Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση
Μια Εισαγωγή

Νίκος Λαμπρόπουλος

17 Δεκεμβρίου 2024

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μετρικοί Χώροι

Όπως έχουμε αναφέρει οι βασικές έννοιες και τα βασικά αποτελέσματα της Μαθηματικής Ανάλυσης θεωρούνται γνωστά. Ωστόσο, σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τους μετρικούς χώρους αφενός για να δώσουμε μια διαισθητική άποψη για την υφή τους και για το ρόλο τους και αφετέρου γιατί είναι απαραίτητοι για τη μελέτη των χώρων Banach και των χώρων Hilbert. Οι μετρικοί χώροι είναι θεμελιώδεις στην Συναρτησιακή Ανάλυση επειδή παίζουν ένα ρόλο παρόμοιο με εκείνο που παίζει η πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ στη Μαθηματική Ανάλυση. Στην πραγματικότητα γενικεύουν την πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ και παρέχουν μια βάση για μια ενοποιημένη αντιμετώπιση σημαντικών προβλημάτων διαφόρων κλάδων της Ανάλυσης. Στην Ανάλυση μελετάμε συναρτήσεις ορισμένες στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ καθώς και προβλήματα που επιλύονται με βασικό εργαλείο τις πραγματικές συναρτήσεις. Επίσης, οι οριακές διαδικασίες σε αυτή την περίπτωση βασίζονται στην ύπαρξη μιας συνάρτησης απόστασης d που συνδέει κάθε ζεύγος σημείων $x, y \in \mathbb{R}$ με την απόστασή τους $d(x, y) = |x - y|$. Στη Συναρτησιακή Ανάλυση αντικαθιστούμε την ευθεία με ένα συνήθως πιο αφηρημένο σύνολο X, του οποίου πιθανόν η φύση των στοιχείων να μην έχει καν καθοριστεί, και την έννοια της απόστασης εισάγοντας την έννοια της μετρικής η οποία έχει μόνο μερικές από τις βασικές ιδιότητες της συνάρτησης απόστασης στην ευθεία. Ωστόσο, το σύνολο των ιδιοτήτων της παραμένει αρκετά επαρκές ώστε να διατυπώσουμε αξιώματα, να ορίσουμε οριακές διαδικασίες και στη συνέχεια να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε τα κατάλληλα θεωρήματα για την επίλυση πρακτικών και όχι μόνο προβλημάτων. Για αυτό τον τελευταίο σκοπό στη Συναρτησιακή Ανάλυση θα μελετήσουμε χώρους περισσότερο γενικούς από τους μετρικούς και *συναρτήσεις* ορισμένες σε αυτούς. Στην συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό ενός μετρικού χώρου και των σχετικών εννοιών καθώς και μερικά τυπικά παραδείγματα μετρικών χώρων. Χώροι με πρακτικό ενδιαφέρον παρουσιάζονται λεπτομερέστερα. Πρώτα όμως θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στους διανυσματικούς χώρους (ή γραμμικούς) από την πλευρά της Συναρτησιακής Ανάλυσης.

1.1 Γραμμικοί Χώροι

Γνωρίζουμε ότι οι διανυσματικοί χώροι παίζουν σημαντικό ρόλο σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών και στις εφαρμογές τους και η γενική θεωρία η σχετική με αυτούς είναι γνωστή. Υπενθυμίζουμε, ωστόσο, ότι:

Ορισμός 1.1.1. Ένας **διανυσματικός** χώρος είναι ένα σύνολο X, του οποίου τα στοιχεία λέγονται **διανύσματα**, εφοδιασμένο με δύο πράξεις που συνήθως τις συμβολίζουμε $(+)$ και $(\cdot)$ τέτοιες ώστε η πρώτη να είναι μια απεικόνιση $+ : X \times X \to X$, (δηλαδή, μια εσωτερική πράξη), και η δεύτερη είναι μια απεικόνιση $\cdot : \mathrm{K} \times X \to X$, (δηλαδή, μια εξωτερική πράξη), με τις ιδιότητες:

(i) Το ζεύγος $(X, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.

(ii) Για την εξωτερική πράξη ισχύουν τα εξής:

- (a) Για κάθε $a \in K$ και κάθε $x, y \in X$, $a(x + y) = ax + ay$.
- (b) Για κάθε $a, b \in K$ και κάθε $x \in X$, $(a + b)x = ax + bx$.
- (c) Για κάθε $a, b \in K$ και κάθε $x \in X$, $a(bx)x = (ab)x$.
- (d) Για κάθε $x \in X$, $1 \cdot x = x$, όπου 1 είναι το μοναδιαίο του πολλαπλασιασμού στο σώμα Κ. □

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου μπορεί να είναι όντως διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$, στον $\mathbb{R}^3$ ή στον $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, γενικότερα, όμως μπορεί να είναι και κάτι άλλο, όπως για παράδειγμα, ακολουθίες αριθμών, συναρτήσεις, κτλ. Σε όλες τις περιπτώσεις το άθροισμα δύο στοιχείων του χώρου είναι στοιχείο του χώρου καθώς και το γινόμενο κάθε στοιχείου με μια σταθερά (ένα αριθμό για παράδειγμα), επίσης είναι στοιχείο του χώρου. Στην γενική περίπτωση η σταθερά που προαναφέραμε είναι στοιχείο ενός <γενικού> σώματος Κ καθώς επίσης η πρόσθεση μεταξύ των στοιχείων του διανυσματικού χώρου καθώς και ο πολλαπλασιασμός ενός στοιχείου με ένα στοιχείο του Κ ικανοποιούν ένα σύνολο γνωστών ιδιοτήτων. Στη Συναρτησιακή Ανάλυση το Κ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Το Κ λέγεται **βαθμωτό πεδίο** του διανυσματικού χώρου X και τα στοιχεία του λέγεται **βαθμωτά**. Σε αυτή την τελευταία περίπτωση όπου το K είναι το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$ και δεδομένου ότι οι ιδιότητες των πράξεων $(+)$ και $(\cdot)$ παραμένουν οι ίδιες (οι γνωστές) λέμε απλά ο γραμμικός χώρος X και μπορούμε για αυτόν να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.1.2. Ένας **γραμμικός χώρος** (ή **διανυσματικός χώρος**) X πάνω στο $\mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{C}$) είναι ένα μη κενό σύνολο του οποίου τα στοιχεία λέγονται **διανύσματα** ή **σημεία**, εφοδιασμένο με δύο πράξεις $(+)$ και $(\cdot)$ με τις ακόλουθες δύο ιδιότητες: Για κάθε $x, y \in X$ και κάθε $a \in K$, (K $=\mathbb{R}$ ή K $=\mathbb{C}$),

(ii) $(x+y) \in X$.

(ii) $(ax) \in X$.

Η πράξη $(+)$ λέγεται **διανυσματική** πρόσθεση και η πράξη $(\cdot)$ λέγεται **βαθμωτός** πολλαπλασιασμός. $\square$

Ορισμός 1.1.3. Ένας **υπόχωρος** ενός γραμμικού χώρου X είναι ένα μη κενό υποσύνολο W του X τέτοιο ώστε για κάθε $w_1, w_2 \in W$ και για όλα τα βαθμωτά a, b έχουμε $(aw_1 + bw_2) \in W$. Οι πράξεις $(+)$ και $(\cdot)$ είναι οι επαγόμενες από τις αντίστοιχες του γραμμικού χώρου X, δηλαδή, οι πράξεις που προκύπτουν από τον περιορισμό εκείνων του X στον W. $\square$

Παράδειγμα 1.1.1. Ο $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ με τις πράξεις $(+)$ και $(\cdot)$, όπου για κάθε $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$, έχουμε

(i) $x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$.

(ii) $ax = (ax_1, \cdots, ax_n)$,

είναι ένας πραγματικός γραμμικός χώρος.

Ο $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$ εφοδιασμένος με τις ίδιες πράξεις $(+)$ και $(\cdot)$ όπως στο Παράδειγμα 1.1.1 είναι επίσης ένας μιγαδικός γραμμικός χώρος.

Παράδειγμα 1.1.2. Το σύνολο s^* όλων των ακολουθιών $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ για τις οποίες υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο $x_i = 0$ για όλα τα $i > N$, εφοδιασμένο με τις πράξεις τις $(+)$ και $(\cdot)$, όπου για κάθε $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots,\}$, $\{y_n\} = \{y_1, y_n, \cdots\} \in s^*$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$), έχουμε

(i) $\{x_n + y_n\} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots\}$.

(ii) $a\{x_n\} = \{ax_1, ax_2, \cdots\}$, αποτελεί γραμμικό χώρο.

Γραμμικούς χώρους αποτελούν και τα παρακάτω σύνολα πραγματικών (ή μιγαδικών) ακολουθιών εφοδιασμένα με τις ίδιες πράξεις $(+)$ και $(\cdot)$.

- Το σύνολο c_0 όλων των μηδενικών ακολουθιών.
- Το σύνολο c όλων των συγκλινουσών ακολουθιών.
- Το σύνολο ℓ^∞ όλων των φραγμένων ακολουθιών.
- Το σύνολο s όλων των φραγμένων και μη φραγμένων ακολουθιών.

