

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7- ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Δείξτε ότι το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ δεν υπάρχει.

Λύση. Πράγματι, αν $x_n = 2\pi n$ και $x'_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ τότε $\lim x_n = \lim x'_n = +\infty$ ενώ $\lim \sin(x_n) = 0 \neq 1 = \lim \sin(x'_n)$.

Άσκηση 2. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ δείξτε ότι η f είναι επί. Ομοίως αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

(β) Δείξτε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Λύση. (α) Έστω ότι υπήρχε $y_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq y_0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε λόγω συνέχειας της f από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών θα είχαμε ότι είτε (1) $f(x) < y_0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, είτε (2) $f(x) > y_0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Αν συμβαίνει το (1) σημαίνει ότι η f είναι άνω φραγμένη και άρα δεν μπορεί να ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Ομοίως αν ισχύει το (2) σημαίνει ότι η f είναι κάτω φραγμένη και συνεπώς δεν μπορεί να ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Άρα και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$, δηλαδή η f είναι επί.

(β) Έστω $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ με n περιττό. Έστω $a_n > 0$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n) = +\infty$$

και αντίστοιχα

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$$

Συνεπώς η $p(x)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του ερωτήματος (α) και άρα είναι επί. Ειδικότερα, υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $p(x_0) = 0$.

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Δείξτε ότι η f λαμβάνει μέγιστη τιμή.

Λύση. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) \neq 0$ και έστω $N = |f(x_0)|$ (υπάρχει τέτοιο σημείο, διαφορετικά $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ που σημαίνει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, άτοπο). Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ τέτοια ώστε

$$f(x) < -N, \quad \forall x \in (-\infty, -M_1) \cup (M_2, +\infty) \quad (1)$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-M_1, M_2]$, υπάρχει $\xi \in [-M_1, M_2]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) \geq f(x), \quad \forall x \in [-M_1, M_2] \quad (2)$$

Από την (1) και επειδή $N = |f(x_0)|$ έχουμε ότι $x_0 \in [M_1, M_2]$ (διαφορετικά $f(x_0) < |f(x_0)|$ άτοπο). Συνεπώς $f(\xi) \geq f(x_0) \geq -N$ και άρα

$$f(\xi) \geq f(x), \quad \forall x \in (-\infty, -M_1) \cup (M_2, +\infty) \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) έπεται ότι $f(\xi) \geq f(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f έχει μέγιστο στο $\xi \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Ισχύει το αντίστροφο?

Λύση. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι η f είναι 1-1. (Πράγματι, έστω $x_1 \neq x_2$. Τότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ξ μεταξύ των x_1, x_2 με $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi)$ και άρα, αφού $f'(\xi) \neq 0$ έπεται ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$). Άρα η f είναι ορισμένη σε διάστημα, είναι συνεχής και 1-1 και συνεπώς από γνωστό θεώρημα η f είναι γνησίως μονότονη.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πχ. η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως μονότονη αλλά $f'(0) = 0$.

Άσκηση 5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $(x - \delta, x + \delta)$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Λύση. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίο και έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Συνεπώς $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και άρα $f'(x_0) = 0$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι σταθερή.

Άσκηση 6. (Η συνάρτηση τόξο εφαπτομένης) Έστω $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \tan x$. Δείξτε τα εξής:

(α) $f'(x) = f^2(x) + 1$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. (β) Η f είναι γνησίως αύξουσα και επί. (γ) Η αντίστροφη $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι παραγωγίσιμη με $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Σημείωση: Η $f^{-1}(x)$ συμβολίζεται με $\tan^{-1}(x)$ ή $\arctan x$).

Λύση. (α) Έστω $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Έχουμε $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1 = f^2(x) + 1$.

(β) Επειδή $f'(x) = f^2(x) + 1 > 0$ έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$. Άρα η f λαμβάνει απεριόριστα μεγάλες κατά μέτρο θετικές και αρνητικές τιμές. Άρα για κάθε $y \in \mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε $f(x_1) < 0$ και $f(x_2) > 0$ με $f(x_1) < y < f(x_2)$. Επειδή η f είναι συνεχής, από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών υπάρχει x μεταξύ των x_1 και x_2 με $f(x) = y$. (γ) Από το Θεώρημα της Παραγώγου Αντίστροφης συνάρτησης, επειδή η $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 1 + f^2(x) \neq 0$ η $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι και αυτή παραγωγίσιμη. Ειδικότερα για κάθε $y = f(x)$ ισχύει

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f^2(x) + 1} = \frac{1}{y^2 + 1}$$

Αλλάζοντας την μεταβλητή από y σε x παίρνουμε τον τύπο

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 7. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ υπάρχει δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Λύση. Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Λόγω συνέχειας της f στο x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ και άρα το παραπάνω όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$. Αφού το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ υπάρχει, από τον Κανόνα de l'Hospital παίρνουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

Άσκηση 8. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ υπάρχουν, δείξτε ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ υπάρχει και $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$ και άρα η f είναι συνεχής στο x_0 .

Λύση. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ και άρα

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad (4)$$

Επειδή η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0^+} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} (f(x) - f(x_0)) = 0$ και άρα τα παραπάνω πλευρικά όρια είναι απροσδιοριστίες της μορφής $\frac{0}{0}$. Άρα, αν υποθέσουμε ότι τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ υπάρχουν, από κανόνα de l'Hospital, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \quad (5)$$

και ομοίως

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \quad (6)$$

Από τις (4)-(6) παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = f'(x_0)$$

δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Άσκηση 9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι (α) η f είναι παραγωγίσιμη και (β) το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ δεν υπάρχει.

