γ) (1 μον) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$?

Άσκηση 2. (2.5 μον) Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 8$.

(α) (0.5 μον) Βρείτε τις μερικές παραγώγους της f έως και δεύτερης τάξης.

(β) (1 μον) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

(γ) (1 μον) Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

Άσκηση 3. (2.5 μον)

(α) (1 μον) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση. Γράψτε τον γενικό τύπο του πολυωνύμου Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 0)$.

(β) (1.5 μον) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση τέτοια ώστε το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $(0, 0)$ είναι το $T_2(x, y) = x^2 - y^2$. Εξετάστε αν το $(0, 0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f .

Άσκηση 4. (2.5 μον) Έστω $f(x) = \arctan x + \arctan \left(\frac{1}{x} \right)$ για κάθε $x \neq 0$. (α) (1 μον) Βρείτε την παράγωγο της f . (β) (1.5 μον) Υπολογίστε τις τιμές $f(2025)$ και $f(-2025)$.

Άσκηση 5. (2 μον) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x + \sin^2 x} dx$.

ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ 12, ΓΙΑ ΤΟ ΑΡΙΣΤΑ ΑΡΚΟΥΝ 10 ΜΟΝΑΔΕΣ