Πρόταση 1.1.1. Για τους γραμμικούς χώρους s^*, c_0, c, ℓ^∞ και s ισχύει η σχέση

$$s^* \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty \subseteq s.$$

Απόδειξη. (Άσκηση).

Παράδειγμα 1.1.3. Το σύνολο ℓ^p, $1 \leq p < \infty$ όλων των πραγματικών (μιγαδικών) ακολουθιών $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ με $\sum\limits_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty$ και πράξεις τις $(+)$ και $(\cdot)$, όπου για κάθε $x = (x_1, x_2, ...,)$, $y = (y_1, y_n, ...) \in \ell^p$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$),

(i) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...)$.

(ii) $ax = (ax_1, ax_2, ...)$,

είναι ένας πραγματικός (ή μιγαδικός) γραμμικός χώρος.

Απόδειξη. Αν $x, y \in \ell^p$, τότε από την ανισότητα του Minkowski προκύπτει ότι $(x + y) \in \ell^p$.
Επίσης, αν $x \in \ell^p$ και αν $a \in \mathbb{R}$, τότε $(ax) \in \ell^p$.

Παράδειγμα 1.1.4. Ο $C[a, b]$ εφοδιασμένος με τις πράξεις $(+)$ και $(\cdot)$, όπου για κάθε f, $g \in C[a, b]$, $a \in \mathbb{R}$, και $x \in [a, b]$, έχουμε:

(i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ και

(ii) $(af)(x) = af(x)$,

είναι ένας πραγματικός γραμμικός χώρος.
Απόδειξη. (Άσκηση).

Θεώρημα 1.1.1. Αν θεωρήσουμε τους γραμμικούς χώρους $X_1, X_2, \cdots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$ πάνω στο ίδιο σώμα K ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) με πράξεις τις $(+)$ και $(\cdot)$, όπου για κάθε $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots y_n)$, και για κάθε $\kappa \in K$,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots x_n + y_n),\ \kappa x = (\kappa x_1, \kappa x_2, \cdots \kappa x_n),$$

τότε, το κατεσιανό γινόμενο $X = X_1 \times X_2 \times \cdots X_n$ είναι γραμμικός χώρος.
Απόδειξη. (Άσκηση).

Ενδιαφέροντες γραμμικοί χώροι είναι οι ακόλουθοι χώροι συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ και εφοδιάζονται με τις ίδιες πράξεις $(+)$ και $(\cdot)$, όπως παραπάνω).

- Ο χώρος $\mathrm{B}(\Omega)$, των φραγμένων συναρτήσεων.
- Ο χώρος $C(\Omega)$ των συνεχών συναρτήσεων.
- Ο χώρος $C^k(\Omega)$ των k φορές διαφορίσιμων συναρτήσεων με συνεχή k τάξης παράγωγο στο Ω.
- Ο χώρος $L(\Omega)$ των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο Ω.

1.2 Μετρικοί Χώροι - Ορισμοί - Παραδείγματα

Ορισμός 1.2.1. Μετρικός χώρος λέγεται το ζευγάρι (X, d) όπου X είναι ένα σύνολο και d είναι μία απόσταση στον X, δηλαδή μια συνάρτηση του $X \times X$ στο $[0, +\infty)$ τέτοια ώστε για κάθε $x,\ y,\ z \in X$ έχουμε:

(i) $d(x, y) = 0$ τότε και μόνο τότε όταν $x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (*Αντιμεταθετικότητα*).

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*Τριγωνική ανισότητα*).

Η συνάρτηση d λέγεται συνάρτηση **απόσταση** ή **μετρική** και η τιμή της σε κάθε ζεύγος σημείων x, y του χώρου X ισούται με την απόσταση των σημείων x και y.
$\square$

Αν σε ένα σύνολο X ορίσουμε δυο διαφορετικές μετρικές παίρνουμε δυο διαφορετικούς μετρικούς χώρους, ωστόσο, αντί για (X, d) μπορούμε απλά να γράφουμε X αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.

Ορισμός 1.2.2. Ο γραμμικός χώρος $(U,\tilde{d})$ λέγεται **υπόχωρος** του γραμμικού χώρου (X,d) αν το U είναι υποσύνολο του X και $\tilde{d}=d|_{U\times U}$, δηλαδή, η μετρική $\tilde{d}$ είναι ο περιορισμός της μετρικής d στο $U\times U$.
Η $\tilde{d}$ λέγεται **επαγόμενη μετρική** στο U από την d. □

Παρατήρηση 1.2.1. Από τον ορισμό του υπόχωρου ενός μετρικού χώρου φαίνεται ότι υπάρχει σαφής διάκρισή του από τον γνωστό μας (από την Άλγεβρα) υπόχωρο ενός διανυσματικού χώρου.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν αποτελούν κάποια από τα πλέον βασικά παραδείγματα μετρικών χώρων κάτι που δεν είναι πολύ δύσκολο να αποδειχτεί, και γιαυτό το λόγο οι αποδείξεις παραλείπονται.

Παράδειγμα 1.2.1. Ο χώρος (X,d) όπου X είναι ένα μη κενό σύνολο και d η συνάρτηση από το $X\times X$ στο $\mathbb{R}$ με

$$d(x,y)=\begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & x\neq y \end{cases},\ \forall\ x,y\in X$$

είναι ένας μετρικός χώρος.
Ο (X,d) λέγεται **διακριτός** ή **τετριμμένος** μετρικός χώρος και η μετρική d λέγεται **διακριτή** ή **τετριμμένη** στο X.

Σημείωση 1.2.1. Η διακριτή μετρική σε ένα χώρο X προφανώς δεν είναι η καταλληλότερη για τη μέτρηση αποστάσεων μεταξύ σημείων του χώρου, όμως είναι πολύ χρήσιμη για την επεξήγηση των ορισμών και την παροχή αντιπαραδειγμάτων.

Παράδειγμα 1.2.2. (**Η πραγματική ευθεία** $\mathbb{R}$). Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τη μετρική $e:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$e(x,y)=|x-y|,\ \forall\ x,y\in\mathbb{R},$$

όπου με $|x|$ συμβολίζουμε την απόλυτη τιμή του $x\in\mathbb{R}$ είναι ένας μετρικός χώρος.
Η μετρική e λέγεται **ευκλείδεια** ή **συνήθης** μετρική στην $\mathbb{R}$.
Αντίστοιχα, ο χώρος $(\mathbb{C},\varepsilon)$, όπου $\mathbb{C}$ είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών και η συνάρτηση $\varepsilon:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon(x,y)=|x-y|,\ \forall\ x,y\in\mathbb{C},$$

όπου εδώ με $|x|$ συμβολίζουμε το μέτρο του $x\in\mathbb{C}$, είναι ένας μετρικός χώρος.
Η μετρική ε λέγεται **συνήθης** μετρική στο $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 1.2.3. Οι συναρτήσεις d_1, d_2 και d_∞ του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ στο $\mathbb{R}$, όπου γιά κάθε $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$d_1(x, y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|,$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

και

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_j - y_j|, j = 1, 2, ..., n\},$$

αντίστοιχα, είναι μετρικές στο $\mathbb{R}^n$, οπότε οι $(\mathbb{R}^n, d_1)$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ και $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ είναι μετρικοί χώροι.

Παρατήρηση 1.2.2. Η d_2 λέγεται **ευκλείδεια** ή **συνήθης** μετρική στο $\mathbb{R}^n$.

Για $n = 2$ οι συναρτήσεις d_1, d_2 και d_∞ παίρνουν αντίστοιχα τη μορφή

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,\ x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},\ x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),$$

και

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},\ x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2).$$

Ο μετρικός χώρος $\mathbb{R}^2$ λέγεται **Ευκλείδειο επίπεδο** ή απλά επίπεδο και ο $\mathbb{R}^3$ λέγεται **τρισδιάστατος Ευκλείδειος χώρος** ή απλά χώρος.

Παρατήρηση 1.2.3. Οι μοναδιαίες μπάλες $\mathrm{B}(0, x) = \{d(x, 0) \leq 1,\ x \in \mathbb{R}^2\}$ στο επίπεδο για τις μετρικές d_1, d_2 και d_∞ είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ και $(0, -1)$, ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο την αρχή, και το τετράγωνο με με κορυφές τα σημεία $(1/2, 1/2)$, $(-1/2, 1/2)$, $(-1/2, -1/2)$ και $(1/2, -1/2)$, αντίστοιχα. Επομένως, ακόμα και στους ευκλείδειους χώρους οι μοναδιαίες μπάλες δεν είναι αναγκαστικά μπάλες με την διαισθητική έννοια της λέξης, δεν μοιάζουν καν με μπάλες. Θα συναντάμε συχνά τέτοια 'παράδοξα' στη συνέχεια και ιδιαίτερα όταν μελετάμε γενικούς αφηρημένους χώρους.

