

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7

Άσκηση 1. Δείξτε ότι το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 2. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτησης. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ δείξτε ότι η f είναι επί. Ομοίως αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

(β) Δείξτε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτησης με $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Δείξτε ότι η f λαμβάνει μέγιστη τιμή.

Άσκηση 4. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Ισχύει το αντίστροφο?

Άσκηση 5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $(x - \delta, x + \delta)$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Άσκηση 6. Έστω $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \tan x$. Δείξτε τα εξής: (α) $f'(x) = 1 + f^2(x)$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (β) Η f είναι γνησίως αύξουσα και επί. (γ) Η αντίστροφη $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι παραγωγίσιμη με $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 7. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ υπάρχει δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Άσκηση 8. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ υπάρχουν, δείξτε ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ υπάρχει και $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$ και άρα η f είναι συνεχής στο x_0 .

Άσκηση 9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι (α) η f είναι παραγωγίσιμη και (β) το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 10. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η $f''(x_0)$ υπάρχει. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2f(x_0)}{x^2} = f''(x_0) \quad (1)$$

Άσκηση 11. (Θεώρημα Darboux για παραγώγους) Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f' έχει την ιδιότητα των Ενδιάμεσων Τιμών και άρα το $f'(I)$ είναι διάστημα του $\mathbb{R}$.

Άσκηση 12. (Αντίστροφο Θεώρημα Μέσης Τιμής) Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $\xi \in I$ με το $f'(\xi)$ εσωτερικό σημείο του $J = f'(I)$ (θυμίζουμε ότι από την Άσκηση 11 το J είναι διάστημα). Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο I με $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοια ώστε $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$. Ισχύει το ίδιο αν το $f'(\xi)$ είναι άκρο του I ;