

Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση

Μια Εισαγωγή

Νίκος Λαμπρόπουλος

17 Δεκεμβρίου 2024

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Χώροι Sobolev

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να δοθεί μια εισαγωγή στους χώρους Sobolev. Κίνητρο για αυτή την εισαγωγή αλλά και τη μελέτη των χώρων Sobolev αποτελεί το γεγονός ότι οι λύσεις σημαντικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (όταν αυτές υπάρχουν) ανήκουν με φυσικό τρόπο σε αυτούς τους χώρους. Σε μια πρώτη προσέγγιση του τι είναι οι χώροι Sobolev, μπορούμε να πούμε ότι είναι φυσικές γενικεύσεις των Lebesgue χώρων, δηλαδή των L^p χώρων. Με απλά λόγια, αν $\Omega \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο, $1 \leq p \leq \infty$ και k ένας θετικός ακέραιος, ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος συναρτήσεων στον $L^p(\Omega)$ (στην πραγματικότητα αποτελείται από κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων) των οποίων υπάρχουν οι «μερικές παράγωγοι» τάξης μικρότερης ή ίσης με k και ανήκουν επίσης στον $L^p(\Omega)$. Αυτές οι «μερικές παράγωγοι» δεν ορίζονται με την κλασική έννοια και ονομάζονται **ασθενείς μερικές παράγωγοι** και είναι οι γενικευμένες παράγωγοι που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ωστόσο σε αυτό το κεφάλαιο θα τις μελετήσουμε από μια άλλη σκοπιά.

1.1 Η Ασθενής Παράγωγος

Η Ασθενής Παράγωγος σε Διάσταση 1

Θα ορίσουμε πρώτα την ασθενή παράγωγο στην μονοδιάστατη περίπτωση και στη συνέχεια στις μεγαλύτερες διαστάσεις.

Έστω $f, \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις που έχουν συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$. Τότε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = f(x) \varphi(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx \quad (1.1)$$

Αν

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \quad (1.2)$$

τότε η σχέση (1.1) γράφεται

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx \quad (1.3)$$

Από τη σχέση (1.3) έπεται ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του β' μέλους ακόμα και αν η συνάρτηση f είναι απλά μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση ($f \in L^1([a, b])$), χωρίς δηλαδή να είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $[a, b]$, ($f \notin C^1([a, b])$), αρκεί η φ να είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $[a, b]$ και να ισχύει φυσικά η σχέση (1.2). Συνέπεια αυτής της παρατήρησης είναι το γεγονός ότι μέσω της (1.3) μπορούμε να ορίσουμε μια «παράγωγο» για την f χωρίς να είναι διαφορίσιμη στο $[a, b]$ με την κλασική έννοια. Η απλή αυτή σχέση οδήγησε τον Sobolev το 1937 στην έννοια της ασθενούς παραγώγου και τους χώρους Sobolev στη συνέχεια. Είναι προφανές επίσης ότι η βαρύτητα πέφτει πλέον στην «βοηθητική» συνάρτηση φ , η οποία πρέπει να ικανοποιεί όπως προαναφέραμε τη σχέση (1.2) στο $[a, b]$ αλλά να είναι και παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό. Όπως θα δούμε στη συνέχεια θα απαιτούμε οι συναρτήσεις αυτές να είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες ώστε να μπορούμε να ορίσουμε ασθενείς παραγώγους της συνάρτησης f οποιασδήποτε τάξης.

Ορισμός 1.1.1. Έστω $f \in L^1[a, b]$. Θα λέμε ότι η f έχει **ασθενή παράγωγο** στο $[a, b]$ αν υπάρχει συνάρτηση $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g \in L^1[a, b]$, τέτοια ώστε

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b g(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, b) \quad (1.4)$$

Η συνάρτηση g ονομάζεται **ασθενής παράγωγος** της $f(x)$ στο $[a, b]$ και γράφουμε $g(x) = f'(x)$. $\square$

Ορισμός 1.1.2. Έστω $f \in L^1[a, b]$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **m -τάξης ασθενή παράγωγο** στο (a, b) , αν υπάρχει συνάρτηση τέτοια ώστε $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x) \varphi^{(m)}(x) dx = (-1)^m \int_a^b g(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, b)$$

και γράφουμε $g(x) = f^{(m)}(x)$. $\square$

Ένα πρώτο ερώτημα που τίθεται σε αυτό το σημείο είναι το αν η ασθενής παράγωγος είναι μοναδική. Η απάντηση είναι καταφατική αλλά για να το αποδείξουμε θα χρειαστούμε την ακόλουθη βασική πρόταση, γνωστή ως Variational Lemma.

Πρόταση 1.1.1. (Variational Lemma) Έστω $f \in L^1(a, b)$. Αν ισχύει

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, b),$$

τότε $f(x) = 0$ σχεδόν παντού στο (a, b) .

Απάντηση στη παραπάνω ερώτηση δίνει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.1.2. Η ασθενής παράγωγος μιας συνάρτησης $f \in L^1(a, b)$ είναι μοναδική.

Απόδειξη. Έστω g_1, g_2 ασθενείς παράγωγοι της f . Τότε θα έχουμε:

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b g_1(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, b)$$

και

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b g_2(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, b)$$

οπότε

$$\int_a^b [g_1(x) - g_2(x)] \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, b).$$

Από την Πρόταση 1.1.1 προκύπτει ότι $g_1 = g_2$ σχεδόν παντού.

Ένα δεύτερο ερώτημα που τίθεται αφορά τη σχέση μεταξύ της ασθενούς και της συνήθους παραγώγου μιας συνάρτησης στην περίπτωση που υπάρχουν και οι δύο. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνεται από την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.1.3. Αν η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση στο (a, b) ($f \in C^1(a, b)$), τότε η ασθενής παράγωγος της στο ταυτίζεται με την συνήθη παράγωγό της στο διάστημα αυτό.

Απόδειξη. Έστω g η ασθενής παράγωγος της f και f' η συνήθης παράγωγός της. Τότε θα έχουμε:

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b g(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, b)$$

και

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, b)$$

οπότε

$$\int_a^b [g(x) - f'(x)] \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, b).$$

Από την Πρόταση ?? προκύπτει ότι $g(x) = f'(x)$ σχεδόν παντού.

Στη συνέχεια θα δώσουμε μερικά παραδείγματα υπολογισμού της ασθενούς παραγώγου μερικών συναρτήσεων, κάποιες από τις οποίες είναι ιδιαίτερα σημαντικές.