Ορισμός 1.2.3. ℓ^p, $1 \leq p < \infty$ είναι ο χώρος των ακολουθιών πραγματικών (ή μιγαδικών) αριθμών $a = (a_1, a_2, ...)$ για τις οποίες $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$. □

Σημείωση 1.2.2. Μπορούμε να φανταζόμαστε τα στοιχεία του ℓ^p σαν διανύσματα με άπειρο πλήθος συνιστωσών αλλά με πεπερασμένο μήκος (αν υποθέσουμε ότι το $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\right)^{1/p}$ μας δίνει το *μήκος* ενός τέτοιου *διανύσματος*). Παρατηρήστε ότι για $p = 2$ έχουμε μια απειροδιάσταστατη γενίκευση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος. Θα επανέλθουμε σε αυτούς τους χώρους καθώς και στον ℓ^∞ (βλ. Ορισμός 1.2.4 παρακάτω) σε επόμενα κεφάλαια.

Παράδειγμα 1.2.4. Για $1 \leq p < \infty$, ορίζουμε τη συνάρτηση d_p του $\ell^p \times \ell^p$ στο $\mathbb{R}$, όπου για κάθε $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$,

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p \right)^{1/p}.$$

Ο (ℓ^p, d_p) είναι μετρικός χώρος.
Απόδειξη. (Άσκηση).

Ορισμός 1.2.4. ℓ^∞ είναι ο χώρος των φραγμένων ακολουθιών πραγματικών (ή μιγαδικών) αριθμών. Δηλαδή, κάθε στοιχείο του ℓ^∞ είναι μία ακολουθία $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ τέτοια ώστε για όλα τα $j = 1, 2, ...$ ισχύει $|\xi_j| \leq c_x$, όπου c_x είναι ένας πραγματικός αριθμός που εξαρτάται από το x, αλλά δεν εξαρτάται από το j. □

Παράδειγμα 1.2.5. Ορίζουμε τη συνάρτηση d_∞ του $\ell^\infty \times \ell^\infty$ στο $\mathbb{R}$, όπου για κάθε $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty$,

$$d_\infty(x, y) = \sup\{|\xi_i - \eta_i| : i \in \mathbb{N}\}.$$

Ο (ℓ^∞, d_∞) είναι μετρικός χώρος.
Απόδειξη. (Άσκηση).

Οι χώροι ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$, λέγονται **ακολουθιακοί** μετρικοί χώροι γιατί κάθε «σημείο» τους είναι μια ακολουθία και δίνουν μια πρώτη εντύπωση για το πόσο εκπληκτικά γενική είναι η έννοια του μετρικού χώρου και για το πόσο μεγάλοι είναι αυτοί οι χώροι.

Παράδειγμα 1.2.6. Οι συναρτήσεις d_1, d_2 και d_∞ του $C[a, b] \times C[a, b]$ στο $\mathbb{R}$ με

$$d_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt, \ \forall \ x, y \in C[a, b],$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt}, \ \forall \ x, y \in C[a, b],$$

και

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x(t) - y(t)| : t \in [a, b]\},$$

αντίστοιχα, είναι μετρικές στο $C[a, b]$ και επομένως οι χώροι $(C[a, b], d_1)$, $(C[a, b], d_2)$, και $(C[a, b], d_\infty)$, είναι μετρικοί χώροι.
Με όμοιο τρόπο ορίζονται αντίστοιχες μετρικές από το $C[a, b] \times C[a, b]$ στο $\mathbb{C}$.

Οι χώροι $(C[a, b], d_1)$, $(C[a, b], d_2)$, και $(C[a, b], d_\infty)$ (καθώς και πολλοί άλλοι τέτοιοι χώροι) λέγονται **συναρτησιακοί** μετρικοί χώροι γιατί κάθε «σημείο» τους είναι μια συνάρτηση. Οι χώροι αυτοί μας δίνουν τη δυνατότητα να καταλάβουμε τη μεγάλη διαφορά μεταξύ της ανάλυσης όπου συνήθως θεωρούμε μια ή και μερικές συναρτήσεις και της παρούσας προσέγγισης όπου μια συνάρτηση είναι απλά ένα σημείο σε ένα μεγαλο χώρο.

Από τα παραπάνω παραδείγματα καθίσταται προφανής η διαφορά του ρόλου μιας συνάρτησης ή μιας ακολουθίας στην ανάλυση και στην συναρτησιακή ανάλυση. Στην μεν πρώτη θεωρούμε συναρτήσεις ή ακολουθίες ενώ στη δεύτερη θεωρούμε τεράστιους χώρους όπου οι συναρτήσεις ή οι ακολουθίες είναι, απλά, σημεία τους.

1.3 Τοπολογία των Μετρικών Χώρων

Πριν ορίσουμε την οικογένεια των ανοικτών συνόλων ενός μετρικού χώρου (X, d) θα δώσουμε τους ορισμούς μερικών βασικών εννοιών. Ο αριθμός των εννοιών που παίζουν σημαντικό ρόλο στους μετρικούς χώρους είναι αρκετά μεγάλος, ωστόσο, πολλές από αυτές γίνονται πολύ οικείες όταν εφαρμοστούν στον Ευκλείδειο χώρο και αυτό το γεγονός δίνει ένα μεγάλο πλεονέκτημα στη συγκεκριμένη ορολογία που στην πραγματικότητα εμπνέεται από τη κλασική γεωμετρία.

Αρχικά θα ορίσουμε μερικά ενδιαφέροντα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, d), τις μπάλες και τη σφαίρα.

Ορισμός 1.3.1. Έστω ένας μετρικός χώρος X, ένα σημείο του x_0 και ένας πραγματικός αριθμός $r > 0$. Τότε, ορίζουμε τα σύνολα:

- $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ **(Ανοικτή μπάλα)**
- $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$ **(Κλειστή μπάλα)**
- $S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$ **(Σφαίρα)**

Και στις τρείς περιπτώσεις το x_0 λέγεται **κέντρο** και το r **ακτίνα**. □

Παρατήρηση 1.3.1. Το γεγονός ότι στους μετρικούς χώρους η ορολογία είναι ανάλογη με εκείνη των Ευκλείδειων χώρων είναι μεγάλο πλεονέκτημα, ωστόσο χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή γιατί οι περισσότεροι μετρικοί χώροι γενικά δεν συμπεριφέρονται όπως οι Ευκλείδειοι χώροι. Για παράδειγμα, οι μπάλες και οι σφαίρες σε τυχαίους μετρικούς χώρους δεν έχουν ίδιες ιδιότητες με εκείνες των Ευκλείδειων χώρων. Ο διακριτός μετρικός χώρος (βλ. Παράδειγμα 1.2.1) αποτελεί μια επιβεβαίωση των παραπάνω αφού $S(x_0, r) = \emptyset$ αν $r \neq 1$. Τι συμβαίνει όταν είναι $r = 1$;

Μπορούμε, να αποδείξουμε εύκολα ότι το σύνολο $\mathcal{T}$ των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου X (με το τρόπο που τα ορίσαμε παραπάνω) ικανοποιούν τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) του Ορισμού **??**, οπότε το σύνολο $\mathcal{T}$ αποτελεί μια τοπολογία στο χώρο X και επομένως το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος. Επειδή τα ανοικτά υποσύνολα του X που αποτελούν την $\mathcal{T}$ ορίζονται μέσω της μετρικής d η τοπολογία αυτή λέγεται τοπολογία της μετρικής d. Άρα,

Ένας μετρικός χώρος είναι τοπολογικός χώρος.

Ορισμός 1.3.2. Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X, d) λέμε ότι είναι **φραγμένο** αν

$$\sup_{x,y\in A} d(x, y) < +\infty.$$

Ο αριθμός $\delta(\mathrm{A}) = \sup_{x,y\in A} d(x, y)$ λέγεται **διάμετρος** του A.
Όλες οι μπάλες ενός μετρικού χώρου X είναι φραγμένα σύνολα. □

Ορισμός 1.3.3. Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X λέγεται:

(i) **Ανοικτό** αν περιέχει μια μπάλα γύρω από κάθε σημείο του.

(ii) **Κλειστό** αν το συμπλήρωμά του (στο X), δηλαδή το $K^c = X - A$, είναι ανοικτό.

Εξ ορισμού, κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο και κάθε κλειστή μπάλα είναι κλειστό σύνολο. □

Το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί ένα κριτήριο με το οποίο ελέγχουμε αν ένα δοσμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό.

Θεώρημα 1.3.1. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $S \subseteq X$ είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία στο S η οποία έχει συγκλίνει στον X, το όριο ανήκει στο S.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το S είναι κλειστό και ότι η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία του S με όριο το $x_0 \in X$. Τότε, για κάθε $r > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x_n \in B(x_0, r)$. Αλλά, επειδή το $x_n \in S$, έπεται ότι $B(x_0, r) \cap S \neq \emptyset$, οπότε, $x_0 \in \overline{S} = S$.
Υποθέτουμε τώρα ότι το S δεν είναι κλειστό, οπότε το $X\backslash S$ δεν είναι ανοικτό. Άρα, υπάρχει $x_0 \in X\backslash S$ τέτοιο ώστε $B(x_0, r) \cap S \neq \emptyset$ για κάθε $r > 0$. Θέτουμε $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, οπότε, υπάρχουν σημεία $x_n \in B(x_0, \frac{1}{n}) \cap S$. Επομένως, η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο S η οποία συγκλίνει στο $x_0 \notin S$, οπότε η συνθήκη στο θεώρημα δεν ισχύει.

