ΠΡΟΟΔΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι
05 /12/2024

Άσκηση 1. (**0.5 x 6=3 μον**) Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι σωστές και ποιές λάθος δικαιολογώντας την απάντησή σας.

1. Αν (a_n) ακολουθία τέτοια ώστε $n \leq a_n \leq 2n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.
2. Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) > 0$. Αν $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ τότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
3. Αν (a_n) συγκλίνουσα ακολουθία τότε $\lim\left(a_n^2 - a_{2n}a_{2n+1}\right) = 0$.
4. Υπάρχει $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε το $f([0,1])$ είναι ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$.
5. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής μη σταθερή τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) \in \mathbb{Q}$.
6. Έστω I, J διαστήματα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to J$ γνησιώς αύξουσα με $f(I) = J$. Τότε και η f και η f^{-1} είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Άσκηση 2. Έστω η ακολουθία $a_n = \frac{n!}{n^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) (**1 μον.**) Υπολογίστε τον λόγο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και βρείτε το $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(β) (**1 μον.**) Δείξτε ότι η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα και εξηγείστε γιατί είναι συγκλίνουσα.

(γ) (**1 μον.**) Δείξτε ότι $\lim a_n = 0$.

Άσκηση 3. Έστω X μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(α) (**1 μον.**) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to \sup X$.

(β) (**1 μον.**) Έστω M άνω φράγμα του X. Αν υπάρχει (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \to M$ δείξτε ότι $M = \sup X$.

(γ) (**1 μον.**) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και αύξουσα. Δείξτε ότι $\sup f(X) = f(\sup X)$. (Υπόδειξη: Έστω $M = f(\sup X)$. Δείξτε ότι (α) το M είναι άνω φράγμα του συνόλου $f(X)$ και (β) υπάρχει ακολουθία (x_n) στο X με $f(x_n) \to M$).

Άσκηση 4. Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$ και $f : [a,b] \to [a,b]$ γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(a) = a$ και $f(b) = b$. Υποθέτουμε επίσης ότι $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in (a,b)$.

(α) (**1 μον.**) Δείξτε ότι ακριβώς ένα από τα επόμενα ισχύει.

- (I) $f(x) < x$ για όλα τα $x \in (a,b)$.
- (II) $f(x) > x$ για όλα τα $x \in (a,b)$.

(β) Υποθέτουμε ότι ισχύει το (I). Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο $x_1 \in (a,b)$ και έστω (x_n) η ακολουθία που παράγεται από το x_1 μέσω της σχέσης $x_{n+1} = f(x_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- (β1) (**1 μον.**) Δείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα.
- (β2) (**1 μον.**) Βρείτε το $\lim x_n$.