Παράδειγμα 1.1.1. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η ασθενής παράγωγος της f είναι η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) \varphi'(x) dx &= \int_0^1 x \varphi'(x) dx + \int_1^2 1 \varphi'(x) dx \\ &= x \varphi(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x) dx + \varphi(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 0 \varphi(x) dx \\ &= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x) dx + \varphi(2) - \varphi(1) \\ &= - \int_0^1 1 \varphi(x) dx - \int_1^2 0 \varphi(x) dx = - \int_0^2 g(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό της ασθενούς παραγώγου η ασθενής παράγωγος της συνάρτησης f είναι η συνάρτηση g .

Παράδειγμα 1.1.2. Έστω $f : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Θα αποδείξουμε ότι συνάρτηση η f δεν έχει ασθενή παράγωγο.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια τοπικά ολοκληρώσιμη στο $[0, 2]$ συνάρτηση g η οποία είναι ασθενής παράγωγος της f . Τότε, για κάθε $\varphi \in C_0^\infty([0, 2])$ θα έχουμε

$$\int_0^2 g(x) \varphi(x) dx = - \int_0^2 f(x) \varphi'(x) dx$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(x) \varphi(x) dx &= - \int_0^1 x \varphi'(x) dx - 2 \int_1^2 \varphi'(x) dx \\ &= -x\varphi(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \varphi(x) dx - 2x\varphi(x) \Big|_1^2 \\ &= -\varphi(1) + \int_0^1 \varphi(x) dx + 2\varphi(1) \\ &= \int_0^1 \varphi(x) dx + \varphi(1) \end{aligned}$$

Άρα

$$\int_0^2 g(x) \varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx = \varphi(1)$$

Υποθέτουμε ότι η $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ είναι μια ακολουθία στον $C_0^\infty([0, 2])$ τέτοια ώστε $\varphi_j(1) = 1$ και $\varphi_j(x) \rightarrow 0$, καθώς το $j \rightarrow \infty$ για $x \neq 1$. Τότε θα έχουμε

$$\int_0^2 g(x) \varphi_j(x) dx - \int_0^1 \varphi_j(x) dx = 1,$$

οπότε για $j \rightarrow \infty$ παίρνουμε $0 = 1$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει η ασθενής παράγωγος της f .

Παράδειγμα 1.1.3. Έστω $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$. Τότε, η ασθενής παράγωγος της f είναι η συνάρτηση $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$, ωστόσο, η τελευταία δεν έχει ασθενή παράγωγο.

Απόδειξη. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 f(x) \varphi'(x) dx &= \int_{-1}^0 (-x) \varphi'(x) dx + \int_0^1 x \varphi'(x) dx \\
 &= (-x) \varphi(x) \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (-1) \varphi(x) dx \\
 &\quad + x \varphi(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (+1) \varphi(x) dx \\
 &= \int_{-1}^0 \varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx \\
 &= - \left(\int_{-1}^0 (-1) \varphi(x) dx - \int_0^1 (+1) \varphi(x) dx \right) \\
 &= - \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x) \varphi(x) dx
 \end{aligned}$$

Άρα, η ασθενής παράγωγος της f είναι η συνάρτηση $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$, όπου

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Η συνάρτηση $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$ δεν έχει ασθενή παράγωγο (βλ. Παράδειγμα 1.2.1 β' μέρος).

Παράδειγμα 1.1.4. (Συνάρτηση Dirichlet) Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

έχει ασθενή παράγωγο την $g(x) = 0$.

Απόδειξη. Η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $[0, 1]$. Ωστόσο, έχει ασθενή παράγωγο την $g(x) = 0$, αφού για κάθε $\varphi \in C_0^\infty([0, 1])$ έχουμε

$$\int_0^1 f(x) \varphi'(x) dx = \int_{\mathbb{Q}} 1 \varphi'(x) dx + \int_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}} 0 \varphi'(x) dx = - \int_0^1 0 \varphi(x) dx.$$

Παράδειγμα 1.1.5. Η συνάρτηση H του Heaviside έχει ασθενή παράγωγο τη συνάρτηση δ του Dirac (βλ. και Παράδειγμα ??).

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\int_{-1}^1 H(x) \varphi'(x) dx = \int_0^1 \varphi'(x) dx = -\varphi(0), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(-1, 1).$$

Επειδή η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ από το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} 2\varepsilon \varphi(x_0) = \varphi(x_0),$$

όπου $x_0 \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$, οπότε καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε ότι $x_0 = 0$. Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(x_0) = \varphi(0).$$

Τελικά, έχουμε

$$\int_{-1}^1 H(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(-1, 1),$$

οπότε $H'(x) = \delta(x)$.

Η Ασθενής Μερική Παράγωγος

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια της ασθενούς μερικής παραγώγου. Η μονοδιάστατη μορφή της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες γράφεται

$$\int_a^b (u(x) v(x))' dx = u(x) v(x) \Big|_a^b \quad (1.5)$$

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ένα μη κενό, φραγμένο και ανοικτό σύνολο με λείο σύνορο και $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ πραγματικές συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους. Αν $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, τότε συμβολίζουμε

$$D_i u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1.6)$$

Σημείωση 1.1.1. Σύμφωνα με την (??), αν μια συνάρτηση u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους η $D_i u$ ταυτίζεται με τη συνήθη μερική παράγωγο $\partial u / \partial x_i$, ωστόσο, σε κάθε περίπτωση με $D_i u$ θα συμβολίζουμε τη γενικευμένη μερική παράγωγο της u ως προς x_i .

Η γενίκευση της (1.5) προκύπτει από το Θεώρημα του Gauss

$$\int_{\Omega} D_i(uv)dx = \int_{\partial\Omega} uvn_i dS, \quad (1.7)$$

όπου n_i είναι η i -οστή συνιστώσα του μοναδιαίου διανύσματος n που είναι κάθετο στην επιφάνεια $\partial\Omega$ και κατευθύνεται προς τα έξω.

Έτσι, αν η v μηδενίζεται στο σύνορο $\partial\Omega$, τότε από την (1.7) έχουμε

$$\int_{\Omega} (D_i u) v dx = - \int_{\Omega} u (D_i v) dx \quad (1.8)$$

Μπορούμε τώρα, λόγω της (1.8), να δώσουμε τον ορισμό της ασθενούς μερικής παραγώγου.