Ορισμός 1.3.4. Μια ανοικτή μπάλα $B(x_0, \varepsilon)$ λέγεται **περιοχή** ή **γειτονιά** του σημείου x_0 με ακτίνα ε και συμβολίζεται με N_ε (ή απλά με N). Πολλές φορές λέγεται και **ε-περιοχή** ή **ε-γειτονιά**. □

Ορισμός 1.3.5. Ένα σημείο x ενός συνόλου $\mathrm{A} \subset X$ λέγεται:

(i) **Εσωτερικό** σημείο του A αν υπάρχει μια γειτονία του N η οποία περιέχεται στο A.

(ii) **Εξωτερικό** σημείο αν είναι εσωτερικό σημείο του A^c. □

Ορισμός 1.3.6. Το σημείο x_0 του X (το οποίο μπορεί να είναι ή να μην είναι σημείο του A) λέγεται **σημείο συσσώρευσης** του A αν κάθε γειτονιά του x_0 περιέχει το λιγότερο ένα σημείο $x \in A$ διαφορετικό από το x_0. □

Ορισμός 1.3.7. Το σύνολο πο αποτελείται από τα σημεία του A και από τα σημεία συσσώρευσης του A λέγεται **κάλυμμα** του A και συμβολίζεται με $\bar{A}$ και είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A. □

Παρατήρηση 1.3.2. Μια ακόμα διαφοροποίηση της συμπεριφοράς της μπάλας ενός γενικού μετρικού χώρου σε σχέση με εκείνη της μπάλας του Ευκλείδειου χώρου είναι η εξής: Ενώ στον Ευκλείδειο χώρο το κάλυμμα $\overline{B(x_0, r)}$ της ανοικτής μπάλας $B(x_0, r)$ είναι η κλειστή μπάλα $\bar{B}(x_0, r)$ δεν ισχύει το ίδιο σε ένα γενικό μετρικό χώρο (βλ. Παράδειγμα 1.3.1).

Παράδειγμα 1.3.1. Έστω ένα σύνολο X με δύο τουλάχιστον στοιχεία εφοδιασμένο με την διακριτή μετρική. Αν $x \in X$, τότε η ανοικτή μοναδιαία μπάλα με κέντρο το x είναι $B(x, 1) = \{x\}$ και είναι ίση με το κάλυμά της $\overline{B(x, 1)} = \{x\}$. Ωστόσο, η κλειστή μοναδιαία μπάλα με κέντρο το x είναι $\mathcal{B}(x, 1) = X$.

Ορισμός 1.3.8. Ένα σημείο $x_0 \in X$ λέγεται **συνοριακό** σημείο ενός συνόλου $A \subset X$ αν κάθε γειτονιά του N περιέχει σημεία που ανήκουν στο A καθώς και σημεία που δεν ανήκουν στο A.
Ένα συνοριακό σημείο ενός συνόλου A μπορεί είναι ή να μην είναι σημείο του.
Το σύνολο των συνοριακών σημείων του A λέγεται **σύνορο** του A και συμβολίζεται με ∂A. □

1.4 Σύγκλιση - Συνέχεια σε Μετρικούς Χώρους

Γνωρίζουμε ότι οι ακολουθίες παίζουν σημαντικό ρόλο στην Ανάλυση καθώς και ότι η μετρική στην ευθεία των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ή στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ εξασφαλίζουν τον ορισμό της σύγκλισης μιας ακολουθίας και κατ' επέκταση του ορίου της. Μπορούμε να αναμένουμε ότι και σε τυχόντα μετρικό χώρο αυτές οι έννοιες, δηλαδή η σύγκλιση και το όριο, ορίζονται ανάλογα δεδομένου ότι η έννοια της απόστασης δυο σημείων του χώρου εισάγεται μέσω της μετρικής του. Επίσης, σημειώνουμε ότι η σχετική ορολογία παραμένει ίδια στο σύνολό της. Επομένως, αντικαθιστώντας την έννοια της απόστασης στο $\mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{C}$) με την έννοια της μετρικής ενός τυχόντα μετρικού χώρου X και την έννοια της περιοχής στο $\mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{C}$) με την έννοια της ανοικτής μπάλας του, μπορούμε να δώσουμε τους βασικούς ορισμούς αλλά και τα βασικά θεωρήματα σε αυτό το γενικότερο θεωρητικό πλαίσιο του τυχόντος μετρικού χώρου X, ωστόσο θα περιοριστούμε στα πιό βασικά.

Ορισμός 1.4.1. Μια ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ σημείων ενός μετρικού χώρου (X, d) λέμε ότι είναι **φραγμένη** αν το σύνολο των σημείων της είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του X. □

Ορισμός 1.4.2. Μια ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ σημείων ενός μετρικού χώρου (X, d) λέγεται **συγκλίνουσα** (ή λέμε ότι η ακολουθία συγκλίνει) αν το X περιέχει ένα σημείο x τέτοιο ώστε

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Tote γράφουμε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (ή απλά $x_n \to x$) και το x λέγεται **όριο** της ακολουθίας $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Αν η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει λέγεται **αποκλίνουσα** (ή λέμε ότι αποκλίνει). □

Στη συνέχεια παραθέτουμε μερικά πολύ βασικά θεωρήματα. Σε κάποια από αυτά οι αποδείξεις παραλείπονται γιατί είτε είναι παρόμοιες με τις αποδείξεις των αντιστοίχων θεωρημάτων της ανάλυσης είτε είναι απλές.

Θεώρημα 1.4.1. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία ενός μετρικού χώρου (X, d) έχει μοναδικό όριο.

Θεώρημα 1.4.2. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία ενός μετρικού χώρου (X, d) είναι φραγμένη.

Θεώρημα 1.4.3. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία σημείων του.

(i) Αν $x_n \to x$, καθώς το $n \to \infty$, τότε $d(x_n, x) \to 0$.

(ii) Αν $x_n \to x$, καθώς το $n \to \infty$, τότε κάθε υπακολουθία της $x_{n_k} \to x$.

Παράδειγμα 1.4.1. Θεωρούμε το μετρικό χώρο $(C[a,b], d_\infty)$ (βλ. Παράδειγμα 1.2.6), μια ακολουθία συναρτήσεων $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ του $C[a,b]$ και μια συνάρτηση $x \in C[a,b]$. Η ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει στη συνάρτηση x αν και μόνο αν

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N_0 \in \mathbb{N} :\ \forall\ n > N_0,\ \forall\ t \in [a,b],\ |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων στον $(C[a,b], d_\infty)$ είναι ομοιόμορφη (βλ. Ορισμός **??**).

Παρατήρηση 1.4.1. Το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 1.4.1, δηλαδή, το ότι η σύγκλιση στο χώρο $(C[a,b], d^\infty)$ είναι ομοιόμορφη, οφείλεται στον ορισμό της μετρικής d^∞ και για αυτό το λόγο η d^∞ λέγεται **μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης** στον $C[a,b]$.

Θεώρημα 1.4.4. Αν $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι δυο ακολουθίες ενός μετρικού χώρου (X, d) και $x_n \to x$, $y_n \to y$, τότε $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.
Απόδειξη. (Χρησιμοποιήστε την τριγωνική ανισότητα).

Γνωρίζουμε από την Ανάλυση ότι μια ακολουθία πραγματικών (ή μιγαδικών) αριθμών $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι **ακολουθία Cauchy**, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\mathrm{N}_0 = \mathrm{N}_0(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε $|a_m - a_n| < \varepsilon,\ \forall\ m, n > N_0$. Μπορούμε με ανάλογο τρόπο να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.4.3. Μία ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ σε ένα μετρικό χώρο (X, d) λέγεται **ακολουθία Cauchy** αν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\mathrm{N}_0 = \mathrm{N}_0(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon,\ \forall\ m, n > N_0.$$

□

Γνωρίζουμε επίσης ότι, κάθε ακολουθία Cauchy πραγματικών (ή μιγαδικών) αριθμών συγκλίνει. Αυτή η ιδιότητα ισχύει και στις ακολουθίες Cauchy των μετρικών χώρων. Ισχύει, επίσης, και το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.4.5. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη. Αν $x_n \to x$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon)$ τέτιο ώστε

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall \ n > N(\varepsilon).$$

Άρα, από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει ότι για κάθε $m, n > N(\varepsilon)$,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι η $\{x_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy. □

Υπενθυμίζουμε, σε αυτό το σημείο (από την Τοπολογία), ότι τα ανοικτά σύνολα διαδραματίζουν ρόλο σε σχέση με τις συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ μετρικών χώρων, όπου η συνέχεια είναι μια φυσική γενίκευση της γνωστής συνέχειας (από την Ανάλυση).

