

Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση

Μια Εισαγωγή

Νίκος Λαμπρόπουλος

17 Δεκεμβρίου 2024

Περιεχόμενα

1	Θεωρία του Σταθερού Σημείου	5
1.1	Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach	5
1.2	Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer	8
1.3	Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder	10

Κεφάλαιο 1

Θεωρία του Σταθερού Σημείου

Η θεωρία του σταθερού σημείου αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά κεφάλαια της μη γραμμικής ανάλυσης και απαντά στο ερώτημα πότε μια απεικόνιση $f : A \subseteq X \rightarrow X$, όπου ο X είναι ένας χώρος Banach (ή και ένας πλήρης μετρικός χώρος), αφήνει κάποια σημεία του A αμετάβλητα (σταθερά), δηλαδή, πότε η εξίσωση $f(x) = x$ έχει λύση. Αν $X = \mathbb{R}$ η εξίσωση αυτή μπορεί να είναι μια αλγεβρική εξίσωση, ωστόσο αν ο X είναι ένας συναρτησιακός χώρος τότε μπορεί να είναι μια διαφορική ή μια ολοκληρωτική εξίσωση. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μερικά από τα πιο βασικά θεωρήματα της θεωρίας του σταθερού σημείου. Θα αρχίσουμε από την αρχή της συστολής του Banach, η οποία εξασφαλίζει την ύπαρξη σταθερού σημείου για απεικονίσεις που είναι συστολές, και στη συνέχεια θα αναφέρουμε μερικά πιο γενικά θεωρήματα σταθερού σημείου όπως το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer καθώς επίσης και το θεώρημα σταθερού σημείου του Schauder.

1.1 Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach

Ορισμός 1.1.1. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$ και η απεικόνιση $f : A \rightarrow X$. Το σημείο $x \in X$ για το οποίο έχουμε $f(x) = x$ λέγεται **σταθερό σημείο** της f .

□

Παράδειγμα 1.1.1. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$, τότε κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερό σημείο της f .

Παράδειγμα 1.1.2. Έστω οι συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x^2$ και $f_3(x) = 1/x$, αντίστοιχα. Τότε, η f_1 έχει ένα σταθερό σημείο το $(2, 2)$, η f_2 έχει δύο σταθερά σημεία τα $(0, 0)$ και $(1, 1)$ ενώ η f_3 δεν έχει κανένα σταθερό σημείο.

Παράδειγμα 1.1.3. Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ έχει ένα σταθερό σημείο.

Απόδειξη. Απόδειξη. Για τη συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ με $g(x) = f(x) - x$ ισχύει $g(a)g(b) \leq 0$ που σημαίνει ότι $g(a) = 0$ ή $g(b) = 0$ ή $g(a)g(b) < 0$. Άρα, θα είναι $f(a) = a$ ή $f(b) = b$ ή θα υπάρξει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$ (Θεώρημα του Bolzano).

Ορισμός 1.1.2. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Η απεικόνιση $f : A \rightarrow X$ λέγεται **συστολή** αν υπάρχει $\varrho \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq \varrho d(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in A. \quad (1.1)$$

□

Παρατήρηση 1.1.1. Μια συστολή είναι μια Lipschitz συνάρτηση (βλ. Ορισμός ?? με σταθερά $M \in (0, 1)$).

Θεώρημα 1.1.1. (Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach) Έστω $A \subset X$ ένα μη κενό, κλειστό υποσύνολο ενός πλήρους μετρικού χώρου X και $f : A \rightarrow A$ μια συστολή. Τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο. Αν επί πλέον x_1 είναι ένα τυχαίο σημείο στο A και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια ακολουθία που ορίζεται από τη σχέση

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

Τότε, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ και

$$d(x_n, x_0) \leq \frac{\varrho^{n-1}}{1 - \varrho} d(x_1, x_2). \quad (1.3)$$

Απόδειξη. Έστω $x \in A$. Τότε, από την (1.2), έχουμε

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \varrho d(x_{n-1}, x_n), \quad n > 1$$

το οποίο διαδοχικά μας δίνει

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varrho^{n-1} d(x_1, x_2).$$

Από τη σχέση αυτή έπεται ότι

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq \varrho d(x_{n-1}, x_n), \quad n > 1$$

οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq (\varrho^{n-1} + \varrho^n + \cdots + \varrho^{n+m-2}) d(x_1, x_2) \\ &= \varrho^{n-1} (1 + \varrho + \cdots + \varrho^{m-1}) d(x_1, x_2) \\ &= \varrho^{n-1} \frac{\varrho^m - 1}{\varrho - 1} d(x_1, x_2) \\ &\leq \frac{\varrho^{n-1}}{1 - \varrho} d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Άρα, η $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ακολουθία Cauchy και επειδή ο X είναι πλήρης, υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \rightarrow x_0$. Επι πλέον, επειδή ο A είναι κλειστός το $x_0 \in A$. Τέλος, παίρνοντας το όριο για $m \rightarrow \infty$, παίρνουμε την (1.3).

