Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση
Μια Εισαγωγή

Νίκος Λαμπρόπουλος

17 Δεκεμβρίου 2024

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Διαφορισιμότητα σε Χώρους Banach

Είναι γνωστός ο ρόλος της παραγώγου στον απειροστικό λογισμό καθώς επίσης και στο διανυσματικό λογισμό όπου ορίσαμε τρεις συναφείς έννοιες, την κατευθυνόμενη παράγωγο, την μερική παράγωγο και την κλίση (gradient). Σε αυτό το κεφάλαιο θα γενικεύσουμε την έννοια της κατευθυνόμενης παραγώγου καθώς και την έννοια της παραγώγου σε χώρους Banach. Συγκεκριμένα, θα αναπτύξουμε μια γενίκευση της κατευθυνόμενης παραγώγου, η οποία ονομάζεται Gateaux παράγωγος και μια γενίκευση της παραγώγου μιας συνάρτησης που ονομάζεται Fréchet παράγωγος. Ένας από τους πιο βασικούς λόγους που *επιμένουμε* στην γενίκευση της έννοιας της παραγώγου σε όλο και πιό γενικούς χώρους, όπως για παράδειγμα είναι οι χώροι Banach, είναι ακριβώς ο ίδιος με εκείνο στον απειροστικό λογισμό, δηλαδή, η αντιμετώπιση ελαχιστοποιητικών προβλημάτων. Η Gateaux παράγωγος και η Fréchet παράγωγος ορίζονται για απεικονίσεις μεταξύ δύο τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων (για παράδειγμα μεταξύ δυο χώρων Banach), ωστόσο, θα ασχοληθούμε περισσότερο με αυτές τις παραγώγους για συναρτησιακά $F : X \to \mathbb{R}$, όπου X είναι ένας χώρος Banach και ο λόγος είναι ότι αυτά έχουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον γιατί είναι χρήσιμα σε προβλήματα ελαχιστοποίησης συναρτησιακών. Ωστόσο, θα δώσουμε μερικά παραδείγματα σχετικά με τη γενική περίπτωση.

1.1 Gateaux Παράγωγος

Μπορούμε να ορίσουμε την κατευθυνόμενη παράγωγο ενός συναρτησιακού F ορισμένου σε ένα χώρο Banach εντελώς ανάλογα με την κατευθυνόμενη παράγωγο μιας συνάρτησης ορισμένης στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Ορισμός 1.1.1. (**Κατευθυνόμενη Παράγωγος**) Έστω X ένας χώρος Banach και $F : X \to \mathbb{R}$ ένα συναρτησιακό (ίσως μη γραμμικό). Η κατευθυνόμενη παράγωγος του F στο σημείο $x \in X$ τη διεύθυνση του $h \in X$ είναι το όριο (όταν αυτό υπάρχει)

$$DF(x,h) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F(x+\epsilon h) - F(x)}{\epsilon}.$$

□

Παρατήρηση 1.1.1. Ο τελεστής $h \to DF(x,h)$ δεν είναι πάντοτε γραμμικός (βλ. Παράδειγμα 1.1.1).

Παράδειγμα 1.1.1. Θεωρούμε το συναρτησιακό $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$F(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, & (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1,x_2) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Αν $h = (h_1,h_2)$ είναι μια τυχούσα διεύθυνση, τότε,

$$DF(0,h) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F((0,0)+\epsilon(h_1,h_2)) - F(0,0)}{\epsilon} = \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Άρα, ο τελεστής $h \to DF(0,h) = \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ δεν είναι γραμμικός.

Ορισμός 1.1.2. (**Gateaux Παράγωγος**) Έστω X ένας χώρος Banach και $F : X \to \mathbb{R}$ ένα συναρτησιακό. Το F λέγεται **Gateaux** (ή ασθενώς) **παραγωγίσιμο** στο σημείο $x \in X$ αν η κατευθυνόμενη παράγωγος

$$DF(x,h) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F(x+\epsilon h) - F(x)}{\epsilon}$$

υπάρχει για κάθε διεύθυνση $h \in X$ και ο τελεστής $h \to DF(x,h)$ είναι γραμμικός και συνεχής. Τότε, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει κάποιο στοιχείο $DF(x) \in X^*$ τέτοιο ώστε

$$DF(x,h) = \langle DF(x), h \rangle, \ \forall\, h \in X. \quad (1)$$

Το στοιχείο $DF(x)$ του X^* λέγεται **Gateaux παράγωγος** του F στο x και όταν υπάρχει είναι μοναδικό.