Ορισμός 1.1.3. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ένα μη κενό, φραγμένο και ανοικτό σύνολο με λείο σύνορο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους ($u \in C^1(\Omega)$) και $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Θα λέμε ότι η u έχει i -οστή ασθενή μερική παράγωγο στο Ω αν υπάρχει συνάρτηση $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.9)$$

Η συνάρτηση v ονομάζεται **i -οστή ασθενής παράγωγος** της $f(x)$ στο Ω και συμβολίζεται με $D_i u$ ή (αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης) και με $v = \partial u / \partial x_i$ (βλ. Ορισμός 1.1.4). $\square$

Έστω $u \in C^k(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ και $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ένας πολυδείκτης τέτοιος ώστε $|a| \leq k$ (βλ. Ορισμός 1.1.1). Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\int_{\Omega} u(x) D^a \varphi(x) dx = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} D^a u(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.10)$$

Παρατήρηση 1.1.1. Το αριστερό μέλος της (1.10) έχει νόημα ακόμα και αν η $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

Ορισμός 1.1.4. Έστω $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ και $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ένας πολυδείκτης τέτοιος ώστε $|a| \leq k$. Τότε η συνάρτηση είναι η **a -τάξης ασθενής μερική παράγωγος** της u και θα την συμβολίζουμε $D^a u = v$, αν

$$\int_{\Omega} u D^a \varphi dx = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.11)$$

$\square$

Από τον ορισμό της ασθενούς μερικής παραγώγου (βλ. (1.1.3)), τη σχέση (1.6) και τον ορισμό του πολυδείκτη (βλ. (??)) προκύπτει η σχέση

$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = D^{(0, \dots, a_i=1, \dots, 0)} u, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1.12)$$

Ορισμός 1.1.5. Έστω $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Η **ασθενής κλίση (gradient)** (ή η **παράγωγος**, όπως συχνά λέγεται) της u ορίζεται ως το διάνυσμα

$$\nabla u = Du = (D_1 u, D_2 u, \dots, D_n u). \quad (1.13)$$

□

Παρατήρηση 1.1.2. Οι κλασικές παράγωγοι ορίζονται ως σημειακά όρια πηλίκων διαφορών, ενώ οι ασθενείς παράγωγοι ορίζονται ως συναρτήσεις που ικανοποιούν τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

Παρατήρηση 1.1.3. Η αλλαγή της συνάρτησης σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν δεν επηρεάζει τις ασθενείς παράγωγους της.

Παρατήρηση 1.1.4. Οι ασθενείς παράγωγοι έχουν τις ίδιες ιδιότητες με κλασικές παραγώγους.

Σημείωση 1.1.2. Επειδή χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για τις κλασικές και για τις ασθενείς παραγώγους πρέπει να έχουμε πάντοτε ξεκαθαρισμένο το πλαίσιο στο οποίο εργαζόμαστε.

Παρατήρηση 1.1.5. Εάν η $u \in C^k(\Omega)$, τότε οι κλασικές μερικές παραγώγους μέχρι τάξης k είναι επίσης οι αντίστοιχες ασθενείς παράγωγοι της u . Υπό αυτήν την έννοια, οι ασθενείς παράγωγοι γενικεύουν τις κλασικές παραγώγους.

Παρατήρηση 1.1.6. Αν $u = 0$ σχεδόν παντού σε ανοιχτό σύνολο, τότε $D^a u = 0$ σχεδόν παντού στο ίδιο σύνολο.

Παρατήρηση 1.1.7. Η πρόταση που ακολουθεί αποτελεί γενίκευση για το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού μεταβολών στην περίπτωση των πολλών διαστάσεων αλλά και για συναρτήσεις τοπικά ολοκληρώσιμες.

Πρόταση 1.1.4. (Variational Lemma) Αν η $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ικανοποιεί την σχέση

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

τότε $u = 0$ σχεδόν παντού στο $\partial\Omega$.

Παρατήρηση 1.1.8. Η Πρόταση 1.1.4 αποτελεί γενίκευση στις πολλές διαστάσεις της Πρότασης 1.1.1.

Πρόταση 1.1.5. Η ασθενής k -τάξης μερική παράγωγος μιας συνάρτησης $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 1$, αν υπάρχει είναι μοναδική εκτός ίσως από ένα σύνολο μέτρου μηδενός.

Θα παρουσιάσουμε πρώτα τους πρώτης τάξης χώρους Sobolev και μετά χώρους Sobolev ανώτερης τάξης.

1.2 Οι Χώροι Sobolev $W^{1,p}(I)$ και $W_0^{1,p}(I)$

Ο Χώρος Sobolev $W^{1,p}(I)$

Θα αναφερθούμε πρώτα στο χώρο $W^{1,p}(I)$, όπου I είναι ένα διάστημα φραγμένο ή μη στον $\mathbb{R}$ και μετά στον $W^{1,p}(\Omega)$, όπου Ω είναι ένα χωρίο φραγμένο ή μη στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Ορισμός 1.2.1. Έστω $I = (a, b)$, ένα διάστημα φραγμένο ή μη και έστω $p \in \mathbb{R}$, με $1 \leq p \leq \infty$. Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(I)$ ορίζεται ως ο

$$W^{1,p}(I) = \left\{ f \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ τ.ω. } \int_I f \varphi' = - \int_I g \varphi \right\},$$

για κάθε $\varphi \in C_0^\infty(I)$.

Δηλαδή:

Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(I)$ ορίζεται ως ο χώρος των L^p παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο I των οποίων η ασθενής παράγωγος ανήκει επίσης στον L^p .

(Μπορούμε να χρησιμοποιούμε ως χώρο συναρτήσεων ελέγχου και τον $C_0^1(I)$ αντί του $C_0^\infty(I)$).

Ο χώρος $W^{1,p}(I)$, για $1 \leq p < \infty$ (συνήθως) εφοδιάζεται με τη norm

$$\begin{aligned} \|f\|_{W^{1,p}(I)} &= \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_I |f'(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \|f\|_{L^p(I)} + \|f'\|_{L^p(I)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

και για $p = \infty$, με την

$$\|f\|_{W^{1,\infty}(I)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in I} |f(x)| + \operatorname{ess\,sup}_{x \in I} |f'(x)|. \quad (1.15)$$

Μπορούμε, όμως να χρησιμοποιήσουμε αντίστοιχα τις ισοδύναμες norms

$$\begin{aligned}\|f\|_{W^{1,p}(I)} &= \left(\int_I (|f(x)|^p + |f'(x)|^p) dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\|f\|_{L^p(I)}^p + \|f'\|_{L^p(I)}^p \right)^{1/p}\end{aligned}\quad (1.16)$$

και

$$\|f\|_{W^{1,\infty}(I)} = \max\{\|f\|_{L^\infty(I)}, \|f'\|_{L^\infty(I)}\}.\quad (1.17)$$

Θέτουμε

$$H^1(I) = W^{1,2}(I).$$

Ο χώρος H^1 εφοδιάζεται με το εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g)_{H^1} = (f, g)_{L^2} + (f', g')_{L^2}\quad (1.18)$$

και η norm του δίνεται από από τη σχέση

$$\|f\|_{H^1} = \sqrt{\|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2}.\quad (1.19)$$

□

Σημείωση 1.2.1. Μπορούμε, αν δεν δημιουργείται σύγχυση, να γράφουμε $W^{1,2}$ αντί $W^{1,2}(I)$ και H^1 αντί $H^1(I)$.

