

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $G(x) = \int_x^b f(t) dt$ για κάθε $x \in [a, b]$ (αν $x = b$ θέτουμε $G(b) = \int_b^b f(x) dx = 0$). Δείξτε ότι $G'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Λύση. Από την Προσθετικότητα του Ολοκληρώματος έχουμε $\int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt$. Άρα, θέτοντας $c = \int_a^b f(t) dt$ και $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ παίρνουμε $c = F(x) + G(x)$ και συνεπώς $G(x) = c - F(x)$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και άρα $G'(x) = (c - F)'(x) = -F'(x) = -f'(x)$.

Άσκηση 2. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b f(x) dx > 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $\int_a^\xi f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.

Λύση. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι συνεχής με $F(a) = 0$ και $F(b) = \int_a^b f(t) dt > 0$. Έστω $\lambda \in (0, 1)$. Τότε $0 < \lambda F(b) < F(b)$ και άρα από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $F(\xi) = \lambda F(b)$, ισοδύναμα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\int_a^\xi f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.

Άσκηση 3. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(x) dx$, $x \in [a, b]$ είναι σταθερή δείξτε ότι $f = 0$.

Λύση. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από την υπόθεσή μας έχουμε ότι η F είναι σταθερή συνάρτηση και άρα $f(x) = F'(x) = 0$.

Άσκηση 4. Έστω $G : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $G(x) = \int_0^{\sqrt{\ln x}} e^{t^2} dt$, για κάθε $x > 1$. Δείξτε ότι η G είναι παραγωγίσιμη και βρείτε τον τύπο της G' .

Λύση. Αν $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, $x > 0$ και $\phi(x) = \sqrt{\ln x}$, $x > 1$, τότε $G(x) = F(\phi(x))$. Συνεπώς η G είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, αφού $F'(x) = e^{x^2}$ και $\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}$. Από τον Κανόνα Αλυσίδας έχουμε

$$G'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = e^{\ln x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}.$$

Άσκηση 5. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $h_1, h_2 : [a, b] \rightarrow [a, b]$ παραγωγίσιμες τέτοιες ώστε $h_1(x) < h_2(x)$ για κάθε $x \in I$. Ορίζουμε την συνάρτηση $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $H(x) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t) dt$, για κάθε $x \in I$. Βρείτε την $H'(x)$ για κάθε $x \in I$.

Λύση. Από την Προσθετικότητα του Ολοκληρώματος έχουμε ότι

$$\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t) dt = \int_a^{h_2(x)} f(t) dt - \int_a^{h_1(x)} f(t) dt \quad (1)$$

για κάθε $x \in [a, b]$.

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Παρατηρούμε ότι

$$\int_a^{h_2(x)} f(t) dt = F(h_2(x)) \text{ και ομοίως } \int_a^{h_1(x)} f(t) dt = F(h_1(x))$$

Άρα, αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε

$$H(x) = F(h_2(x)) - F(h_1(x)) = (F \circ h_2)(x) - (F \circ h_1)(x)$$

και άρα από τον Κανόνα Αλυσίδας, $H'(x) = f'(h_2(x))h_2'(x) - f'(h_1(x))h_1'(x)$.

Άσκηση 6. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $\int_a^b f(x) dx = 0$ δείξτε ότι $f = 0$.

Λύση. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε ότι $F'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και άρα η F είναι αύξουσα. Συνεπώς $F(a) \leq F(x) \leq F(b)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και άρα αφού $F(a) = 0$ και $F(b) = \int_a^b f(x) dx = 0$, η F είναι σταθερή και ίση με μηδέν. Άρα και η παράγωγος της F θα είναι ίση με μηδέν, δηλαδή $f = F' = 0$.

Άσκηση 7. (α) Έστω $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $\int_a^b h(x) dx > 0$.

(β) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς με $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$.

Λύση. (α) Η h ως συνεχής σε κλειστό φραγμένο διάστημα λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Έστω $m = \min\{h(x) : x \in [a, b]\}$. Επειδή η f λαμβάνει θετικές τιμές έχουμε $m > 0$. Τώρα από την ιδιότητα της Μονοτονίας του Ολοκληρώματος,

$$h \geq m \Rightarrow \int_a^b h(x) dx \geq \int_a^b m dx = m(b-a) > 0$$

(β) Θέτουμε $h = f - g$. Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και $h(x) = f(x) - g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $\int_a^b h(x) dx > 0$. Από την άλλη μεριά, λόγω της

Γραμμικότητας του Ολοκληρώματος έχουμε $\int_a^b h(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$. Συνεπώς $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$.