Ορισμός 1.4.4. (Συνέχεια)Έστω (X, d) και (Y, ρ) δυο μετρικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ λέγεται **συνεχής σε ένα σημείο** $x_0 \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, για όλα τα $x \in X$ για τα οποία ισχύει $d(x, x_0) < \delta$.
Η f λέγεται **συνεχής** αν έναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in X$. □

Θεώρημα 1.4.6. (Ακολουθιακή Συνέχεια)Έστω (X, d) και (Y, ρ) δυο μετρικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $x \in X$ αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ σημείων του X που συγκλίνει στο x, η ακολουθία $\{f(x_n)\}$ συγκλίνει στο $f(x)$.

Ορισμός 1.4.5. (Ομοιόμορφη Συνέχεια) Έστω (X, d) και (Y, ρ) δυο μετρικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ λέγεται **ομοιόμορφα συνεχής** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x, y \in X$ για τα οποία ισχύει $d(x, y) < \delta$ έπεται ότι $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. □

Θεώρημα 1.4.7. Έστω (X, d) και (Y, ρ) δυο μετρικοί χώροι. Κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι συνεχής.

Θεώρημα 1.4.8. Έστω (X, d) και (Y, ρ) δυο μετρικοί χώροι. Κάθε Lipschitz συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ορισμός 1.4.6. (Lipschitz Συνέχεια)Έστω (X, d) και (Y, ρ) δυο μετρικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ λέγεται **ομοιόμορφα συνεχής** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $L \geq 0$ τέτοιο ώστε $\rho(f(x), f(x_0)) < Ld(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$. $\square$

Παρατήρηση 1.4.2. Είναι φανερό ότι μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής, αλλά μια συνεχής συνάρτηση δεν είναι απαραίτητα ομοιόμορφα συνεχής. Επιπλέον, η Lipschitz συνέχεια συνεπάγεται την ομοιόμορφη συνέχεια, αλλά η ομοιόμορφη συνέχεια δεν συνεπάγεται την Lipschitz συνέχεια.

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι πολύ σημαντικό και αναφέρεται στο χαρακτηρισμό των συνεχών συναρτήσεων μέσω των ανοικτών συνόλων.

Θεώρημα 1.4.9. Μια απεικόνιση f ενός μετρικού χώρου X σε ένα μετρικό χώρο Y είναι συνεχής αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοικτού υποσυνόλου W του Y είναι ένα ανοικτό υποσύνολο U του X.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής και W ένα ανοικτό υποσύνολο του Y. Αν η αντίστροφη εικόνα του W μέσω της f, $f^{-1}(W) = \emptyset$, τότε αυτό είναι ανοικτό. Έστω ότι $f^{-1}(W) = V \neq \emptyset$. Τότε για τυχόν $x \in V$ έστω $y = f(x) \in W$. Επειδή το W είναι ανοικτό περιέχει μια ε-γειτονιά N_ε του y και επειδή η f είναι συνεχής, το x έχει μια δ-γειτονιά N_δ η οποία απεικονίζεται στην N_ε. Αφού $\mathrm{N}_\varepsilon \subset W$, $\mathrm{N}_\delta \subset V$, οπότε το V είναι ανοικτό γιατί το $x \in V$ είναι τυχόν.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοικτού υποσυνόλου W του Υ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο V του X. Τότε, για κάθε $x \in V$ και κάθε ε-γειτονιά N_ε του $f(x)$, η αντίστροφη εικόνα του $f^{-1}(N_\varepsilon)$ είναι ανοικτό, αφού το N_ε είναι ανοικτό και το $f^{-1}(N_\varepsilon)$ περιέχει το x. Επομένως, το $f^{-1}(N_\varepsilon)$ περιέχει μια δ-γειτονιά N_δ του x, η οποία απεικονίζεται μέσα στο N_ε γιατί το $f^{-1}(N_\varepsilon)$ απεικονίζεται στο N_ε. Άρα, η f είναι συνεχής στο x και επειδή το x είναι τυχόν, η f είναι συνεχής. $\square$

1.5 Διαχωρίσιμοι Μετρικοί Χώροι

Μια σημαντική έννοια τόσο θεωρητικού όσο και πρακτικού ενδιαφέροντος είναι η διαχωρισιμότητα ενός απειραριθμήσιμου μετρικού χώρου. Θα δούμε στη συνέχεια ότι οι διαχωρίσιμοι χώροι είναι απλούστεροι και προπάντων πιο χρήσιμοι από τους μη διαχωρίσιμους.

Ορισμός 1.5.1. Ένα υποσυνολο Μ ενός μετρικού χώρου X λέγεται **πυκνό** στον X αν $\bar{M} = X$. $\square$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, αν το Μ είναι πυκνό στον X, τότε κάθε μπάλα του με οσοδήποτε μικρή ακτίνα περιέχει σημεία του Μ ή με άλλα λόγια δεν υπάρχει σημείο $x \in X$ το οποίο να έχει μια γειτονιά του η οποία δεν περιέχει σημεία του Μ.

Ορισμός 1.5.2. Ένας μετρικός χώρος X είναι **διαχωρίσιμος** αν περιέχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολό του Μ το οποίο είναι πυκνό στον X. $\square$

Στα παραδείγματα που ακολουθούν περιλαμβάνονται μερικοί πολύ σημαντικοί διαχωρίσιμοι αλλά και μη διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι.

Παράδειγμα 1.5.1. Η πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.
Απόδειξη. (βλ. Παράδειγμα **??**).

Παρατήρηση 1.5.1. Όλοι οι Ευκλείδειοι χώροι είναι διαχωρίσιμοι.
Απόδειξη. (βλ. Παράδειγμα **??**).

Παράδειγμα 1.5.2. Το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.
Απόδειξη. (βλ. Παράδειγμα **??**).

Παράδειγμα 1.5.3. Ο χώρος ℓ^p με $1 \leq p < +\infty$ είναι διαχωρίσιμος.
Απόδειξη. (βλ. Άσκηση **??**).

Παράδειγμα 1.5.4. Ο χώρος ℓ^∞ δεν είναι διαχωρίσιμος.
Απόδειξη. (βλ. Άσκηση **??**).

Παράδειγμα 1.5.5. Ένας διακριτός μετρικός χώρος X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν το σύνολο X είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.

Απόδειξη. Στην περίπτωση αυτή η φύση της μετρικής (βλ. Παράδειγμα 1.2.1) δεν επιτρέπει την ύπαρξη ενός γνησίου υποσυνόλου του X το οποίο να είναι πυκνό στο X. Πραγματικά, παρατηρούμε ότι κάθε υποσύνολο Α του X είναι ανοικτό (για κάθε $x \in A$, $\mathrm{B}(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subset A$) που σημαίνει ότι τοΑ είναι κλειστό σύνολο. Αν το Α είναι αριθμήσιμο πυκνό στο X, τότε $\mathrm{A} = \bar{A} = X$, δηλαδή το X είναι αριθμήσιμο. Επίσης, εάν το X είναι αριθμήσιμο, τότε ο X είναι διαχωρίσιμος αφού $\bar{X} = X$. Έτσι το μόνο πυκνό σύνολο στο X είναι το ίδιο το X.

1.6 Πλήρεις Μετρικοί Χώροι

Έστω η ακολουθία

$$x_n = \frac{1}{n}\sqrt{2},\ n = 1, 2, ...$$

Τότε, κάθε $x_n \in \mathbb{Q}^c$, δηλαδή είναι ένας άρρητος αριθμός και η $\{x_n\}$ συγκλίνει στο $0 \in \mathbb{R}$, δηλαδή σε ένα ρητό αριθμό. Παρατηρούμε ότι η x_n συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, ωστόσο δεν συγκλίνει στο $\mathbb{Q}^c$ παρόλο που όλοι οι όροι της ανήκουν σε αυτό. Θεωρούμε τώρα την ακολουθία ρητών αριθμών $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ με

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n},\ n = 1, 2, ...$$

και x_1 είναι οποισδήποτε θετικός φυσικός αριθμός. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $\{x_n\}$ συγκλίνει στο $\sqrt{2}$ που δεν είναι ρητός αριθμός (αποδείξτε το). Δηλαδή, η ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, όχι όμως στο $\mathbb{Q}$. Από τα δύο αυτά παραδείγματα, προκύπτει το συμπέρασμα ότι αντίθετα με το $\mathbb{R}$ τόσο το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ όσο και το σύνολο των αρρήτων $\mathbb{Q}^c$ δεν συμπεριφέρονται καλά ως προς τη σύγκλιση. Δυστυχώς, και σε άλλους περισσότερο γενικούς χώρους η κατάσταση είναι εξίσου περίπλοκη και είναι δυνατόν μία ακολουθία Cauchy να μην συγκλίνει. Ένας τέτοιος χώρος που **δεν** έχει αυτή την τόσο σημαντική ιδιότητα, δηλαδή, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σημείων του να συγκλίνει σε σημείο το οποίο να ανήκει σε αυτόν, λέγεται **μη πλήρης**. Για τους 'καλά συμπεριφερόμενους' ως προς τη σύγκλιση μετρικούς χώρους έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.6.1. Ο μετρικός χώρος X λέγεται **πλήρης** αν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει, δηλαδή έχει ένα όριο το οποίο είναι ένα στοιχείο του X. $\square$

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε κάποιους πλήρεις και κάποιους μη πλήρεις σημαντικούς μετρικούς χώρους.