Παρατήρηση 1.2.1. Αν μια συνάρτηση $f \in C^1(I) \cap L^p(I)$, όπου το I είναι ένα διάστημα φραγμένο ή μη και $f' \in L^p(I)$, όπου f' είναι η παράγωγός της (με τη συνήθη έννοια), τότε, η $f \in W^{1,p}(I)$. Αν το διάστημα I είναι φραγμένο, τότε, $C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I)$, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$.

Παρατήρηση 1.2.2. Από τον ορισμό του $W^{1,p}$, $1 \leq p \leq \infty$ προκύπτει ότι μια συνάρτηση ανήκει στον χώρο αυτό αν είναι φραγμένη ως προς τη norm αυτού του χώρου. Θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια ότι τέτοιες συναρτήσεις δεν είναι απαραίτητο να έχουν τις παραδοσιακά «καλές ιδιότητες» που έπαιζαν σημαντικό ρόλο στον απειροστικό λογισμό, δηλαδή, τη συνέχεια, τη διαφορισιμότητα αλλά και το φραγμένο με την κλασική έννοια. Έχουμε αποδείξει ότι η συνάρτηση $f(x) = \max(x, 0)$, $x \in I = (-1, 1)$ έχει γενικευμένη παράγωγο την συνάρτηση του Heaviside H (βλ. Παράδειγμα ??) και επομένως, ανήκει στον $W^{1,2}(I)$, ωστόσο, δεν ανήκει στον $C^1(I)$ καθώς δεν είναι διαφορίσιμη με την κλασική έννοια στο σημείο $x = 0$. Επίσης, υπάρχουν συναρτήσεις στον L^p οι οποίες δεν

ανήκουν στον $W^{1,p}$, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση του Heaviside της οποίας η παράγωγος είναι η συνάρτηση δ του Dirac (βλ. Παράδειγμα ??) η οποία όμως δεν είναι συνάρτηση. Όπως φαίνεται και από τα Παραδείγματα 1.2.1 και 1.2.2 που αμέσως ακολουθούν ο χώρος $W^{1,p}$ είναι ένας «αρκετά παράξενος» χώρος αλλά είναι ιδιαίτερα σημαντικός.

Παράδειγμα 1.2.1. Έστω $I = (-1, 1)$. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

ανήκει στον $W^{1,p}(I)$, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$, ενώ η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

δεν ανήκει στον $W^{1,p}(I)$, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$.

Απόδειξη. Για κάθε $\varphi \in C_0^\infty(I)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_I f(x) \varphi'(x) dx &= \int_{-1}^0 \varphi'(x) dx + \int_0^1 x \varphi'(x) dx \\ &= \varphi(x)|_{-1}^0 + x \varphi(x)|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= \varphi(0) - \varphi(-1) + \varphi(1) - 0 - \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= - \left(\int_0^1 0 \varphi(x) dx + \int_0^1 1 \varphi(x) dx \right) \\ &= - \int_0^1 g(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Άρα, η ασθενής παράγωγος της συνάρτησης f είναι η g .

Η συνάρτηση $f \notin C^1(\bar{I})$, ανήκει όμως στον $L^1(I)$ και επομένως ανήκει και στον $L^p(I)$, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$. Η ασθενής παράγωγος g της f ανήκει επίσης στον $L^p(I)$, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$. Άρα, η $f \in W^{1,p}(I)$, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$.

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση g δεν έχει ασθενή παράγωγο, οπότε, $g \notin W^{1,p}(I)$. Έστω ότι η g είναι ασθενώς παραγωγίσιμη και ότι η ασθενής παράγωγος αυτής είναι η συνάρτηση h . Τότε, για $\varphi \in C_0^\infty(I)$ θα έχουμε

$$\int_I g(x) \varphi'(x) dx = \int_0^1 x \varphi'(x) dx = -\varphi(0)$$

και

$$\int_I g(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^1 x h(x) \varphi(x) dx.$$

Άρα, θα πρέπει να ισχύει

$$\int_0^1 h(x) \varphi(x) dx = \phi(0), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Αν θεωρήσουμε συναρτήσεις ελέγχου φ με $\varphi(0) = 0$, τότε η $h(x)$ θα είναι ίση με το μηδέν σημειακά σχεδόν παντού στο I . Αλλά, τότε, η τελευταία ισότητα δεν ισχύει για συναρτήσεις ελέγχου με $\varphi(0) \neq 0$. Επομένως, μια τέτοια h δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 1.2.2. Έστω $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin(1/x)$. Τότε, η $f \in L^1(0, 1)$, η $f'(x) = -\frac{\cos(1/x)}{x^2} \in L_{\text{loc}}^1(0, 1)$, αλλά, η $f \notin W^{1,p}(0, 1)$, για κάθε p .

Οι προτάσεις που ακολουθούν είναι πολύ χρήσιμες στη μελέτη των χώρων Sobolev και συμβάλλουν με πολύ αποτελεσματικό τρόπο στο να καταλάβουμε της υφής των χώρων αυτών, δηλαδή, με τι μοιάζουν αυτοί οι χώροι.

Πρόταση 1.2.1. Έστω $f \in L_{\text{loc}}^1(I)$, τέτοια ώστε

$$\int_I f \phi' = 0, \quad \forall \phi \in C_0^1(I).$$

Τότε, υπάρχει σταθερά c , τέτοια ώστε $f = c$ σχεδόν παντού.

Απόδειξη. Έστω μια συνάρτηση $g \in C_0(I)$ τέτοια ώστε $\int_I g = 1$ (για τυχούσα $\phi \in C_0(I)$ θέτουμε $g = \phi / \int_I \phi$). Για τυχούσα $h \in C_0(I)$ θεωρούμε τη συνάρτηση $\psi = h - \left(\int_I h\right) g$. Η ψ είναι συνεχής, με συμπαγή φορέα που περιέχεται στο I , και επειδή $\int_I \psi = 0$, έχει μοναδική παράγουσα με συμπαγή φορέα. Τότε, από την (1) παίρνουμε

$$\int_I f \left[h - \left(\int_I h \right) g \right] = 0, \quad \forall h \in C_0(I)$$

και επειδή

$$\begin{aligned} \int_I f \left[h - \left(\int_I h \right) g \right] &= \int_I \left[fh - \left(\int_I h \right) fg \right] = \int_I (fh) - \left(\int_I h \right) \int_I fg \\ &= \int_I (fh) - \int_I \left(\int_I fg \right) h = \int_I \left[f - \left(\int_I fg \right) \right] h \end{aligned}$$

παίρνουμε

$$\int_I \left[f - \left(\int_I fg \right) \right] h = 0, \quad \forall h \in C_0(I).$$

Από την τελευταία σύμφωνα με την Πρόταση ?? παίρνουμε ότι $f - \left(\int_I fg \right) = 0$, σχεδόν παντού, δηλαδή, $f = c$ με $c = \int_I fg$.

