

Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση

Μια Εισαγωγή

Νίκος Λαμπρόπουλος

17 Δεκεμβρίου 2024

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μεταβολικές Ανισότητες

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε μερικά αποτελέσματα στη θεωρία των μεταβολικών ανισοτήτων (Theory of Variational Inequalities) με κάποια έμφαση στη χρήση της Θεωρίας Stampacchia-Lax-Milgram στην επίλυση μεταβολικών προβλημάτων.

1.1 Κίνητρο

Μεταβολική ανισότητα είναι μια ανισότητα που περιλαμβάνει ένα συναρτησιακό, και η οποία πρέπει να λυθεί για όλες της δυνατές τιμές μιας δεδομένης μεταβλητής που ανήκουν σε κάποιο κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου παρά σε ένα γραμμικό υπόχωρο και αυτό γιατί οι ιδιότητες ενός τέτοιου συνόλου εξασφαλίζουν την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης κάτι που δεν συμβαίνει στην περίπτωση του γραμμικού υπόχωρου. Ένας τρόπος για να πάρουμε μεταβολικές ανισότητες είναι να μελετήσουμε προβλήματα ελαχιστοποίησης για ορισμένα συναρτησιακά σε κλειστά και κυρτά υποσύνολα γραμμικών χώρων. Θα παρουσιάσουμε πρώτα μερικά τέτοια παραδείγματα ελαχιστοποίησης και την αντίστοιχη μεταβολική ανισότητα.

Παράδειγμα 1.1.1. (Ελαχιστοποίηση στο $\mathbb{R}$) Έστω μια συνάρτηση $f \in C^1[a, b]$ και ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα:

$$f(x_0) = \min_{x \in [a, b]} f(x).$$

Το σημείο x_0 στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή βρίσκεται είτε στο εσωτερικό του $[a, b]$ είτε είναι ένα άκρο του, οπότε:

- Αν $a < x_0 < b$, τότε $f'(x_0) = 0$.
- Αν $x_0 = a$, τότε $f'(x_0) \geq 0$.
- Αν $x_0 = b$, τότε $f'(x_0) \leq 0$.

Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις ισχύει η ανισότητα

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b],$$

η οποία είναι μια μεταβολική ανισότητα και το αντίστοιχο πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο μεταβολικό πρόβλημα:

$$\text{Να βρεθεί } x_0 \in [a, b] \text{ τέτοιο ώστε } f'(x_0)(x - x_0) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Αν, επιπλέον, η f είναι αυστηρά κυρτή, τότε η λύση είναι μοναδική.

Παράδειγμα 1.1.2. (Ελαχιστοποίηση στον $\mathbb{R}^n, n > 1$) Έστω μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, όπου C είναι ένα κλειστό κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n, n > 1$ και ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα:

$$u(x_0) = \min_{x \in C} u(x).$$

Από το Θεώρημα του Weierstrass, υπάρχει $x_0 \in C$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \min_{x \in C} f(x)$.

Για δοθέν $x \in C$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζετε από τη σχέση

$$\phi(t) = f((1-t)x_0 + tx) = f(x_0 + t(x - x_0)).$$

Επειδή, $\phi(0) = f(x_0)$, η ϕ παρουσιάζει ελάχιστο για $t_0 = 0$ και επειδή είναι διαφορίσιμη από το Παράδειγμα ?? έπεται ότι $\phi'(0)t \geq 0$, για κάθε $t \in [0, 1]$ ή ισοδύναμα

$$\phi'(0) \geq 0.$$

Επειδή, η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη αν συνβολίσουμε με ∇f την παράγωγό της μπορούμε να πάρουμε την Gateaux παράγωγό της στην κατεύθυνση του $x - x_0$ (βλ.....), οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(t + \varepsilon) - \phi(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0)) - f(x_0 + t(x - x_0))}{\varepsilon} \\ &= \langle \nabla f(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle, \end{aligned}$$

οπότε

$$\phi'(0) = \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle = \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0),$$

όπου $\eta \cdot$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$.

