

Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2024–25)

Ασκήσεις – Φυλλάδιο 4

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 10 Ιανουαρίου 2025)

1. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής:

(α) Αν το E είναι κλειστό υποσύνολο του $[0, 1]$ τότε η $\chi_E : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) Υπάρχει ακολουθία μη αρνητικών Borel μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\int_0^1 f_n d\lambda \rightarrow 0$ και $\sup\{f_k(x) : k \geq n\} = +\infty$ για κάθε $n \geq 1$ και κάθε $x \in [0, 1]$.

2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι το μέτρο μ είναι σ -πεπερασμένο.

3. Έστω $E \subset \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) < \infty$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx) < \infty$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(xt^2) d\lambda(t).$$

Αποδείξτε ότι η g είναι καλά ορισμένη και συνεχής.

5. Έστω $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{(1-x)^n \cos \frac{n}{x}}{\sqrt{x}}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n d\lambda = 0$.

6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι: Αν (E_n) είναι μια ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} g d\mu = 0$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$.

7. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E ώστε $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ και $0 \leq \lambda(E_n) \leq 2$ για κάθε $n \geq 0$.

(β) Υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$.

8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας σ -πεπερασμένος χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, για κάθε $p > 0$,

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_0^{\infty} pt^{p-1} \mu(\{x : |f(x)| > t\}) d\lambda(t).$$

[Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση $f = \chi_E$, $E \in \mathcal{A}$.]

9. Έστω $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\int_{\mathbb{R}} f_n f_m d\lambda = 0$ για κάθε $m \neq n$ και $\int_{\mathbb{R}} f_n^2 d\lambda = 1$ για κάθε n .

(α) Αποδείξτε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και κάθε $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\left\| \sum_{n=1}^N c_n f_n \right\|_2^2 = \sum_{n=1}^N c_n^2.$$

(β) Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_n$ συγκλίνει στον $L^2(\mathbb{R})$.

10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου, $\alpha > 0$, $0 < r < p$ και $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συναρτήσεων $f_n \in L^p(\mu)$ με $\|f_n\|_p \leq \alpha$ για κάθε n και $f_n(x) \rightarrow f(x)$ σχεδόν παντού. Αποδείξτε ότι $\|f_n - f\|_r \rightarrow 0$.

Ισχύει το ίδιο αν $\mu(X) = \infty$ ή $r = p$;