Λύση. Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Επίσης για $x = 0$ έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(από Θεώρημα Παρεμβολής, αφού $-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$). Τέλος, για να διαπιστώσουμε ότι το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

δεν υπάρχει, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Μεταφοράς θεωρώντας τις ακολουθίες $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ και $y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi}$. Έχουμε $x_n, y_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'(y_n)$ αφού $f(x_n) = -1$ και $f(y_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 10. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η $f''(x_0)$ υπάρχει. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2f(x_0)}{x^2} = f''(x_0) \quad (7)$$

Λύση. Λόγω συνέχειας της f το όριο στην (7) είναι απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζοντας τον Κανόνα Hospital έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2f(x_0)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2f(x_0)]'}{(x^2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + x) - f'(x_0 - x)}{2x}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + x) - f'(x_0 - x)}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + x) - f'(x_0) + f'(x_0) - f'(x_0 - x)}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + x) - f'(x_0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0) - f'(x_0 - x)}{-x} \right) \\ &= \frac{1}{2} (f''(x_0) + f''(x_0)) = f''(x_0)\end{aligned}$$

Άσκηση 11. (Θεώρημα Darboux για παραγώγους) Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f' έχει την ιδιότητα των Ενδιάμεσων Τιμών.

Λύση. Έστω $a < b$ στο I με $f'(a) < f'(b)$ (αν $f'(a) > f'(b)$ θεωρούμε την $-f$). Θα δείξουμε ότι για κάθε $\lambda \in (f'(a), f'(b))$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $f'(\xi) = \lambda$. Ορίζουμε $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $g(x) = f(x) - \lambda x$. Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = f'(x) - \lambda$ για κάθε $x \in [a, b]$. Έχουμε $g'(a) < 0 < g'(b)$ και αρκεί να βρούμε $\xi \in (a, b)$ με $g'(\xi) = 0$.

Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Τότε από το Θεώρημα Rolle έπεται ότι η g είναι 1-1 και άρα ως συνεχής σε διάστημα του $\mathbb{R}$ είτε είναι γνησίως αύξουσα είτε είναι γνησίως φθίνουσα. Αν ήταν γνησίως αύξουσα τότε για κάθε $x \in (a, b)$ θα είχαμε $g(a) < g(x)$ και άρα

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow g'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \geq 0$$

άτοπο. Αντίστοιχα αν η g ήταν γνησίως φθίνουσα τότε για κάθε $x \in (a, b)$, θα είχαμε $g(x) > g(b)$ και άρα

$$\frac{g(x) - g(b)}{x - b} < 0 \Rightarrow g'(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} \leq 0$$

και πάλι άτοπο.

Άσκηση 12. (Αντίστροφο Θεώρημα Μέσης Τιμής) Έστω I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ και έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $\xi \in I$ με το $f'(\xi)$ εσωτερικό σημείο του $J = f'(I)$ (από την Άσκηση 11 το J είναι διάστημα). Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο I τέτοια ώστε $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$. Ισχύει το ίδιο αν το $f'(\xi)$ είναι άκρο του I ;

Λύση. Θέτουμε $\lambda = f'(\xi)$. Από υπόθεση το λ δεν είναι άκρο του J . Άρα θα υπάρχουν $a < b$ στο I με τις τιμές $f'(a)$ και $f'(b)$ εκατέρωθεν του λ . Ας υποθέσουμε ότι $f'(a) < \lambda < f'(b)$ (αν $f'(b) < \lambda < f'(a)$ η απόδειξη είναι όμοια).

Ορίζουμε $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - \lambda x$, για κάθε $x \in [a, b]$. Παρατηρούμε ότι για $x_1 \neq x_2$ στο I ,

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lambda$$

και άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο $[a, b]$ με $g(x_1) = g(x_2)$.

Η g ως συνεχής στο $[a, b]$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο $c \in [a, b]$. Αφού $g'(a) < 0 < g'(b)$ έπεται ότι $c \neq a, b$ (πράγματι, επειδή $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $a < x < a + \delta$ να ισχύει

$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0 \Rightarrow g(x) < g(a)$ και άρα $c \neq a$. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι $c \neq b$. Άρα η ελάχιστη τιμή

της g λαμβάνεται σε ένα $c \in (a, b)$. Έστω $\eta = \frac{g(c) + m}{2}$, όπου $m = \min\{g(a), g(b)\}$. Τότε $g(c) < \eta < g(a)$ και άρα από Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών υπάρχει $x_1 \in (a, c)$ με $g(x_1) = \eta$. Ομοίως $g(c) < \eta < g(b)$ και άρα υπάρχει $x_2 \in (c, b)$ με $g(x_2) = \eta$. Άρα υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο (a, b) με $g(x_1) = g(x_2)$.

Δεν ισχύει το ίδιο αν το $f'(\xi)$ είναι άκρο του $J = f'(I)$. Πχ. αν $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x) = 3x^2$ και $f'(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$. Για $\xi = 0$ δεν υπάρχουν $x_1 < x_2$ με $f'(0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Πράγματι, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έπεται ότι $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ για κάθε $x_1 < x_2$ ενώ $f'(0) = 0$.