Άρα, έχουμε τη μεταβολική ανισότητα

$$\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0), \quad \forall x \in C.$$

Παράδειγμα 1.1.3. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και με λείο σύνορο και $W_0^{1,2}(\Omega)$ ο χώρος Sobolev (βλ. Ορισμός ??), του οποίου τα στοιχεία είναι συναρτήσεις $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ο $W_0^{1,2}(\Omega)$ όταν εφοδιαστεί με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle u, v \rangle = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

είναι ένας χώρος Hilbert.

Θεωρούμε το συναρτησιακό $F : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται με την

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Τότε, επειδή ο χώρος $W_0^{1,2}(\Omega)$ είναι διανυσματικός μπορούμε να ταυτίσουμε κάθε διεύθυνση στον χώρο αυτό με ένα στοιχείο του, έστω το $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Επομένως, αν για συντομία παραλείψουμε να αναγράψουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή x θα έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} (F(u + \varepsilon v) - F(u)) &= \frac{1}{2\varepsilon} \left(\int_{\Omega} |\nabla(u + \varepsilon v)|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (\langle \nabla(u + \varepsilon v), \nabla(u + \varepsilon v) \rangle - |\nabla u|^2) dx \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + 2\varepsilon \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \varepsilon^2 |\nabla v|^2 - |\nabla u|^2) dx \\ &= \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο για $\varepsilon \rightarrow 0$ στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι συναρτήσεις $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (F(u + \varepsilon v) - F(u)) &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx \end{aligned}$$

Από την τελευταία ισότητα χρησιμοποιώντας το στάνταρτ εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\Omega)$ καθώς και τον Ορισμό ?? παίρνουμε ότι η Fréchet παράγωγος $DF(u)$ του F ισούται με $-\Delta u$. Επομένως, λόγω του Θεωρήματος ?? 2.2.13 Κραβ το συναρτησιακό F παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο u_0 του $W_0^{1,2}(\Omega)$ αν και μόνο αν $DF(u_0) = 0$ και λόγω του του Θεωρήματος ?? 2.4.5 η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με τη μεταβολική ανισότητα

$$\langle DF(u_0), u - u_0 \rangle \geq 0, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Με τον ίδιο τρόπο που ορίσαμε παραπάνω τον τελεστή $DF(u) : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow (W_0^{1,2}(\Omega))$ με τη σχέση $DF(u) = -\Delta u$ μπορούμε να ορίσουμε μια τέτοια απεικόνιση σε οποιοδήποτε χώρο Banach X .

Ορισμός 1.1.1. Έστω X ένας χώρος Banach. Ορίζουμε την απεικόνιση $A : X \rightarrow X^*$ με τη σχέση $A(u) = -\Delta u$, η οποία αποτελεί τη μεταβολική διατύπωση του τελεστή Laplace. $\square$

1.2 Θεωρία Stampacchia — Lax — Milgram

Σε αυτή την Ενότητα στόχος μας είναι μια πρώτη προσέγγιση των μεταβολικών ανισοτήτων σε χώρους Hilbert. Σε αυτή την περίπτωση, οι ανισότητες αυτές αφορούν προβλήματα (ή προκύπτουν από προβλήματα) που σχετίζονται με την ελαχιστοποίηση τετραγωνικών συναρτησοειδών πάνω σε κυρτά και κλειστά υποσύνολα χώρων Hilbert. Οι μεταβολικές ανισότητες αφορούν προβλήματα πύο γενικής φύσης και σε πύο γενικούς χώρους, για παράδειγμα σε χώρους Banach, και δεν είναι πάντα συνδεδεμένες με ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Ωστόσο, η όλη διαδικασία (δηλαδή η ελαχιστοποίηση τετραγωνικών συναρτησοειδών σε χώρους Hilbert), που ονομάζεται «Θεωρία Lax-Milgram-Stampacchia», αποτελεί ένα από τα πύο σημαντικά κεφάλαια της συναρτησιακής ανάλυσης και πέρα από την πολύ σημαντική της συνεισφορά στην μελέτη των μεταβολικών ανισοτήτων παρουσιάζει ιδιαίτερο αυτόνομο ενδιαφέρον.