Παρατήρηση 1.2.3. Από την Πρόταση 1.2.1 συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις του $W^{1,p}(I)$ με μηδενική ασθενή παράγωγο είναι σταθερές, σχεδόν παντού.

Πρόταση 1.2.2. Έστω $g \in L^1_{\text{loc}}(I)$. Για τυχόν, αλλά σταθερό, $x_0 \in I$ θέτουμε

$$f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad t \in I.$$

Τότε, $f \in C(I)$ και

$$\int_I f \varphi' = - \int_I g \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^1(I).$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_I f \varphi' &= \int_I \left(\int_{x_0}^x g(t) dt \right) \varphi'(x) dx \\ &= - \int_a^{x_0} \left(\int_{x_0}^x g(t) dt \right) \varphi'(x) dx + \int_{x_0}^b \left(\int_{x_0}^x g(t) dt \right) \varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Fubini, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_I f \varphi' &= - \int_a^{x_0} g(t) dt \int_a^t \varphi'(x) dx + \int_{x_0}^b g(t) dt \int_t^b \varphi'(x) dx \\ &= - \int_I g(t) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 1.2.2 προκύπτουν το ακόλουθα συμπεράσματα.

Παρατήρηση 1.2.4. Οι συναρτήσεις του $W^{1,p}(I)$ είναι «χονδρικά» παράγουσες των συναρτήσεων του $L^p(I)$.

Παρατήρηση 1.2.5. Μια παράγουσα f μιας συνάρτησης $g \in L^p(I)$ ανήκει στον $W^{1,p}(I)$ αν η $f \in L^p(I)$. Προφανώς, αυτό ισχύει πάντα όταν το I είναι φραγμένο.

Παρατήρηση 1.2.6. Μια συνάρτηση συνεχής στο $\bar{I}$ και με συνεχή κατά τμήματα παράγωγο στο $\bar{I}$ ανήκει στον $W^{1,p}(I)$, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$.

Το θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι μια συνάρτηση f του $W^{1,p}(I)$ ικανοποιεί έμμεσα (μέσω μιας συνάρτησης του $C(\bar{I})$, δηλαδή, ούτε καν παραγωγίσιμης συνάρτησης) το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Θεώρημα 1.2.1. Έστω $f \in W^{1,p}(I)$. Τότε, υπάρχει συνάρτηση $\tilde{f} \in C(\bar{I})$, τέτοια ώστε $f = \tilde{f}$ σχεδόν παντού στο I και

$$\tilde{f}(x_2) - \tilde{f}(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(t) dt, \quad \forall x_1, x_2 \in \bar{I}.$$

Απόδειξη (βλ. [Bre], Θεώρημα 8.2).

Παρατήρηση 1.2.7. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2.1 για κάθε συνάρτηση $f \in W^{1,p}(I)$ υπάρχει μια ακριβώς συνεχής εκπρόσωπός της $\tilde{f}$, (και μάλιστα η $\tilde{f} \in C(\bar{I})$, το οποίο δίνει νόημα στην f και στο σύνορο ∂I του I). Η ιδιότητα αυτή διαφέρει φυσικά από το να είναι η ίδια η f συνεχής.

Στο σημείο αυτό θέλουμε να προσδιορίσουμε τη σχέση των συναρτήσεων του χώρου Sobolev με τις συναρτήσεις κάποιων πολύ σημαντικών χώρων συναρτήσεων που έχουμε συναντήσει σε προηγούμενα κεφάλαια, όπως για παράδειγμα, τους χώρους των απολύτως συνεχών συναρτήσεων και των Lipschitz συνεχών συναρτήσεων. Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ και $AC(I)$ ο χώρος των απολύτως συνεχών συναρτήσεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (βλ. Ορισμός ??). Υπενθυμίζουμε ότι η $f \in AC[a, b]$ αν και μόνο αν η f' υπάρχει σ.π. για κάθε $x \in [a, b]$ (βλ. Πρόταση ??), η f' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt, \quad (1.20)$$

για κάθε $x \in [a, b]$ (βλ. Θεώρημα ??), όπου το a σε αυτό τον τύπο μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο σημείο του $[a, b]$. Επίσης, αν η f είναι απολύτως συνεχής τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής (βλ. Πρόταση ??) και επομένως συνεχής. Όμοια, έστω $AC_{\text{loc}}(I)$ ο χώρος των τοπικώς απολύτως συνεχών συναρτήσεων, όπου η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τοπικώς απολύτως συνεχής στο I αν είναι απολύτως συνεχής σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα $[a, b] \subseteq I$. Προφανώς, $AC_{\text{loc}}[a, b] = AC[a, b]$

και $f \in AC_{\text{loc}}[a, b]$ αν και μόνο αν η f' υπάρχει σ.π. για κάθε $x \in [a, b]$, η $f' \in L^1_{\text{loc}}[a, b]$ και ισχύει η (1.20), όπου το a σε αυτό τον τύπο μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο σημείο του $[a, b]$.

Θεώρημα 1.2.2. Η συνάρτηση $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, αν και μόνο αν, $f, f' \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ με $f, f' \in L^p(\mathbb{R})$, όπου f' είναι η σ.π. σημειακή παράγωγος της f .

Απόδειξη. Έστω $f \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ με $f, f' \in L^p(\mathbb{R})$. Τότε, χρησιμοποιώντας τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για απολύτως συνεχείς συναρτήσεις (βλ. [Coh], Πόρισμα 6.3.9) παίρνουμε ότι η f έχει ασθενή παράγωγο στον $f' \in L^p(\mathbb{R})$. Αντίθετα, υποθέτουμε ότι η $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Έστω g η ασθενής παράγωγος της f και έστω $G(x) = \int_0^x g(y)dy$. Τότε, η G είναι τοπικώς απολύτως συνεχής με $G'(x) = g(x)$ σ.π.. Άρα, οι f και η G και οι δύο έχουν ασθενή παράγωγο την g , οπότε, από την Πρόταση 1.2.2 παίρνουμε ότι η $f - G$ είναι σταθερή σ.π. και επομένως, $f \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ με $f' = g$.

