

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9

Άσκηση 1. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς και τέτοιες ώστε $\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} = \inf\{g(x) : x \in [a, b]\}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

Άσκηση 2. Έστω (a, b) ένα ανοικτό μη κενό διάστημα του $\mathbb{R}$. Βρείτε μια συνάρτηση $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 1-1 και επί και τέτοια ώστε η f και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμες.

Άσκηση 3. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f δεν είναι μονότονη συνάρτηση αν και μόνο αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in I$ με $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$.

Άσκηση 4. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Ισχύει το αντίστροφο ;

Άσκηση 5. (α) Αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση και $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$ δείξτε ότι

$$U(f, P) - L(f, P) \leq (f(b) - f(a)) \lambda(P)$$

όπου $\lambda(P) = \max\{\Delta x_i : 1 \leq i \leq n\}$ η λεπτότητα της P .

(β) Δείξτε ότι κάθε αύξουσα συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Άσκηση 6. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $f(q) = 0$ για κάθε q ρητό στο $[a, b]$ δείξτε ότι $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Άσκηση 7. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b f(t) dt \neq 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $\int_a^\xi f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$.

Άσκηση 8. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε τα εξής:

(α) Η F είναι σταθερή αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Η F είναι αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) αν και μόνο αν $f(x) \geq 0$ (αντ. $f(x) \leq 0$) για κάθε $x \in [a, b]$.

Άσκηση 9. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

(α) Έστω $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

(β) Αν $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + 1}$.

Άσκηση 10. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\phi(a) = f(a)$ και $\phi(x) = \frac{\int_a^x f(t) dt}{x - a}$ για $a < x \leq b$. Δείξτε ότι η ϕ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) .

Άσκηση 11. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^5} e^{t^2} \sin(t^2) dt}{x^{15}}$.