Πριν παρουσιάσουμε τα βασικά σημεία και τα θεωρήματα της θεωρίας Lax-Milgram-Stampacchia θα χρειαστούμε κάποια προκαταρκτικά.

Ορισμός 1.2.1. (Διγραμμική Μορφή) Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Μια **διγραμμική μορφή** στον X είναι μια απεικόνιση $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γραμμική και ως προς τις δυο μεταβλητές της, δηλαδή μια απεικόνιση με τις ακόλουθες ιδιότητες:

Για κάθε $x, y, z \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $a(x + y, z) = a(x, z) + a(y, z)$,
- $a(x, y + z) = a(x, y) + a(x, z)$,
- $a(\lambda x, y) = \lambda a(x, y) = a(x, \lambda y)$.

Το σύνολο των διγραμμικών μορφών στον X συμβολίζεται με $\mathcal{L}(X \times X, \mathbb{R})$.

Αν η διγραμμική μορφή a έχει την ιδιότητα $a(x, z) = a(z, x)$ για κάθε $x, z \in X$, τότε λέγεται **συμμετρική**. $\square$

Αν μια διγραμμική μορφή είναι συμμετρική μπορούμε να την συσχετίσουμε με την Gâteaux παράγωγο ενός τετραγωνικού συναρτησοειδούς $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται με τη σχέση

$$F(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}a(x, x),$$

οπότε θα μπορούσαμε να συνδέσουμε μια μεταβολική ανισότητα με ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης πάνω σε ένα κυρτό υποσύνολο του χώρου X και στη συνέχεια με τη χρήση της θεωρίας ελαχιστοποίησης σε κυρτά σύνολα (βλ. Θεώρημα 2.4.5, Κραβ.) να πάρουμε το αποτέλεσμα. Όμως, η θεωρία Lax-Milgram-Stampacchia μας επιτρέπει να αντιμετωπίζουμε τις μεταβολικές ανισότητες ακόμα και αν οι εμφανιζόμενες διγραμμικές μορφές δεν είναι συμμετρικές καθώς και σε περιπτώσεις που δεν σχετίζονται με κάποιο ελαχιστοποιητικό πρόβλημα.

Η θεωρία Lax-Milgram-Stampacchia ασχολείται με μεταβολικές ανισότητες ένα χώρο Hilbert. Ειδικότερα, εμπλέκοντας μια διγραμμική μορφή $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, ασχολείται με προβλήματα της μορφής:

Δοθέντος ενός κυρτού υποσυνόλου C ενός χώρου Hilbert H και $x^ \in H$, να βρεθεί $x_0 \in C$ τέτοιο ώστε*

$$a(x_0, x - x_0) \geq \langle x^*, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in C.$$

Ορισμός 1.2.2. Η διγραμμική μορφή $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, όπου H είναι ένας χώρος Hilbert, λέγεται **συνεχής**, αν υπάρχει μια σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$|a(x_1, x_2)| \leq c\|x_1\|\|x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in H.$$

$\square$

Ορισμός 1.2.3. Η διγραμμική μορφή $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, όπου H είναι ένας χώρος Hilbert, λέγεται **πιεστική** (coercive), αν υπάρχει μια σταθερά $c_E > 0$ τέτοια ώστε

$$a(x, x) \geq c_E\|x\|^2, \quad \forall x \in H.$$

$\square$

Όπως θα αποδείξουμε στην πρόταση που ακολουθεί, μια συνεχής διγραμμική μορφή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να οριστεί ένα γραμμικός και φραγμένος τελεστής. Πριν διατυπώσουμε όμως την πρόταση, για να απλουστεύσουμε τον συμβολισμό, στο εξής θα συμβολίζουμε τη δράση ενός τελεστή A πάνω σε ένα στοιχείο $x \in \mathbf{D}(A)$ με Ax .