Σημείωση 1.2.2. Μπορούμε να πάρουμε ένα όμοιο αποτέλεσμα στην περίπτωση $n \geq 2$ αν η απόλυτη συνέχεια αντικατασταθεί με την απόλυτη συνέχεια σε μια ευθεία σ.π. σχεδόν παντού παράλληλη σε κάποιον από τους άξονες συντεταγμένων. (βλ. [Ev-Ga]).

Παρατήρηση 1.2.8. Από ο Θεώρημα 1.2.2 προκύπτει το συμπέρασμα ότι μπορούμε να ταυτίσουμε μια συνάρτηση f του $W^{1,p}(\mathbb{R})$ με την τοπικώς απολύτως συνεχή εκπρόσωπό της. Ειδικότερα, έχουμε τις ακόλουθες προτάσεις.

Πρόταση 1.2.3. Αν $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, τότε, η f είναι Lipschitz συνεχής και αντιστρόφως, αν η f είναι φραγμένη και Lipschitz συνεχής, τότε, η $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Έχουμε διαδοχικά

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y f'(t)dt \right| \leq \|f'\|_{\infty} |x - y|,$$

το οποίο αποδεικνύει το ευθύ.

Αντιστρόφως. Από την υπόθεση η f είναι φραγμένη. Επιπλέον, η f είναι διαφορίσιμη και Lebesgue μετρήσιμη (βλ. [Ev-Ga], § 3.1.2, Θεώρημα 2). Άρα, $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$.

Πρόταση 1.2.4. Έστω $1 < p < \infty$ και $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Τότε η f είναι Hölder συνεχής με εκθέτη $1 - 1/p$. Επιπλέον, η f είναι φραγμένη και ισχύει $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Απόδειξη. Έστω q ο συζυγής του p (δηλαδή, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) Θέτουμε $a = \frac{1}{q}$, οπότε $a = 1 - \frac{1}{p}$ και από την ανισότητα του Hölder έχουμε

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \leq \|f'\|_p |x - y|^a,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η f είναι Hölder συνεχής.

Έστω $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Τότε, η $|f|^p$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη και ισχύει

$$\frac{d}{dx} |f(x)|^p = p |f(x)|^{p-1} \operatorname{sgn}(f(x)) f'(x).$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία από $-\infty$ έως x και χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Young παίρνουμε

$$\begin{aligned} |f(x)|^p &\leq p \int_{-\infty}^x |f(y)|^{p-1} f'(y) dy \\ &\leq p \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|f(y)|^{q/(p-1)}}{q} + \frac{|f'(y)|^p}{p} \right) dy \\ &\leq \max\{1, p/q\} \|f\|_{W^{1,p}}^p. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\|f\|_\infty \leq C \|f\|_{W^{1,p}}. \quad (1.21)$$

Έστω, τώρα, ότι $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ και έστω η ακολουθία $\{f_n\} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $f_n \rightarrow f$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Τότε,

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq C \|f_n - f_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})},$$

οπότε, η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνεχή και φραγμένη συνάρτηση g . Αφού η $f_n \rightarrow f$ στον L^p θα έχουμε $g = f$ σ.π. και επειδή $\|f_n\|_\infty \rightarrow \|f\|_\infty$ ενώ $\|f_n\|_{W^{1,p}} \rightarrow \|f\|_{W^{1,p}}$, παίρνουμε ότι η (1.21) ισχύει και για την f . Έστω $\epsilon > 0$ και n τέτοιο ώστε $\|f - f_n\|_\infty < \epsilon$. Αν $R > 0$ τέτοιο ώστε $f_n(x) = 0$ για $|x| \geq R$, τότε $|f(x)| = |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ όταν $|x| \geq R$. Άρα, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. $\square$

Όταν $p = 1$ μπορεί εύκολα να αποδειχτεί η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.2.5. Αν $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, τότε, η f είναι απολύτως συνεχής, πεπερασμένης διακύμανσης και μηδενίζεται στο $\pm\infty$.

Σε αυτή την ενότητα μελετάμε την ειδική περίπτωση όπου έχουμε συναρτήσεις στον πρώτο χώρο Sobolev $W_0^{1,p}(I)$ με «μηδενικές συνοριακές τιμές». Μια όμοια θεωρία μπορεί να αναπτυχθεί και για χώρους Sobolev μεγαλύτερης διάστασης.

Ο Χώρος Sobolev $W_0^{1,p}(I)$

Ορισμός 1.2.2. Έστω $1 \leq p < \infty$. Ο χώρος Sobolev $W_0^{1,p}(I)$ είναι η πλήρωση του $C_0^\infty(I)$ ως της τη norm του χώρου $W^{1,p}(I)$, δηλαδή,

$$W_0^{1,p}(I) = \overline{C_0^\infty(I)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}}.$$

Επομένως:

Μια συνάρτηση $u \in W_0^{1,p}(I)$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ με $u_j \in C_0^\infty(I)$, για κάθε $j = 1, 2, \dots$ τέτοια ώστε $u_j \rightarrow u$ στον $W^{1,p}(I)$ καθώς το $j \rightarrow \infty$, δηλαδή, ...

Ο χώρος Sobolev $W_0^{1,p}(I)$ είναι εφοδιασμένος με τη norm που επάγει ο $W^{1,p}(I)$.

Ειδικότερα, θέτουμε

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

Ο χώρος $H_0^1(I)$ παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο που επάγει ο $H^1(I)$. $\square$

Θεώρημα 1.2.3. Ο χώρος $W_0^{1,p}(I)$, $1 \leq p < \infty$, είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach. Ο $W_0^{1,p}(I)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $W^{1,p}(I)$ και επομένως είναι πλήρης. Ειδικότερα, ο χώρος $H_0^1(I)$ είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

Θεώρημα 1.2.4. Ο χώρος $W_0^{1,p}(I)$, $1 < p < \infty$, είναι ένας ανακλαστικός χώρος.

Παρατήρηση 1.2.9. Συγκρίνοντας τον $W_0^{1,p}(I)$ με τον $W^{1,p}(I)$ παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά είναι ότι οι συναρτήσεις του $W_0^{1,p}(I)$ μπορούν να θεωρηθούν σαν όρια ακολουθιών του $C_0^\infty(I)$, ενώ οι συναρτήσεις του $W^{1,p}(I)$ μπορούν να θεωρηθούν σαν όρια ακολουθιών του $W^{1,p}(I)$ ως προς τη norm του $W^{1,p}(I)$, δηλαδή,

$$W_0^{1,p}(I) = \overline{C_0^\infty(I)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}}, \quad W^{1,p}(I) = \overline{C^\infty(I)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}}.$$

Πρόταση 1.2.6. $C_0^\infty(I) \subset W_0^{1,p}(I) \subset W^{1,p}(I) \subset L^p(I)$.

