

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς και τέτοιες ώστε $\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} = \inf\{g(x) : x \in [a, b]\}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

Λύση. Θέτουμε $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} = \inf\{g(x) : x \in [a, b]\}$. Αφού $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς μπορούμε να επιλέξουμε σημεία x_1, x_2 στο $[a, b]$ όπου $f(x_1) = g(x_2) = m$. Αν $x_1 = x_2 = x_0$ τότε $f(x_0) = g(x_0) = m$. Αν $x_1 \neq x_2$ θέτουμε $h(x) = f(x) - g(x)$ και παρατηρούμε ότι $h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = m - g(x_1) < 0$ ενώ $h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - m > 0$. Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει x_0 μεταξύ των x_1, x_2 με $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$ δηλαδή $f(x_0) = g(x_0)$.

Άσκηση 2. Έστω (a, b) ένα ανοικτό μη κενό διάστημα του $\mathbb{R}$. Βρείτε μια συνάρτηση $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 1-1 και επί και τέτοια ώστε η f και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμες.

Λύση. Έστω $f(x) = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}$ για κάθε $x \in (a, b)$. Επειδή $f'(x) = \frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(b-x)^2} > 0$ έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow a^+} \phi(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow b^-} \phi(x) = +\infty$. Άρα από το Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών η f είναι επί. Από το Θεώρημα της παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Άσκηση 3. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f δεν είναι μονότονη συνάρτηση αν και μόνο αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in I$ με $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$.

Λύση. Η f δεν είναι αύξουσα και άρα μπορούμε να βρούμε $a < b$ στο I με $f(a) > f(b)$. Ομοίως, η f δεν είναι φθίνουσα και άρα υπάρχουν $c < d$ στο I με $f(c) < f(d)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχουν $x_1 \in (a, b)$ και $x_2 \in (c, d)$ με $f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$ και $f'(x_2) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} > 0$, οπότε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$. Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in I$ με $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$. Όπως γνωρίζουμε αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι αύξουσα τότε $f'(x) \geq 0$ για όλα τα $x \in I$ και αντίστοιχα αν είναι φθίνουσα τότε $f'(x) \leq 0$ για όλα τα $x \in I$. Άρα αν η f ήταν μονότονη τότε θα είχαμε $f'(x_1)f'(x_2) \geq 0$ για κάθε $x_1, x_2 \in I$, άτοπο. Συνεπώς η f δεν είναι μονότονη.

Άσκηση 4. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Ισχύει το αντίστροφο ;

Λύση. Έστω $x_1 \neq x_2$ στο I . Ας υποθέσουμε ότι $x_1 < x_2$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ με $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Αφού $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ έπεται $f(x_1) \neq f(x_2)$. Συνεπώς για κάθε $x_1, x_2 \in I$ έχουμε ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$ όταν $x_1 \neq x_2$. Άρα η f είναι 1-1 και όπως όμως γνωρίζουμε, κάθε συνεχής και 1-1 συνάρτηση που ορίζεται σε διάστημα είναι γνησίως μονότονη.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Π.χ. η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα αλλά $f'(0) = 0$.

Άσκηση 5. (α) Αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση και $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$ δείξτε ότι

$$U(f, P) - L(f, P) \leq (f(b) - f(a)) \lambda(P)$$

όπου $\lambda(P) = \max\{\Delta x_i : 1 \leq i \leq n\}$ η λεπτότητα της P .

(β) Δείξτε ότι κάθε αύξουσα συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Λύση. (α) Επειδή η f είναι αύξουσα, έπεται ότι

$$m_i = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1}), \quad \text{και} \quad M_i = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i)$$

για κάθε $1 \leq i \leq n$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \lambda(P) = \left(\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \right) \lambda(P) = (f(b) - f(a)) \lambda(P) \end{aligned}$$

(β) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(b) > f(a)$ (διαφορετικά η f είναι σταθερή και άρα ολοκληρώσιμη). Για κάθε $\epsilon > 0$ επιλέγουμε διαμέριση P του $[a, b]$ με $\lambda(P) < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$. Τότε από το (α) ερώτημα, $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. Από το κριτήριο Riemann η f είναι ολοκληρώσιμη.