Πρόταση 1.2.1. Έστω H ένας χώρος Hilbert και $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και πιεστική διγραμμική μορφή. Ο τελεστής $A : H \rightarrow H^*$, που ορίζεται από τη σχέση $a(x, z) = \langle Ax, z \rangle$, για κάθε $z \in H$, είναι γραμμικός, φραγμένος και ικανοποιεί την ιδιότητα μονοτονίας

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq c_E \|x_1 - x_2\|^2. \quad (1.1)$$

Απόδειξη. Λόγω της συνέχειας της διγραμμικής μορφής a , για $x \in H$ σταθερό, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz (βλ. Θεώρημα ??), υπάρχει μοναδικό $x_0 \in H^*$ τέτοιο ώστε

$$a(x, z) = \langle x_0, z \rangle. \quad (1.2)$$

Αν στην (1.2) θέσουμε $x_0 = Ax$, τότε ορίζεται ο τελεστής $A : H \rightarrow H^*$ και ισχύει η ισότητα

$$a(x, z) = \langle Ax, z \rangle. \quad (1.3)$$

Θα αποδείξουμε ότι ο τελεστής A είναι γραμμικός. Έστω $x_1, x_2 \in H$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε, από τον ορισμό του A και τη διγραμμικότητα της a έχουμε

$$\begin{aligned} \langle A(\kappa x_1 + \lambda x_2), z \rangle &= a(\kappa x_1 + \lambda x_2, z) = a(\kappa x_1, z) + a(\lambda x_2, z) \\ &= \kappa a(x_1, z) + \lambda a(x_2, z) = \kappa \langle Ax_1, z \rangle + \lambda \langle Ax_2, z \rangle \\ &= \langle \kappa Ax_1 + \lambda Ax_2, z \rangle, \end{aligned}$$

οπότε

$$A(\kappa x_1 + \lambda x_2) = \kappa Ax_1 + \lambda Ax_2.$$

Εξάλλου, από τον ορισμό του A και τη συνέχεια της a , υπάρχει μια σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε (βλ. Ορισμός 1.2.2)

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = a(Ax, x) \leq c \|Ax\| \|x\|, \quad \forall x \in H,$$

και επομένως

$$\|Ax\| \leq c \|x\|, \quad \forall x \in H,$$

οπότε ο A είναι φραγμένος (βλ. Ορισμός ??).

Τέλος, αφού η a είναι πιεστική (βλ. Ορισμός 1.2.3) από την (1.3) έχουμε:

$$\langle Ax, x \rangle = a(x, x) \geq c_E \|x\|^2, \quad \forall x \in H, \quad (1.4)$$

οπότε αν στην (1.4) θέσουμε $x = x_1 - x_2$, λόγω της γραμμικότητας του A θα πάρουμε

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle = a(x_1 - x_2, x_1 - x_2) \geq c_E \|x_1 - x_2\|^2,$$

δηλαδή την (1.1).

Το θεώρημα που ακολουθεί αποτελεί τη βάση για τη μελέτη των μεταβολικών ανισοτήτων σε χώρους Hilbert.

Θεώρημα 1.2.1. (Stampacchia) Έστω C ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert H , $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και πιεστική διγραμμική μορφή και $x^* : H \rightarrow \mathbb{R}$ ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό, ή ισοδύναμα ένα $x^* \in H^*$ τέτοιο ώστε $x^*(x) = \langle x^*, x \rangle$, $\forall x \in H$. Τότε:

(i) Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in C$ τέτοιο ώστε

$$a(x_0, x - x_0) \geq x^*(x - x_0), \quad \forall x \in C, \quad (1.5)$$

ή, λόγω της (1.3), ισοδύναμα

$$\langle Ax_0, x - x_0 \rangle \geq \langle x^*, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in C. \quad (1.6)$$

(ii) Αν επιπλέον, η a είναι συμμετρική τότε το x_0 είναι το μοναδικό στοιχείο του C που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $F : H \rightarrow \mathbb{R}$, το οποίο ορίζεται από τη σχέση

$$F(x) = \frac{1}{2}a(x, x) - \langle x^*, x \rangle,$$

δηλαδή,

$$\frac{1}{2}a(x_0, x_0) - \langle x^*, x_0 \rangle = \min_{x \in H} F(x). \quad (1.7)$$