Πρόταση 1.2.7. Αν η $u \in W^{1,p}(I)$ και ο φορέας της $\text{supp } u$ είναι συμπαγές υποσύνολο του I , τότε $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Παρατήρηση 1.2.10. Γενικά $W_0^{1,p}(I) \subset W^{1,p}(I)$, $I \subset \mathbb{R}$, ωστόσο, όταν $I = \mathbb{R}$, γνωρίζουμε ότι ο $C_0^\infty(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\mathbb{R})$ και επομένως,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ένα ουσιώδη χαρακτηρισμό των συναρτήσεων του χώρου $W_0^{1,p}(\mathbb{R})$.

Θεώρημα 1.2.5. Έστω $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Τότε, η $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R})$ αν και μόνο αν $u = 0$ στο ∂I .

Παρατήρηση 1.2.11. Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, «χονδρικά» μια συνάρτηση του $W^{1,p}(I)$ ανήκει στον $W_0^{1,p}(I)$, αν αυτή (ως συνάρτηση χώρου Sobolev) μηδενίζεται στο σύνορο, ωστόσο, η συνάρτηση μπορεί να μην μηδενίζεται σημειακά στο σύνορο.

Παρατήρηση 1.2.12. Αν $u \in W_0^{1,p}(I)$, τότε η $\tilde{u} : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ με

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in I \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus I \end{cases},$$

δηλαδή, η μηδενική επέκτασή της ανήκει στον $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Παρατήρηση 1.2.13. Οι συναρτήσεις στον χώρο $W_0^{1,p}(I)$ είναι συναρτήσεις που «μηδενίζονται» με κάποια έννοια (ως συναρτήσεις χώρων Sobolev) στο σύνορο του I . Μπορούμε να λέμε ότι οι συναρτήσεις $u, v \in W^{1,p}(I)$ έχουν ίσες τιμές στο σύνορο αν η συνάρτηση $(u - v) \in W_0^{1,p}(I)$. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο, για παράδειγμα, στα προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων τύπου Dirichlet.

Μερικά ακόμα αποτελέσματα σε χώρους Sobolev διάστασης 1

Η μονοδιάστατη περίπτωση των χώρων Sobolev είναι η πιο απλή και χρήσιμη για την κατανόηση των χώρων Sobolev γενικά. Όμως, έχει και κάποιες πολύ ενδιαφέρουσες ιδιαιτερότητες σε σχέση με τους χώρους Sobolev στις πολλές διαστάσεις. Πριν περάσουμε σε αυτές θα θεωρήσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα το οποίο θα αποδείξουμε στη συνέχεια σε οποιαδήποτε διάσταση.

Πρόταση 1.2.8. Ο χώρος $C^1[a, b]$ είναι πυκνός στον $H^1(a, b)$.

Παρατήρηση 1.2.14. Η πυκνότητα παραπάνω εννοείται με την έννοια ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας των στοιχείων του $C^1[a, b]$ είναι πυκνές στον $H^1(a, b)$. Γνωρίζουμε, ήδη, ότι υπάρχουν παραδείγματα συναρτήσεων στη διάσταση 1 ο οποίες

ανήκουν στον H^1 αλλά όχι στην C^1 (βλ. Παράδειγμα ?? και Παρατήρηση 1.2.2). Ωστόσο, στη διάσταση 1 όλες οι συναρτήσεις του H^1 είναι συνεχείς, με την έννοια ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας συναρτήσεων του H^1 περιέχει μια συνεχή εκπρόσωπο.

Θεώρημα 1.2.6. $H^1(a, b) \hookrightarrow C^{0,1/2}[a, b]$, δηλαδή, η εμφύτευση του $H^1(a, b)$ στον $C^{0,1/2}[a, b]$ είναι συνεχής (βλ. Ορισμός ??).

Απόδειξη. Έστω $f \in H^1(a, b)$. Η γενικευμένη παράγωγος αυτής f' ανήκει στον $L^2[a, b]$ και επομένως για κάθε $x \in [a, b]$ μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_a^x f'(t) dt.$$

Έτσι για κάθε $x, y \in [a, b]$ έχουμε

$$g(y) - g(x) = \int_x^y f'(t) dt,$$

οπότε παίρνουμε,

$$(g(y) - g(x))^2 = \left(\int_x^y f'(t) dt \right)^2 \leq |y - x| \int_a^b (f'(t))^2 dt \leq |y - x| \|f\|_{H^1(a,b)}^2,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Άρα, για κάθε $x \neq y$, παίρνουμε

$$\frac{|g(y) - g(x)|}{|y - x|^{1/2}} \leq \|f\|_{H^1(a,b)}. \quad (1.22)$$

Από την ανισότητα αυτή συνεπάγεται ότι η g είναι Hölder συνεχής με εκθέτη $\frac{1}{2}$ στο $[a, b]$ και επομένως η g είναι μια γενικευμένη συνάρτηση. Ας υπολογίσουμε την παράγωγό της. Για κάθε $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$ έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \langle g', \varphi \rangle &= -\langle g, \varphi' \rangle = -\int_a^b g(x) \varphi'(x) dx \\ &= -\int_a^b \left(\int_a^x f'(t) dt \right) \varphi'(x) dx = -\int_a^b \left(\int_t^b \varphi'(x) dx \right) f'(t) dt \\ &= -\int_a^b (\varphi(b) - \varphi(t)) f'(t) dt = \int_a^b \varphi(t) f'(t) dt = \langle f', \varphi \rangle, \end{aligned}$$

αφού $\varphi(b) = 0$. (Η εναλλαγή των ολοκληρωμάτων δικαιολογείται από το θεώρημα του Fubini. Επομένως, έχουμε αποδείξει ότι $g' = f'$, οπότε υπάρχει μια σταθερά c (βλ. Πρόταση...) τέτοια ώστε $f = g + c$. Άρα, η f έχει έναν εκπρόσωπο που ανήκει στον $C^{0,1/2}[a, b]$, δηλαδή, την $g + c$, και επομένως χρησιμοποιώντας τον ορισμό της g μπορούμε να γράφουμε

$$f(x) = f(y) + \int_x^y f'(t)dt, \quad (1.23)$$

για κάθε $x, y \in [a, b]$. Υψώνοντας την τελευταία στο τετράγωνο και με τη χρήση της ανισότητας των Cauchy-Schwarz παίρνουμε την ανισότητα

$$f^2(x) \leq 2f^2(y) + 2(b-a) \int_a^b f'(x)dx,$$

από την οποία με ολοκλήρωση ως προς y προκύπτει

$$(b-a)^2 f^2(x) \leq 2\|f\|_{L^2(a,b)}^2 + 2(b-a)^2 \|f'\|_{L^2(a,b)}^2 \leq 2 \max(1, (b-a)^2) \|f\|_{H^1(a,b)}^2.$$

Αφού η τελευταία ισχύει για κάθε $x \in [a, b]$ προκύπτει ότι

$$\|f\|_{C[a,b]} \leq \sqrt{2 \max\left(\frac{1}{b-a}, b-a\right)} \|f\|_{H^1(a,b)}, \quad (1.24)$$

το οποίο σημαίνει ότι η εμφύτευση $H^1(a, b) \hookrightarrow C^{0,1/2}[a, b]$ είναι συνεχής.