Άσκηση 8. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $F_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ με $F_n^{(n)} = f$ (με $F_n^{(n)}(x)$ συμβολίζουμε την n -τάξης παράγωγο της F_n).

Λύση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έστω $P(n)$ η πρόταση: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $F_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ με $F_n^{(n)} = f$. Θα δείξουμε ότι η $P(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για $n = 1$ η $P(1)$ προκύπτει από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (η συνάρτηση $F_1(x) = \int_a^x f(x) dx$ ικανοποιεί την σχέση $F'_1 = f$). Έστω $k \in \mathbb{N}$ και έστω ότι η $P(k)$ ισχύει δηλαδή υπάρχει $F_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $F_k^{(k)}(x) = f(x)$. Η F_k ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής και άρα (από την περίπτωση $n = 1$ που ήδη αποδείξαμε) υπάρχει $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $G'(x) = F_k(x)$. Άρα

$$G^{(k+1)} = (G')^{(k)} = F_k^{(k)} = f$$

και συνεπώς θέτοντας $F_{k+1} = G$ βλέπουμε ότι η $P(k+1)$ ισχύει. Άρα (α) η $P(1)$ ισχύει και (β) αν $k \in \mathbb{N}$ τότε $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Συνεπώς από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής η $P(n)$ ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 9. Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \ln 2$.

Λύση. Από τον Ορισμό του ολοκληρώματος μέσω αθροισμάτων Riemann νωρίζουμε ότι αν $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη τότε

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f(1)}{n}$$

Άρα για την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)}{n} \\ &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2. \end{aligned}$$

Άσκηση 10. (α) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα σημείο δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f(x) dx = 0$.

(β) Γενικεύστε για συναρτήσεις $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων.

(γ) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη και έχει το ίδιο ολοκλήρωμα με την f .

Λύση. (α) Έστω ξ το μοναδικό σημείο στο $[a, b]$ με $f(\xi) \neq 0$. Ας υποθέσουμε ότι $\xi \in (a, b)$ και $f(\xi) > 0$. Παρατηρούμε ότι σε κάθε υποδιάστημα του $[a, b]$, η f έχει minimum το μηδέν. Αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$, $L(f, P) = 0$ και συνεπώς

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} = \sup \{0\} = 0 \quad (2)$$

Επίσης σε κάθε υποδιάστημα I του $[a, b]$, η f είναι παντού μηδέν εκτός και αν $\xi \in I$. Άρα για κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ το ξ θα ανήκει ή σε ένα ή το πολύ σε δύο διαδοχικά διαστήματα της μορφής $[x_{i-1}, x_i]$. Συνεπώς $0 \leq U(f, P) \leq f(\xi)\lambda(P)$ όπου $\lambda(P) = \max\{x_i - x_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}$ είναι η λεπτότητα της P . Άρα επιλέγοντας διαμερίσεις P με μικρή λεπτότητα βλέπουμε ότι

$$\int_a^b f(x) dx = \inf \{U(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} = 0 \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f(x) dx = 0$.

(β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ και έστω $\xi_1, \dots, \xi_n \in [a, b]$ τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$ αν και μόνο αν $x \neq \xi_i$ για κάποιο $i = 1, \dots, n$. Για κάθε $1 \leq i \leq n$, έστω $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \neq \xi_i \\ f(\xi_i) & \text{αν } x = \xi_i \end{cases}$$

Από το (α) ερώτημα έχουμε $\int_a^b f_i(x) dx = 0$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Παρατηρούμε επίσης ότι $f = f_1 + \dots + f_n$ και άρα από την γραμμικότητα του Ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (f_1 + \dots + f_n)(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx = 0$$

(γ) Θέτουμε $h = f - g$. Τότε η h είναι παντού μηδέν εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων. Άρα από το (β) η h είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b h = 0$. Επειδή $g = f - h$ από την γραμμικότητα του Ολοκληρώματος έχουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - h(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Άσκηση 11. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a, b]$. Αν $x_0 \in [a, b]$ και το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός δείξτε ότι $F'(x_0) = \ell$.