Απόδειξη. (i) Λόγω της (1.6) το πρόβλημα (1.5) ανάγεται στο να βρεθεί $x_0 \in C$ τέτοιο ώστε να ισχύει η ανισότητα

$$\langle x^* - Ax_0, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C. \quad (1.8)$$

Θεωρούμε μια σταθερά $\varrho > 0$, η τιμή της οποίας θα καθοριστεί αργότερα, και πολλαπλασιάζουμε την ανισότητα (??) με τη σταθερά αυτή οπότε παίρνουμε:

$$\varrho \langle x^* - Ax_0, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C,$$

$$\langle \varrho(x^* - Ax_0) + x_0 - x_0, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C,$$

ή

$$\langle (\varrho x^* - \varrho Ax_0 + x_0) - x_0, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C. \quad (1.9)$$

Από την ανισότητα (1.9) λόγω του Θεωρήματος ?? προκύπτει ότι το

$$x_0 = P_C(\varrho x^* - \varrho Ax_0 + x_0).$$

Για κάθε $x \in C$ ορίζουμε την απεικόνιση $T_\varrho : C \rightarrow C$ με

$$T_\varrho(x) = P_C(\varrho x^* - \varrho Ax + x).$$

Θα δείξουμε ότι με κατάλληλη επιλογή του $\varrho > 0$ υπάρχει $k \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η T_ϱ να είναι μια συστολή, οπότε θα έχει ένα σταθερό σημείο (βλ. Θεώρημα του σταθερού σημείου του Banach ??).

Έχουμε:

$$\|T_\varrho(x_1) - T_\varrho(x_2)\| = \|P_C(\varrho x^* - \varrho Ax_1 + x_2) - P_C(\varrho x^* - \varrho Ax_2 + x_2)\| \quad (1.10)$$

και από την Πρόταση ?? η (1.10) γίνεται

$$\begin{aligned} \|T_\varrho(x_1) - T_\varrho(x_2)\| &\leq \|(\varrho x^* - \varrho Ax_1 + x_2) - (\varrho x^* - \varrho Ax_2 + x_2)\| \\ &= \|(x_1 - x_2) - \varrho(Ax_1 - Ax_2)\|. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Από την (??) οπότε λόγω της γραμμικότητας του τελεστή A και της Πρότασης ?? παίρνουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \|T_\varrho(x_1) - T_\varrho(x_2)\|^2 &\leq \|(x_1 - x_2) - \varrho(Ax_1 - Ax_2)\|^2 \\ &= \langle (x_1 - x_2) - \varrho(Ax_1 - Ax_2), (x_1 - x_2) - \varrho(Ax_1 - Ax_2) \rangle \\ &= \|x_1 - x_2\|^2 - 2\varrho \langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle + \varrho^2 \|Ax_1 - Ax_2\|^2 \\ &\leq \|x_1 - x_2\|^2 - 2\varrho c_E \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2 \rangle + \varrho^2 c^2 \|x_1 - x_2\|^2 \\ &= (1 - 2\varrho c_E + \varrho^2 c^2) \|x_1 - x_2\|^2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Επομένως, αρκεί να επιλέξουμε το ϱ έτσι ώστε $0 < 1 - 2\varrho c_E + \varrho^2 c^2 < 1$, οπότε από την (1.12) θα έχουμε

$$\|T_\varrho(x_1) - T_\varrho(x_2)\|^2 \leq \sqrt{1 - 2\varrho c_E + \varrho^2 c^2} \|x_1 - x_2\|,$$

δηλαδή, η T_ϱ θα είναι μια συστολή με $k = \sqrt{1 - 2\varrho c_E + \varrho^2 c^2} \in (0, 1)$.

Αν πάρουμε $0 < \varrho < 2c_E/c^2$, τότε το $k \in (0, 1)$, οπότε η T_ϱ είναι μια συστολή και επομένως θα έχει μοναδικό σταθερό σημείο το x_0 .