Θα αποδείξουμε ότι το σταθερό σημείο της f είναι το x_0 . Έχουμε

$$\begin{aligned} d(x_0, f(x_0)) &\leq d(x_0, x_n) + d(x_n, f(x_0)) = d(x_0, x_n) + d(f(x_{n-1}), f(x_0)) \\ &\leq d(x_0, x_n) + \varrho d(x_{n-1}, x_0). \end{aligned}$$

Από τη σχέση αυτή για $n \rightarrow \infty$ παίρνουμε ότι $d(x_0, f(x_0)) = 0$, δηλαδή, $f(x_0) = x_0$. Θα αποδείξουμε ότι το x_0 είναι μοναδικό. Πραγματικά, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δυο σταθερά σημεία τα $x_{0,1}, x_{0,2}$, τότε, θα έχουμε

$$d(x_{0,1}, x_{0,2}) = d(f(x_{0,1}), f(x_{0,2})) \leq \varrho d(x_{0,1}, x_{0,2}),$$

το οποίο είναι άτοπο, γιατί το $\varrho \in (0, 1)$. □

Παρατήρηση 1.1.2. Αν <χαλαρώσουμε> την συνθήκη (1.1), το Θεώρημα 1.1.1 δεν ισχύει (βλ. Παράδειγμα 1.1.4).

Παράδειγμα 1.1.4. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\pi}{2} + x - \operatorname{Arctan} x$, τότε

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} < 1.$$

Έτσι, από το θεώρημα μέσης τιμής, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| |x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|.$$

Ωστόσο, η f δεν έχει σταθερό σημείο.

Αν ο μετρικός χώρος X είναι συμπαγής, τότε ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.2. (Θεώρημα σταθερού σημείου του Edelstein) Έστω (x, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2. \quad (1.4)$$

Τότε, η f έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο.

1.2 Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer

Το θεώρημα της συστολής του Banach είναι ένα πολύ χρήσιμο μέσο για την συναρτησιακή ανάλυση, όμως είναι αρκετά περιοριστικό γιατί η συνθήκη ότι η συνάρτηση f είναι μια συστολή δεν ισχύει στις περισσότερες των περιπτώσεων που παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Αυτό το γεγονός οδηγεί στην αναζήτηση θεωρημάτων σταθερού σημείου, όπου δεν απαιτείται η f να είναι συστολή παρά μόνο συνεχής. Αυτό όμως συνεπάγεται επιπλέον απαιτήσεις, δηλαδή κάποιες <καλές> ίσως ιδιότητες και περιορισμούς στο πεδίο ορισμού της f , όπως για παράδειγμα να είναι συμπαγές. Θα διακρίνουμε, ωστόσο, την περίπτωση όπου $\dim X < +\infty$ από εκείνη όπου $\dim X = +\infty$.

Θεώρημα 1.2.1. (Θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer I) Έστω $\bar{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ η μοναδιαία κλειστή μπάλα και $f : \bar{B}(0, 1) \rightarrow \bar{B}(0, 1)$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε, η f έχει ένα σταθερό σημείο.

Το Θεώρημα του Brouwer εξακολουθεί να ισχύει αν αντί της μοναδιαίας μπάλας θεωρηθεί η μπάλα $\bar{B}(0, R)$, δηλαδή η μπάλα με κέντρο την αρχή και ακτίνα R .

Πόρισμα 1.2.1. Έστω $\bar{B}(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ η μοναδιαία κλειστή μπάλα ακτίνας R και $f : \bar{B}(0, R) \rightarrow \bar{B}(0, R)$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε, η f έχει ένα σταθερό σημείο.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $g : \bar{B}(0, 1) \rightarrow \bar{B}(0, 1)$ με $g(x) = \frac{f(Rx)}{R}$. Προφανώς, η g είναι συνεχής, οπότε από το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer θα έχει ένα σταθερό σημείο x_0 , το οποίο συνεπάγεται ότι το Rx_0 είναι σταθερό σημείο για την f .

Πόρισμα 1.2.2. Έστω $f : \bar{B}(0, R) \rightarrow \bar{B}(0, R)$ μια συνεχής απεικόνιση τέτοια ώστε $\langle f(x), x \rangle \geq 0$ για όλα τα x για τα οποία ισχύει $|x| = R > 0$. Τότε, υπάρχει x_0 με $|x_0| \leq R$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $f(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in \bar{B}(0, R)$. Ορίζουμε την απεικόνιση $g : \bar{B}(0, R) \rightarrow \bar{B}(0, R)$ με $g(x) = -\frac{R}{|f(x)|}f(x)$. Προφανώς, η g είναι συνεχής, οπότε από το Πρόρισμα 1.2.1 προκύπτει ότι θα έχει ένα σημείο x_0 , τέτοιο ώστε $x_0 = g(x_0)$. Επειδή $|x_0| = |g(x_0)| = R$, έχουμε

$$0 < R^2 = |x_0|^2 = \langle x_0, x_0 \rangle = \langle x_0, g(x_0) \rangle = -\frac{R}{|f(x_0)|} \langle x_0, f(x_0) \rangle \leq 0,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Η ισχύς του θεωρήματος του Brouwer βρίσκεται στο γεγονός ότι εξακολουθεί να ισχύει για υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τα οποία είναι πιο γενικά από την κλειστή μπάλα, ειδικότερα για συμπαγή και κυρτά σύνολα.