Λύση. Αν $f(x_0) = \ell$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 και το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Αν $f(x_0) \neq \ell$, θέτουμε $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$ αν $x \neq x_0$ και $g(x_0) = \ell$. Η g είναι συνεχής στο x_0 και διαφέρει από την f μόνο στο x_0 . Από την Άσκηση 10 παραπάνω, η g είναι ολοκληρώσιμη και επιπλέον για κάθε $x \in [a, b]$, $\int_a^x g(t) dt = \int_a^x f(t) dt$. Με άλλα λόγια αν $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ τότε $G = F$. Επειδή η g είναι συνεχής στο x_0 , η $G = F$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $F'(x_0) = G'(x_0) = g(x_0) = \ell$.

Άσκηση 12. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (P_n) του $[a, b]$ τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} (U(f, P_n) - L(f, P_n)) = 0$ δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \int_a^b f(x) dx.$$

Λύση. Για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ έχουμε $L(f, P) \leq \int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f} \leq U(f, P)$ και άρα

$$L(f, P_n) \leq \int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f} \leq U(f, P_n) \quad (4)$$

Συνεπώς,

$$0 \leq \overline{\int_a^b f} - \int_a^b f \leq U(f, P_n) - L(f, P_n)$$

Άρα $\overline{\int_a^b f} - \int_a^b f = 0 \Rightarrow \overline{\int_a^b f} = \int_a^b f$ δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη.

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, η σχέση (4) γράφεται

$$L(f, P_n) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P_n)$$

οπότε

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - L(f, P_n) \leq U(f, P_n) - L(f, P_n)$$

Άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \int_a^b f(x) dx$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (U(f, P_n) - L(f, P_n)) + \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \int_a^b f(x) dx$.

Άσκηση 13. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = f(\xi)$.

Λύση. Θέτουμε $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi) \Leftrightarrow \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = f(\xi)$.

Άσκηση 14. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε τα εξής:
(α) $\int_a^b g(x) dx \neq 0$ και (β) υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

Λύση. Θέτουμε $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ και $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι οι συναρτήσεις $F(x)$ και $G(x)$ είναι παραγωγίσιμες με $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(α) Αν $\int_a^b g(x) dx \neq 0$ τότε $G(b) = \int_a^b g(x) dx \neq 0 = G(a)$ και άρα από το Θεώρημα Rolle θα υπήρχε $\xi \in (a, b)$ με $G'(\xi) = g(\xi) = 0$, άτοπο αφού $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

(β) Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \Leftrightarrow \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

Άσκηση 15. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε τα εξής:

(α) Για κάθε $c \in (a, b)$, $\int_c^b g(t) dt \neq 0$. (β) Υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\frac{\int_a^\xi f(t) dt}{\int_\xi^b g(t) dt} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

Λύση. (α) Έστω ότι για κάποιο $c \in (a, b)$, είχαμε $\int_c^b g(t) dt = 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $Q(x) = \int_c^x g(t) dt$, $x \in [c, b]$. Τότε $Q(c) = Q(b) = 0$ και άρα από το Θεώρημα Rolle θα υπήρχε $\xi \in (c, b)$ και άρα $\xi \in (a, b)$ με $Q'(\xi) = g(\xi) = 0$, άτοπο.

(β) Θεωρούμε την συνάρτηση $H(x) = F(x) \cdot G(x)$ όπου $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ και $G(x) = \int_x^b g(t) dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού οι F και G είναι παραγωγίσιμες με $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Επομένως,

$$H'(x) = (F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x) \int_x^b g(t) dt - g(x) \int_a^x f(t) dt$$

Επιπλέον, $H(a) = H(b) = 0$. Άρα, από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με

$$H'(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) \int_\xi^b g(t) dt = g(\xi) \int_a^\xi f(t) dt = 0 \quad (5)$$

Επειδή $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ από το (α) ερώτημα έχουμε ότι $\int_\xi^b g(t) dt \neq 0$. Άρα διαιρώντας κατά μέλη την (5) με $g(\xi) \int_\xi^b g(t) dt$ παίρνουμε το ζητούμενο.