(ii) Είναι $F(x) = \frac{1}{2}a(x, x) - \langle x^*, x \rangle$, οπότε

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_0 + (x - x_0)) \\ &= \frac{1}{2}a(x_0 + (x - x_0), x_0 + (x - x_0)) - \langle x^*, x_0 + (x - x_0) \rangle \\ &= \frac{1}{2}a(x_0, x_0) - \langle x^*, x_0 \rangle + \frac{1}{2}a(x - x_0, x - x_0) \\ &\quad + a(x - x_0, x_0) - \langle x^*, x - x_0 \rangle \\ &= F(x_0) + \frac{1}{2}a(x - x_0, x - x_0) \\ &\quad + a(x - x_0, x_0) - \langle x^*, x - x_0 \rangle. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Επειδή η a είναι πιεστική έπεται ότι

$$a(x - x_0, x - x_0) \geq 0. \tag{1.14}$$

Έστω x_0 η μοναδική λύση του προβλήματος (1.5). Επειδή η a είναι συμμετρική έπεται ότι

$$a(x - x_0, x_0) = a(x_0, x - x_0) \geq \langle x^*, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in C. \tag{1.15}$$

Από την (??) λόγω των (1.14) κι (1.15) προκύπτει

$$F(x) \geq F(x_0), \quad \forall x \in C,$$

δηλαδή ότι το x_0 ελαχιστοποιεί το F στο C . □

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι η γενίκευση του Θεωρήματος ?? στη ειδική περίπτωση όπου το C είναι ολόκληρος ο χώρος Hilbert H και λόγω αυτής της ιδιότητας αποτελεί ένα απλό και αποτελεσματικό εργαλείο για τη μελέτη των γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Θεώρημα 1.2.2. (Lax-Milgram) Έστω H ένας χώρος Hilbert και $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και πιεστική διγραμμική μορφή. Τότε, για κάθε $x^* \in H^*$:

(i) Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in H$ τέτοιο ώστε

$$a(x_0, x) = \langle x^*, x \rangle, \quad \forall x \in H. \quad (1.16)$$

(ii) Αν επιπλέον, η a είναι συμμετρική τότε το x_0 είναι το μοναδικό στοιχείο του H το οποίο ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $F : H \rightarrow \mathbb{R}$, το οποίο ορίζεται από τη σχέση

$$F(x) = \frac{1}{2}a(x, x) - \langle x^*, x \rangle,$$

δηλαδή

$$\frac{1}{2}a(x_0, x_0) - \langle x^*, x_0 \rangle = \min_{x \in H} F(x). \quad (1.17)$$

Απόδειξη. (i) Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Stampacchia στην ειδική περίπτωση όπου το $C = H$, δηλαδή ολόκληρος ο χώρος. Έστω x_0 η μοναδική λύση της (1.5) και $z \in H$. Τότε, επειδή εργαζόμαστε σε ολόκληρο το διανυσματικό χώρο H και όχι σε ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολό του τα στοιχεία $x_1 = x_0 + z$ και $x_1 = x_0 - z$ ανήκουν στο χώρο H .

Από την (??) για $x = x_1$ παίρνουμε

$$\langle Ax_0, (x_0 + z) - x_0 \rangle \geq \langle x^*, (x_0 + z) - x_0 \rangle,$$

ή

$$\langle Ax_0, z \rangle \geq \langle x^*, z \rangle. \quad (1.18)$$

Πάλι από την (1.6) για $x = x_2$ παίρνουμε

$$\langle Ax_0, (x_0 - z) - x_0 \rangle \geq \langle x^*, (x_0 - z) - x_0 \rangle,$$

ή

$$\langle Ax_0, -z \rangle \geq \langle x^*, -z \rangle.$$

και λόγω της γραμμικότητας η τελευταία γίνεται

$$\langle Ax_0, z \rangle \leq \langle x^*, z \rangle. \quad (1.19)$$

Από τις (1.18) και (1.19) προκύπτει ότι

$$\langle Ax_0, z \rangle = \langle x^*, z \rangle$$

και επειδή το $z \in H$ είναι τυχόν λόγω της (??) παίρνουμε

$$a(x_0, z) = \langle x^*, z \rangle, \quad \forall z \in H.$$

(ii) Επειδή η a είναι συμμετρική, αρκεί να επαναλάβουμε την απόδειξη του δεύτερου μέρους του Θεωρήματος του Stampacchia. $\square$