Παρατήρηση 1.2.15. Δεν ανήκουν όλες οι συναρτήσεις του $C^{0,1/2}$ στον H^1 . Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ με $x \in (0, 1)$. Πραγματικά, είναι

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{1/2}} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{\sqrt{|x - y|}} = \frac{\sqrt{|x - y|}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{\sqrt{x + y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < +\infty,$$

για κάθε $x, y \in (0, 1)$ και επομένως, $f \in C^{0,1/2}(0, 1)$. Όμως, η $f \notin H^1(0, 1)$ (γιατί;).

Παρατήρηση 1.2.16. Η εμφύτευση $H^1(a, b) \hookrightarrow C^{0,1/2}[a, b]$ είναι βέλτιστη με τη έννοια ότι για κάθε $\beta > \frac{1}{2}$ υπάρχει μια συνάρτηση στον $H^1(0, 1)$ η οποία δεν ανήκει στον $C^{0,\beta}[a, b]$. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{2\beta+1}{4}}$ με $\beta > \frac{1}{2}$ και $x \in (0, 1)$ ανήκει στον $H^1(0, 1)$ αλλά δεν ανήκει στον $C^{0,1/2}[a, b]$ (επιβεβαιώστε το).

Παρατήρηση 1.2.17. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της μονοδιάστατης περίπτωσης είναι ότι οι σημειακές τιμές μιας συνάρτησης του H^1 ορίζονται ως η σημειακή τιμή της συνεχούς αντιπροσώπου τους. Επιπλέον, αυτές εξαρτώνται συνεχώς από τη συνάρτηση στην H^1 norm (βλ. εκτίμηση (1.21)). Αυτό ισχύει ιδιαίτερα και για τις τιμές στα άκρα του διαστήματος a και b το οποίο είναι πολύ σημαντικό και αποτελεί έκπληξη επειδή ο ορισμός του χώρου Sobolev βασίζεται στο ανοικτό σύνολο (a, b) και επομένως εξαιρούνται τα άκρα.

Ορισμός 1.2.3. Η γραμμική απεικόνιση $\gamma_0 : H^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$\gamma_0(f) = (f(a), f(b))$$

λέγεται **απεικόνιση ίχνους** (ή **ίχνος**) της f .

Η πρόταση που ακολουθεί αποτελεί την μονοδιάστατη εκδοχή του **θεωρήματος ίχνους** στις πολλές διαστάσεις (βλ. Θεώρημα ??) και το αποτέλεσμα αποδεικνύει ότι οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet έχουν νόημα για συναρτήσεις του $H^1(a, b)$ κάτι που δεν φαίνεται από την αρχή αφού είναι γνωστό ότι οι χώροι Sobolev ορίζονται σε ανοικτά σύνολα.

Πρόταση 1.2.9. Η απεικόνιση ίχνους $\gamma_0 : H^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_0(f) = (f(a), f(b))$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. Προφανώς έχουμε

$$\max(|f(a)|, |f(b)|) \leq \|f\|_{C^{0,1/2}[a,b]} \leq C\|f\|_{H^1(a,b)}.$$

Πρόταση 1.2.10. Έστω $I = (a, b)$ ένα ανοικτό διάστημα. Τότε

$$H_0^1(a, b) = \ker \gamma_0.$$

Απόδειξη. Η πρόταση αυτή είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.2.5, ωστόσο θα αποδείξουμε ότι ο $H_0^1(a, b)$ περιλαμβάνεται στον πυρήνα του $\ker \square_0$, δηλαδή,

$$H_0^1(a, b) \subseteq \ker \gamma_0 = \{f \in H_0^1(a, b) : f(a) = f(b) = 0\}.$$

Πραγματικά, ο χώρος $H_0^1(a, b)$ είναι εξ ορισμού το περίβλημα του χώρου $\mathcal{D}(a, b)$ στον $H^1(a, b)$. Άρα, αν $f \in H_0^1(a, b)$, τότε υπάρχει μια ακολουθία $\varphi_n \in \mathcal{D}(a, b)$ τέτοια ώστε $\varphi_n \rightarrow f$ στον $H^1(a, b)$. Άρα, από τον ορισμό της απεικόνισης ίχνους γ_0 , έχουμε, $\gamma_0(\varphi_n) = 0$, για κάθε n , οπότε η $f \in \ker \gamma_0$ λόγω της συνέχειας του ίχνους γ_0 και επομένως, $H_0^1(a, b) \subseteq \ker \square_0$.

Ολοκληρώνουμε την παρουσίαση της μονοδιάστατης περίπτωσης με το θεώρημα της συμπαγούς εμφύτευσης των Rellich-Kondrachov.

Θεώρημα 1.2.7. Η εμφύτευση $H^1(\alpha, \beta) \hookrightarrow L^2(a, b)$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Μια εμφύτευση είναι συμπαγής αν απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε σχετικά συμπαγή σύνολα. Εδώ είναι αρκετό να θεωρήσουμε (λόγω της γραμμικότητας) την μοναδιαία μπάλα του $H^1(a, b)$. Από τις ανισότητες (1.22) και (1.24) έπεται ότι αυτή είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του $C^{0,1/2}(a, b)$, ωστόσο, φραγμένα σύνολα στον $C^{0,1/2}(a, b)$ είναι ισοσυνεχή και επομένως από το θεώρημα Arzela-Ascoli (βλ. Θεώρημα ??) σχετικά συμπαγή στον $C^0[a, b]$. Τέλος η εμφύτευση $C^0[a, b] \hookrightarrow L^2(a, b)$ είναι συνεχής και επομένως μετασχηματίζει σχετικά συμπαγή σύνολα σε σχετικά συμπαγή.

Παρατήρηση 1.2.18. Το θεώρημα της συμπαγούς εμφύτευσης των Rellich-Kondrachov ισχύει σε οποιαδήποτε διάσταση, δηλαδή, η εμφύτευση $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ είναι συμπαγής, αρκεί το Ω να είναι φραγμένο και αρκετά λείο, για παράδειγμα Lipschitz (βλ. Θεώρημα ??).