Παράδειγμα 1.6.1. Η πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ και το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ με τις συνήθεις μετρικές τους είναι πλήρεις μετρικοί χώροι.

Γενικότερα:

Όλοι οι Ευκλείδειοι χώροι είναι πλήρεις μετρικοί χώροι.

Παρατήρηση 1.6.1. Η πληρότητα της πραγματικής ευθείας $\mathbb{R}$ είναι ο κύριος λόγος γιατί στη ανάλυση χρησιμοποιούμε την $\mathbb{R}$ και όχι την ευθεία των ρητών αριθμών, δηλαδή το σύνολο όλων των ρητών αριθμών με την μετρική που επάγεται από την $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1.6.2. Το σύνολο $\mathbb{R} - \{a\}$ με τη συνήθη μετρική είναι μη πλήρης μετρικός χώρος για κάθε πραγματικό αριθμό a.

Παράδειγμα 1.6.3. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών με τη συνήθη μετρική $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{Q}$ είναι μη πλήρης μετρικός χώρος.
Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ προκύπτει από την πραγματική ευθεία αν αφαιρέσουμε όλους τους άρρητους αριθμούς και να θυμηθούμε ότι υπάρχουν ακολουθίες ρητών αριθμών με όρια άρρητους αριθμούς.

Παράδειγμα 1.6.4. Ο χώρος $(0, 1]$ εφοδιασμένος με τη συνήθη μετρική $d(x, y) = |x - y|$ είναι μη πλήρης μετρικός χώρος.
Απόδειξη. Η ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $x_n = 1/n$, $n = 1, 2, ...$, ή είναι μία ακολουθία Cauchy η οποία δεν συγκλίνει στο $(0, 1]$ αφού το $0 \notin (0, 1]$.

Γενικότερα:

Ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$ είναι μη πλήρης μετρικός χώρος.

Παράδειγμα 1.6.5. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με την Ευκλείδεια μετρική

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2},$$

όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια ακολουθία $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, ..., x_n^{(m)})$ Cauchy στον $\mathbb{R}^n$. Επειδή η ακολουθία είναι Cauchy, γά κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε

$$d(x_m, x_r) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^{(m)} - x_j^{(r)} \right)^2} < \varepsilon, \ \forall \ m, r > N, \qquad (1)$$

οπότε γιά κάθε $m, r > N$ και $j = 1, 2, ..., n$ θα έχουμε

$$\left(x_j^{(m)} - x_j^{(r)} \right)^2 < \varepsilon^2$$

απ' όπου

$$\left| x_j^{(m)} - x_j^{(r)} \right| < \varepsilon.$$

Αυτό δείχνει ότι για κάθε j, $1 \leq j \leq n$ σταθερό, η ακολουθία $(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, ...)$ είναι μία Cauchy ακολουθία πραγματικών αριθμών, οπότε γιά $m \to \infty$ θα συγκλίνει σε κάποιο αριθμό x_j. Παίρνοντας αυτά τα n όρια, ορίζουμε $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Προφανώς $x \in \mathbb{R}^n$. Από την (1), για $r \to \infty$, έχουμε

$$d(x_m, x) \leq \varepsilon, \ \forall \, m > N.$$

Αυτό δείχνει ότι το x είναι το όριο της ακολουθίας $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, το οποίο αποδεικνύει την πληρότητα του $\mathbb{R}^n$ γιατί η $\{x_m\}$ είναι μιά τυχούσα ακολουθία Cauchy του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 1.6.6. Ο $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$, $1 \leq p \leq \infty$, είναι ένας πλήρης χώρος.

Απόδειξη. (i) Θα υποθέσουμε πρώτα ότι $1 \leq p < \infty$. Έστω $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια τυχούσα ακολουθία Cauchy στον ℓ^p (δηλαδή μια ακολουθία ακολουθιών), όπου $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots)$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε για όλα τα $m, n > N$,

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon. \quad (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι για κάθε $j = 1, 2, \cdots$ (και $m, n > N$) έχουμε

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p < \varepsilon. \quad (2)$$

Από την (2) προκύπτει ότι, για σταθερό j, η ακολουθία $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \cdots)$ είναι μια Cauchy ακολουθία αριθμών και επειδή ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης η ακολουθία αυτή συγκλίνει. Έστω ότι $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ καθώς το $m \to \infty$. Παίρνοντας τα όρια των ακολουθιών $\xi_j^{(m)}$ για κάθε $j = 1, 2, \cdots$, ορίζουμε την ακολουθία $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$. Θα αποδείξουμε ότι $x \in \ell^p$ και $x_m \to x$.
Από την (1) προκύπτει ότι για όλα τα $m, n > N$,

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p < \varepsilon^p, \ k = 1, 2, \cdots \quad (3).$$

Από την (3) για $n \to \infty$ παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p < \varepsilon^p, \ k = 1, 2, \cdots \quad (4).$$

Τέλος, από την (4) για $k \to \infty$ και κάθε $m > N$ παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p < \varepsilon^p, \ k = 1, 2, \cdots \quad (5),$$

Η (5) δείχνει ότι η ακολουθία $x_m - x = \{\xi_j^{(m)} - \xi_j\} \in \ell^p$ και επειδή η $x_m \in \ell^p$, από την ανισότητα του Minkowski, έπεται ότι και η $x = x_m + (x - x_m) \in \ell^p$. Επιπροσθέτως, οι σειρές στην (5) αναπαριστούν την $[d(x_m, x)]^P$, οπότε από την (5) έπεται ότι η $x_m \to x$ και επειδή η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια τυχούσα ακολουθία Cauchy στον ℓ^p, αυτό συνεπάγεται την πληρότητα του ℓ^p, όπου $1 \leq p < \infty$.

(ii) Έστω $p = \infty$. Έστω $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ μια τυχούσα ακολουθία Cauchy στον ℓ^∞, όπου $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots)$. Αφοή η μετρική του ℓ^∞ είναι η

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j|,$$

όπου $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ και $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$, και η ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\mathrm{N} > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $m, n > N$,

$$d(x_m, x_n) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)} \right| < \varepsilon,$$

οπότε,

$$\left| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)} \right| < \varepsilon, \ \forall\, m, n > N. \quad (*)$$

Άρα, για κάθε j σταθερό, η ακολουθία $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \cdots)$ είναι μια Cauchy ακολουθία αριθμών, η οποία είναι γνωστό ότι συγκλίνει. Έστω $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ καθώς το $m \to \infty$. Παίρνοντας αυτά τα όρια ξ_j για $j = 1, 2, \cdots$, ορίζουμε μια ακολουθία $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$. Θα δείξουμε ότι $x \in \ell^\infty$ και ότι $x_m \to x$ για $m \to \infty$. Από την (*) για $n \to \infty$ έχουμε

$$\left| \xi_j^{(m)} - \xi_j \right| < \varepsilon, \ \forall\, m > N \quad (**).$$

Αφού η $x_m = \{\xi_j^{(m)} \in \ell^\infty$, υπάρχει μια σταθερά C_{x_m} τέτοια ώστε $|\xi_j^{(m)}| \leq C_{x_m}$, για όλα τα j, οπότε, από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$|\xi_j| \leq |\xi_j - \xi_j^{(m)}| + |\xi_j^{(m)}| \leq \varepsilon + C_{x_m} \ \forall\, m > N.$$

Άρα, η $x = \{\xi_j\}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία, οπότε $x \in \ell^\infty$. Τέλος, από την (**) προκύπτει ότι

$$d(x_m, x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j^{(m)} - \xi_j| \leq \varepsilon,$$

οπότε, $x_m \to x$ για $m \to \infty$.
Επειδή, η $\{x_m\}$ είναι μια τυχούσα ακολουθία Cauchy, ο ℓ^∞ είναι πλήρης.

Παράδειγμα 1.6.7. Ο χώρος $(C[0,1], d_\infty)$, όπου

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x(t) - y(t)| : t \in [a,b]\}$$

είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Αν $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ είναι μία ακολουθία Cauchy, τότε γιά κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N_0 τέτοιο ώστε για κάθε $m, n \geq N_0$ έχουμε

$$d_\infty(x_n, x_m) = \max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_m(t)| \leq \varepsilon, \qquad (1)$$

οπότε από την (1) για $t = t_0 \in [a,b]$ σταθερό,

$$|x_n(t_0) - x_m(t_0)| \leq \varepsilon,\ m, n \geq N_0. \qquad (2)$$

Άρα, η ακολουθία $\{x_1(t_0), x_2(t_0), ...\}$ είναι μία ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$ και επειδή ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης, η ακολουθία συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $x(t_0)$. Με αυτόν τον τρόπο αντιστοιχίζουμε κάθε $t \in [a,b]$ σε ένα μοναδικό πραγματικό αριθμό $x(t)$. Αυτό ορίζει σημειακά μια συνάρτηση x στο $[a,b]$. Θα αποδείξουμε ότι $x \in C([a,b])$ και ότι $x_n \to x$.
Από την ανισότητα (2) για $m \to \infty$ παίρνουμε

$$|x_n(t_0) - x(t_0)| \leq \varepsilon,\ m, n \geq N_0.$$

Άρα για κάθε $t \in [a,b]$,

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon,\ m, n \geq N_0.$$

Αυτό δείχνει ότι η $\{x_n(t)\}$ συγκλίνει στην $x(t)$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και αφού οι συναρτήσεις x_n είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, η συνάρτηση όριο x θα είναι συνεχής, οπότε $x \in C[a,b]$. Εξάλλου, έχουμε ότι $x_n \to x$. Άρα ο $C[a,b]$ είναι πλήρης.