Άσκηση 6. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $f(q) = 0$ για κάθε q ρητό στο $[a, b]$ δείξτε ότι $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Λύση. Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$ είναι ίσο με το κάτω ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$ που εξ ορισμού είναι το supremum του συνόλου όλων των κάτω αθροισμάτων της f . Τώρα, κάθε κάτω άθροισμα της f είναι ίσο με το 0. Πράγματι, έστω $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Τότε $L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ όπου $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Από την πυκνότητα των ρητών σε κάθε $[x_{i-1}, x_i]$ υπάρχουν άπειροι ρητοί και άρα $m_i = 0$ για όλα τα $i = 1, \dots, n$. Συνοψίζοντας,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \sup\{L(f, p) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} = \sup\{0\} = 0$$

Άσκηση 7. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b f(t) dt \neq 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $\int_a^\xi f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$.

Λύση. Έστω $\lambda > 0$. Ορίζουμε την συνάρτηση $H(x) = \int_a^x f(t) dt - \lambda \int_a^b f(t) dt$. Η H είναι συνεχής αφού ως γνωστόν η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι συνεχής.

Επειδή $H(a) \cdot H(b) = -\lambda \left(\int_a^b f(t) dt \right)^2 < 0$ από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $H(\xi) = 0$ και άρα $\int_a^\xi f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$.

Άσκηση 8. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε τα εξής:

(α) Η F είναι σταθερή αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Η F είναι αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) αν και μόνο αν $f(x) \geq 0$ (αντ. $f(x) \leq 0$) για κάθε $x \in [a, b]$.

Λύση. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι $f(x) = F'(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(α) Η F είναι σταθερή συνάρτηση αν και μόνο αν $F'(x) = 0$ αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Η F είναι αύξουσα αν και μόνο αν $F'(x) \geq 0$ αν και μόνο αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αντίστοιχα, αν η F είναι φθίνουσα.

Άσκηση 9. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

(α) Έστω $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

(β) Αν $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + 1}$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = 0$$

Θέτουμε $h = f - g$ και $H(x) = \int_0^x h(t) dt$. Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και άρα από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, η H είναι παραγωγίσιμη με $H'(x) = h(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Επειδή $H(1) = H(0) = 0$ από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $H'(\xi) = h(\xi) = f(\xi) - g(\xi) = 0$.

(β) Έχουμε $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4} = \arctan 1 - \arctan 0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$ και το συμπέρασμα έπεται από το (α).

Άσκηση 10. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\phi(a) = f(a)$ και $\phi(x) = \frac{\int_a^x f(t) dt}{x - a}$ για $a < x \leq b$. Δείξτε ότι η ϕ είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο $(a, b]$ και υπολογίστε την $\phi'(x)$ για κάθε $x \in (a, b]$.

Λύση. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Έχουμε $\phi(x) = \frac{F(x)}{x - a}$ για κάθε $a < x \leq b$ οπότε η ϕ είναι συνεχής στο $(a, b]$ ως πηλίκο συνεχών. Επιπλέον, η ϕ είναι συνεχής και στο a , διότι

$$\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = F'(a) = f(a) = \phi(a)$$

Έστω $x \in (a, b)$. Τότε

$$\phi'(x) = \left(\frac{F(x)}{x - a} \right)' = \frac{F'(x) \cdot (x - a) - F(x) \cdot (x - a)'}{(x - a)^2} = \frac{(x - a)f(x) - F(x)}{(x - a)^2}$$

Άσκηση 11. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^5} e^{t^2} \sin(t^2) dt}{x^{15}}$.

Λύση. Θέτουμε $F(x) = \int_0^x e^{t^2} \sin(t^2) dt$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) = 0$ και $F'(x) = e^{x^2} \sin(x^2)$. Άρα το

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^5} e^{t^2} \sin(t^2) dt}{x^{15}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x^5)}{x^{15}}$$

είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα de l' Hospital και τον Κανόνα Αλυσίδας, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^5} e^{t^2} \sin(t^2) dt}{x^{15}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x^5)}{x^{15}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(F(x^5))'}{(x^{15})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x^5) \cdot (x^5)'}{15x^{14}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^{10}} \sin(x^{10}) \cdot 5x^4}{15x^{14}} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x^{10}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^{10})}{x^{10}} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$