Θεώρημα 1.2.2. (Θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer II) Έστω $C \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές και κυρτό σύνολο και $f : C \rightarrow C$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε, η f έχει ένα σταθερό σημείο.

Ορισμός 1.2.1. (Πιεστική απεικόνιση) Μια απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται **πιεστική** (coercive) αν $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\langle f(x), x \rangle}{|x|} = +\infty$. $\square$

Η ακόλουθη πρόταση αποτελεί μια σημαντική εφαρμογή του θεωρήματος Brouwer.

Πρόταση 1.2.1. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια συνεχής και πιεστική απεικόνιση. Τότε η f είναι επί, δηλαδή, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει λύση για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Για τυχόν $y \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - y$. Επειδή η f είναι πιεστική, για κάθε $M > 0$ υπάρχει $R > 0$, τέτοιο ώστε αν $|x| > R$, τότε $\langle f(x), x \rangle > M|x|$. Αν επιλέξουμε $M = |y|$, παίρνουμε για $|x| = R$,

$$\langle g(x), x \rangle = \langle f(x) - y, x \rangle \geq \langle f(x), x \rangle - |y||x| > 0.$$

Από το Πρόρισμα ??, προκύπτει ότι υπάρχει x τέτοιο ώστε $g(x) = 0$, δηλαδή $f(x) = y$.

Η ακόλουθη πρόταση δείχνει ότι δεν είναι δυνατή η επέκταση του θεωρήματος σταθετού σημείου του Brouwer σε χώρους με άπειρη διάσταση.

Θεώρημα 1.2.3. (Kakutani) Έστω H ένας απειροδιάστατος χώρος Hilbert. Τότε, υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $f : \bar{B}_H(0, 1) \rightarrow \bar{B}_H(0, 1)$ η οποία δεν έχει σταθερό σημείο. (Αυτό συμβαίνει γιατί η κλειστή μοναδιαία μπάλα $\bar{B}_H(0, 1)$ δεν είναι συμπαγής).

1.3 Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder

Είδαμε ότι το Θεώρημα του Brouwer δεν ισχύει στις άπειρες διαστάσεις για την κλειστή μπάλα ενός χώρου Hilbert. Ωστόσο, αν το υποσύνολο C ενός απειροδιάστατου χώρου Hilbert είναι κυρτό και συμπαγές ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.3.1. (Θεώρημα σταθερού σημείου του Schauder) Έστω X ένας χώρος Banach και $C \subset X$ ένα κυρτό και συμπαγές υποσύνολό του. Αν η συνάρτηση $f : C \rightarrow C$ είναι συνεχής, τότε η f έχει ένα σταθερό σημείο.

Ορισμός 1.3.1. Έστω $A \subset X$. Ο κυρτός φλοιός (convex hull) του A που συμβολίζεται με $\text{conv}A$ είναι το σύνολο των κυρτών συνδιασμών από το A

$$\text{conv}A = \left\{ x : \exists x_i \in A, t_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n t_i = 1, x = \sum_{i=1}^n t_i x_i \right\}.$$

□

Παρατήρηση 1.3.1. Το σύνολο $\text{conv}A$ είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο το οποίο περιέχει το A . Το μικρότερο κλειστό κυρτό σύνολο το οποίο περιέχει το A λέγεται κλειστός κυρτός φλοιός του A και συμβολίζεται με $\overline{\text{conv}A}$. Είναι εύκολο ναδειχτεί ότι $\overline{\text{conv}A} = \overline{\text{conv}A}$.

Θεώρημα 1.3.2. (Mazur) Αν X είναι ένας χώρος Banach και $A \subset X$ συμπαγές, τότε το σύνολο $\overline{\text{conv}A}$ είναι συμπαγές.

Επανερχόμαστε στο θεώρημα σταθερού σημείου του Schauder. Σε πολλές εφαρμογές το C δεν είναι συμπαγές, ωστόσο μπορεί να είναι συμπαγής η f . Σε αυτή την περίπτωση έχουμε το ακόλουθο πολύ χρήσιμο πόρισμα:

Πόρισμα 1.3.1. Έστω C ένα κλειστό, φραγμένο και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach X και $f : C \rightarrow C$ μια συνεχής και συμπαγής απεικόνιση. Τότε, η f έχει ένα σταθερό σημείο.

Απόδειξη. Αφού η f είναι συμπαγής, το $\overline{f(C)}$ είναι συμπαγές, οπότε και το $C_1 = \overline{\text{conv}f(C)}$. Εξάλλου, το $C_1 \subset \overline{\text{conv}C} = C$, το οποίο συνεπάγεται ότι η f απεικονίζει το C_1 στον εαυτό του. Επομένως, η f έχει ένα σταθερό σημείο.