Παράδειγμα 1.6.8. Το σύνολο $C[0,1]$ με τη μετρική

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Για κάθε $n = 1, 2, ...$ ορίζουμε την ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2n(x - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < x \leq 1 \end{array} \right. .$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι $f_n \in C[0,1]$. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f_n για κάποια n, m, επίσης διαπιστώνουμε ότι

$$d(f_n, f_m) = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx = \frac{1}{4} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|.$$

Έτσι, για τυχόν $\varepsilon > 0$ και $\mathrm{N} = \frac{1}{\varepsilon}$ για $n, m > N$ είναι $\frac{1}{2n}, \frac{1}{2m} \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$ οπότε

$$\frac{1}{4} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Άρα,

$$d(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon, \ \forall \, n, m > N$$

και επομένως η $\{f_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $(C[0,1], d)$.
Θα αποδείξουμε ότι ο $(C[0,1], d)$ δεν είναι πλήρης δείχνοντας ότι η $\{f_n\}$ δεν έχει όριο στον $(C[0,1], d)$.
Για κάθε $f \in (C[0,1], d)$, έχουμε

$$d\left(f_n, f\right) = \int_0^{1/2} \left|0 - f\left(x\right)\right| dx + \int_{1/2}^{a_n} \left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| dx + \int_{a_n}^1 \left|1 - f\left(x\right)\right| dx$$

Επειδή τα ολοκληώματα στην τελευταία ισότητα μη αρνητικά αν υποθέσουμε ότι η $f_n \to f$ στον $C[0,1]$ από την τελευταία ισότητα για $n \to \infty$ προκύπτει ότι

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{array} \right. ,$$

το οποίο είναι αδύνατο για μια συνεχή συνάρτηση. Άρα, η $\{f_n\}$ δεν συγκλίνει στον $C[0,1]$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο χώρος $C[0,1]$ δεν είναι πλήρης.

Επιστρέφοντας πάλι στην ευθεία των ρητών $\mathbb{Q}$ υπενθυμίζουμε ότι δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος, αλλά μπορεί να συμπληρωθεί κατάλληλα, δηλαδή με την προσθήκη των άρρητων, ώστε να προκύψει ολόκληρη η ευθεία $\mathbb{R}$ η οποία είναι πλήρης μετρικός χώρος. Επίσης, αυτή η <πλήρωση> του $\mathbb{R}$ από το $\mathbb{Q}$ είναι τέτοια ώστε το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Είναι αρκετά σημαντικό το ότι ένας τυχαίος μη πλήρης μετρικός χώρος μπορεί να <συμπληρωθεί> με ένα όμοιο τρόπο ώστε να προκύψει ένας πλήρης μετρικός χώρος. Η διαδικασία αυτή λέγεται **πλήρωση**, ωστόσο, πριν μελετήσουμε την διαδικασία αυτή θα χρειαστεί να αναφερθούμε σε δυο σχετικές έννοιες, την έννοια της ισομετρίας και την έννοια του ισομορφισμού, οι οποίες είναι απαραίτητες για το σκοπό αυτό αλλά και πολύ χρήσιμες σε πλήθος άλλων εφαρμογών.

1.7 Ισομετρίες - Ισομορφισμοί

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον αλλά και μεγάλη χρησιμότητα παρουσιάζουν οι μετρικοί χώροι για τους οποίους υπάρχει μια απεικόνιση μεταξύ τους η οποία διατηρεί τις αποστάσεις.

Ορισμός 1.7.1. Έστω (X, d) και $(\tilde{X}, \tilde{d})$ δύο μετρικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : X \to \tilde{X}$ λέγεται **ισομετρία** αν η f διατηρεί τις αποστάσεις, δηλαδή, για κάθε $x, y \in X$,

$$\tilde{d}(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

□

Επειδή μία ισομετρία είναι μια 1-1 απεικόνιση (γιατί;), οδηγούμαστε στο ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.7.2. Δύο μετρικοί χώροι (X, d) και $(\tilde{X}, \tilde{d})$ λέγονται **ισομετρικοί** εάν υπάρχει μια ισομετρία του X επί του $\tilde{X}$ (δηλαδή, μια 1-1 και επί απεικόνιση που διατηρεί τις αποστάσεις).
Είναι ποφανές ότι αν η f είναι μια ισομετρία από τον (X, d) επί του$(\tilde{X}, \tilde{d})$, τότε η f^{-1} είναι μια ισομετρία από τον $(\tilde{X}, \tilde{d})$ επί του (X, d). □

Παράδειγμα 1.7.1. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, όπου $\|\cdot\|$ είναι η Ευκλείδεια μετρική, και έστω $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ένα σημείο του με $\|a\| \neq 0$. Θεωρούμε το σύνολο $E = \{x \in \mathbb{R}^n : x = a\,t,\ t \in \mathbb{R}\}$. Τότε, ο υπόχωρος (E, $\|\cdot\|$) είναι ισομετρικός με τον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, όπου $|\cdot|$ είναι η απόλυτη τιμή.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : E \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \|a\|t,\ \forall\, x \in E$. Προφανώς, η f είναι 1-1 και αν $r \in \mathbb{R}$ τυχόν, για $x = ar/\|a\| \in E$ είναι $f(x) = r$, οπότε η f είναι επί. Επίσης, αν $x_1 = at_1, x_2 = at_2 \in E$, τότε έχουμε

$$|f(x_1) - f(x_2)| = ||a|t_1 - |a|t_2| = |a||t_1 - t_2| = |x_1 - x_2|.$$

Άρα οι χώροι (E, $\|\cdot\|$) και $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι ισομετρικοί.

Σχετικά με τις ισομετρίες στο $\mathbb{R}$ ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.7.1. Όλες οι ισομετρίες στο $\mathbb{R}$ ως προς τη συνήθη μετρική έχουν μια από τις μορφές $f(x) = x + f(0)$ ή $f(x) = -x + f(0)$.

Απόδειξη. (βλ. σελ. 173 Αρτεμιάδη).

Παρατήρηση 1.7.1. Το σύνολο Ε και γενικότερα κάθε σύνολο της μορφής $E' = \{x \in \mathbb{R}^n : x = a\,t + b,\, a, b \in \mathbb{R}^n,\, \|a\| \neq 0,\, t \in \mathbb{R}\}$ λέγεται **ευθεία γραμμή του** $\mathbb{R}^n$. Επομένως, κάθε ευθεία του $\mathbb{R}^n$ είναι ισομετρική με την πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση 1.7.2. Στο παράδειγμα 1.7.1 θα μπορούσαμε να πάρουμε και σύνολα της μορφής $E' = \{x \in \mathbb{R}^n : x = a\,t + b,\, a, b \in \mathbb{R}^n,\, t \in \mathbb{R}\}$ τα οποία εφοδιασμένα με την μετρική d είναι υπόχωροι του $(\mathbb{R}^n, d)$, ωστόσο αυτά δεν είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει την σαφή διάκριση της έννοιας του υποχώρου ενός μετρικού χώρου από την έννοια του διανυσματικού υποχώρου ενός διανυσματικού χώρου όπως ορίζεται στην άλγεβρα.

Ορισμός 1.7.3. Έστω X και Y μετρικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ λέγεται **ομοιομορφισμός** τότε και μόνο τότε όταν είναι 1-1, επί, συνεχής και η f^{-1} είναι συνεχής στον Y. □

Ορισμός 1.7.4. Δύο μετρικοί χώροι X και Y λέγονται **ομοιόμορφοι** τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει ομοιμορφισμός από τον X στον Y. □

Πρόταση 1.7.1. Κάθε ισομετρία είναι ομοιομορφισμός, ωστόσο δεν είναι όλοι οι ομοιομορφισμοί ισομετρίες.
Απόδειξη. (βλ. σελ. 181 Αρτ.)

Παράδειγμα 1.7.2. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \to [a, b]$ με $f(x) = a + (b - a)x$ είναι ένας ομοιομοφισμός. Πότε είναι ισομετρία;

Απόδειξη. Αποδεικνύεται εύκολα ότι η f είναι 1-1, επί και συνεχής καθώς επίσης και ότι η

$$f^{-1}(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

είναι συνεχής.
Επειδή για κάθε $x, y \in [0, 1]$ είναι

$$|f(x) - f(y)| = |b - a||x - y|,$$

η f είναι ισομετρία όταν $|b - a| = 1$, δηλαδή μια μετατόπιση.

Το γεγονός ότι κάθε μετρικός χώρος είναι και τοπολογικός χώρος σε συνδιασμό με το ότι η τοπολογία μελετά τις τοπολογικές ιδιότητες ενός χώρου, μας οδηγεί στον ορισμό του ομοιομορφισμού, δηλαδη μια απεικόνισης μεταξύ δυο μετρικών χώρων η οποία διατηρεί τις τοπολογικές τους ιδιότητες αμετάβλητες. Έτσι, έχουμε και τον ακόλουθο ορισμό για τους ομοιόμορφους μετρικούς χώρους.

Ορισμός 1.7.5. Δύο μετρικοί χώροι X και Y λέγονται **ομοιόμορφοι** τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει μια 1-1 και επί συνεχής απεικόνιση από τον X στον Y έτσι ώστε η εικόνα κάθε ανοικτού υποσυνόλου του X να είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. $\square$

Παρατήρηση 1.7.3. Από τον Ορισμό 1.7.2 προκύπτει ότι οι ισομετρικοί χώροι μπορεί να διαφέρουν το πολύ ως προς τη φύση των στοιχείων τους, αλλά δεν διακρίνονται από την πλευρά της μετρικής. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε μελέτη όπου η φύση των στοιχείων τους δεν έχει σημασία μπορούμε να τους θεωρούμε ταυτόσημους όπως δύο αντίγραφα του ίδιου <αφηρημένου> χώρου. Επομένως, σε κάθε πρόταση που ισχύει σε ένα μετρικό χώρο (X, d) της οποίας η απόδειξη γίνεται με τη χρήση μόνο της έννοιας της απόστασης αντιστοιχεί μία πρόταση που ισχύει σε οποιοδήποτε μετρικό χώρο $(\tilde{X}, \tilde{d})$ που είναι ισομετρικός με τον (X, d). Από τον Ορισμό 1.7.5 προκύπτει ότι οι ομοιόμορφοι χώροι μπορεί να διαφέρουν ως προς τη φύση των στοιχείων τους, αλλά δεν διακρίνονται από την πλευρά των τοπολογικών τους ιδιοτήτων.

1.8 Πλήρωση Μετρικών Χώρων

Το θεώρημα που ακολουθεί ισχυρίζεται ότι κάθε μετρικός χώρος μπορεί να γίνει πλήρης, και αυτό ίσως είναι αναμενόμενο υπό την έννοια ότι αν φανταστούμε ένα μη πλήρη χώρο ως υποσύνολο ενός <μεγαλύτερου> χώρου και συμπεριλάβουμε τα όρια όλων των ακολουθιών Cauchy σε αυτόν, τότε ο χώρος που προκύπτει είναι πλήρης.

Θεώρημα 1.8.1. (**Πλήρωση**) Για κάθε μετρικό χώρο (X, d) υπάρχει ένας πλήρης μετρικός χώρος $(\hat{X}, \hat{d})$ ο οποίος έχει ένα υπόχωρο W ο οποίος είναι ισομετρικός με τον (X, d) και πυκνός στον $(\hat{X}, \hat{d})$. Αυτός ο χώρος $(\hat{X}, \hat{d})$ είναι μοναδικός εκτός από τις ισομετρίες, δηλαδή, εάν $(\tilde{X}, \tilde{d})$ είναι οποιοσδήποτε μετρικός χώρος που έχει ένα πυκνό υπόχωρο $\tilde{W}$ ισομετρικό με τον (X, d), τότε οι $\tilde{X}, \tilde{d})$ και $(\hat{X}, \hat{d})$ είναι ισομετρικοί.

Απόδειξη. (βλ. Θεώρημα 1.6-2 [Kreyszig])

Ορισμός 1.8.1. Ένα μη κενό υποσύνολο V ενός μετρικού χώρου X είναι **κλειστό** αν και μόνο αν $V = \overline{V}$. □

Θεώρημα 1.8.2. Έστω V ένα μη κενό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X και $\overline{V}$ το κάλυμμά του. Τότε:

(i) Το $x \in \overline{V}$ αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία (x_n) στο V τέτοια ώστε $x_n \to x$.

(ii) Το V είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε (x_n) στο V τέτοια ώστε $x_n \to x$ συνεπάγεται ότι $x \in V$.

Απόδειξη. (i) Έστω $x \in \overline{V}$. Αν $x \in V$, τότε η ακολουθία $\{x, x, ...\}$ συγκλίνει στο x. Αν το $x \notin V$, αυτό είναι ένα σημεό συσσώρευσης του V, οπότε για κάθε $n = 1, 2, ...$ η μπάλα $B(x, \frac{1}{n})$ περιέχει ένα $x_n \in V$, και επειδή η $\frac{1}{n} \to 0$, καθώς το $n \to \infty$ έπεται ότι $x_n \to x$.
Αντίστροφα, αν η (x_n) είναι μια ακολουθία στο V τέτοια ώστε $x_n \to x$, τότε το $x \in V$ ή κάθε περιοχή του x περιέχει σημεία $x_n \neq x$, οπότε το x είναι σημείο συσσώρευσης του V, και επομένως $x \in \overline{V}$, από τον ορισμό του καλύμματος.
(ii) Το V κλειστό αν και μόνο αν $V = \overline{V}$, και το αποτέλεσμα έπεται από το (i).

Θεώρημα 1.8.3. Ένας υπόχωρος W ενός πλήρους μετρικού χώρου X είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος αν και μόνο αν το σύνολο W είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Απόδειξη. Έστω ότι ο W είναι πλήρης μετρικός χώρος. Από το Θεώρημα 1.8.2(i), έχουμε ότι για κάθε $x \in \overline{W}$ υπάρχει μια ακολουθία (x_n) του W η οποία συγκλίνει σε ένα σημείο $x \in W$, γιατί ο W είναι πλήρης μετρικός χώρος. Αυτό αποδεικνύει ότι το W είναι κλειστό γιατί το $x \in \overline{W}$ είναι τυχόν.
Αντίστροφα, έστω ότι το W είναι κλειστό υποσύνολο του X και ότι η (x_n) είναι μια ακολουθία Cauchy του W. Τότε, $x_n \to x \in X$, το οποίο από το 1.8.2(i)) συνεπάγεται ότι $x \in \overline{W}$ και αφού $W = \overline{W}$ από την υπόθεση έπεται ότι $x \in W$. Επομένως η τυχούσα ακολουθία Cauchy του W συγκλίνει στο W, το οποίο αποδεικνύει ότι ο W είναι πλήρης.

Παράδειγμα 1.8.1. Ο χώρος c που αποτελείται από όλες τις συγκλίνουσες ακολουθίες $x = (a_i)$ πραγματικών (ή μιγαδικών) αριθμών, με τη μετρική την επαγόμενη από τον ℓ^∞ είναι πλήρης.

Απόδειξη. Επειδή ο c είναι υπόχωρος του ℓ^∞ αρκεί να δείξουμε ότι το c είναι κλειστό στον ℓ^∞, οπότε λόγω του Θεωρήματος 1.8.3 θα είναι πλήρης.

Θεωρούμε τυχόν $x = (a_i) \in \overline{c}$, οπότε από το Θεώρημα 1.8.2(i) έπεται ότι υπάρχει ακολουθία $x_n = (a_i^{(n)}) \in c$ τέτοια ώστε $x_n \to x$. Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχειN $>$ 0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ και για όλα τα $i \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$|a_i^{(n)} - a_i| \leq d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Επομένως και για για κάθε $n = N$ και όλα τα $i \in \mathbb{N}$. Επειδή το $x_N \in c$, οι όροι του $a_i^{(N)}$ σχηματίζουν μια συγκλίνουσα ακολουθία. Μια τέτοια ακολουθία είναι Cauchy, οπότε υπάρχει N_1 τέτοιο ώστε $|a_i^{(N)} - a_j^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall\, i, j \geq N_1$. Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε ότι για όλα τα $i, j \geq N_1$ ισχύει η ανισότητα: $|a_i - a_j| \leq |a_i - a_i^{(N)}| + |a_i^{(N)} - a_j^{(N)}| + |a_j^{(N)} - a_j| < \epsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι η ακολουθία $x = (a_i)$ συγκλίνει, οπότε $x \in c$ και επειδή το $x \in \overline{c}$ είναι τυχαίο, το c είναι κλειστό στο ℓ^∞. Τέλος, από το Θεώρημα 1.8.2 έπεται ότι ο c είναι πλήρης.

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με ένα παράδειγμα που αποδεικνύει ότι η πληρότητα δεν διατηρείται από τους ομοιομορφισμούς.

Παράδειγμα 1.8.2. Έστω οι μετρικοί χώροι $((0,1], d)$ και $([1,\infty), d)$, όπου η μετρική $d = |\cdot|$ είναι η απόλυτη τιμή και η συνάρτηση $f : (0,1] \to [1,\infty)$ με $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ των $((0,1], d)$ και $([1,\infty), d)$. Ωστόσο, ο $((0,1], d)$ δεν είναι πλήρης γιατί η ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ με $x_n = \dfrac{1}{n} \in (0,1]$ έχει όριο το $0 \notin (0,1]$, ενώ ο $([1,\infty), d)$ είναι πλήρης ως κλειστός υπόχωρος του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (βλ. Θεώρημα 1.8.3).