Αν το F είναι Gateaux παραγωγίσιμο στο $x \in X$ με Gateaux παράγωγο $DF(x) \in X^*$, τότε η (1) γράφεται

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{|F(x+\epsilon h) - F(x) - \langle DF(x), \epsilon h \rangle|}{\epsilon} = 0, \ \forall\, h \in X. \quad (2)$$

Για αυτό το λόγο το $DF(x,h) = \langle DF(x), h \rangle$ λέγεται και **Gateaux διαφορικό.**

Αν $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, τότε η Gateaux παράγωγος του F ταυτίζεται με την κλίση ∇F. □

□

Παρατήρηση 1.1.2. Μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό της Gateaux παραγωγισιμότητας και της Gateaux παραγώγου και για ένα συναρτησιακό ορισμένο σε ένα υποσύνολο $A \subset X$, όχι απαραίτητα ανοικτό, αρκεί να ισχύει για κάθε εσωτερικό σημείο x του A.

Παρατήρηση 1.1.3. Αν X, Y είναι δυο χώροι Banach, $U \subset X$ ανοικτό και $F : X \to Y$, τότε η Gateaux παράγωγος του F στο σημείο $x \in U$ στην κατεύθυνση $h \in X$ δίνεται πάλι από τη σχέση (2), όπου το όριο λαμβάνεται σε σχέση με την τοπολογία του Y. Αν οι χώροι X και Y είνι πραγματικοί, το όριο λαμβάνεται για ϵ πραγματικό ενώ αν είναι μιγαδικοί, τότε λαμβάνεται σαν όριο στο μιγαδικό επίπεδο.

Σημείωση 1.1.1. Ο υπολογισμός της Gateaux παραγώγου ενός συναρτησιακού ορισμένου σε ένα γενικό χώρο Banach είναι ένα δύσκολο πρόβλημα ακόμα και στις περιπτώσεις όπου γνωρίζουμε ότι υπάρχει. Αν όμως ο χώρος είναι Hilbert χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου μπορούμε σε αρκετές περιπτώσεις να την υπολογίσουμε. Σε κάποιες, ωστόσο περιπτώσεις, όπως για τα παράδειγμα στους χώρους L^p, $1 < p < \infty$, μπορεί να υπολογιστεί η Gateaux παράγωγος ενός στοιχείου ακόμα και αν δεν είναι χώρος Hilbert (μόνο ο L^2 είναι χώρος Hilbert). Τα παραδείγματα που ακολουθούν αποτελούν χαρακτηριστικές περιπτώσεις τόσο συναρτησιακών όσο και χώρων Hilbert.

Παράδειγμα 1.1.2. Έστω $X = H$ ένας χώρος Hilbert με norm $\|\cdot\|$ και εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Θεωρούμε το συναρτησιακό $F : X \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2.$$

Τότε, $DF(x) = x$, για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} F(x+\varepsilon h) - F(x) &= \frac{1}{2}\langle x+\varepsilon h, x+\varepsilon h\rangle - \frac{1}{2}\langle x, x\rangle \\ &= \varepsilon\langle x, h\rangle + \frac{\varepsilon^2}{2}\|h\|^2, \end{aligned}$$

οπότε,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(x+\varepsilon h) - F(x)}{\varepsilon} = \langle x, h\rangle.$$

Άρα, $DF(x,h) = \langle x, h\rangle$, για κάθε $h \in H$, και από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έπεται ότι $DF(x) = x$, για κάθε $x \in X$.

Παράδειγμα 1.1.3. Έστω $X = H$ ένας χώρος Hilbert με norm $\|\cdot\|$ και εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Θεωρούμε το συναρτησιακό $F : X \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \|x\|$. Τότε, $DF(x) = \frac{1}{\|x\|}x$, για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} F(x+\varepsilon h) - F(x) &= \|x+\varepsilon h\| - \|x\| = \sqrt{\langle x+\varepsilon h, x+\varepsilon h\rangle} - \sqrt{\langle x, x\rangle} \\ &= \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\varepsilon\langle x, h\rangle + \varepsilon^2\langle h, h\rangle} - \sqrt{\langle x, x\rangle} \\ &= \sqrt{\|x\|^2 + 2\varepsilon\langle x, h\rangle + \varepsilon^2\|h\|^2} - \|x\| \\ &= \frac{2\varepsilon\langle x, h\rangle + \varepsilon^2\|h\|^2}{\sqrt{\|x\|^2 + 2\varepsilon\langle x, h\rangle + \varepsilon^2\|h\|^2} + \|x\|}, \end{aligned}$$

οπότε,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(x+\varepsilon h) - F(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\frac{2\varepsilon\langle x, h\rangle + \varepsilon^2\|h\|^2}{\sqrt{\|x\|^2 + 2\varepsilon\langle x, h\rangle + \varepsilon^2\|h\|^2} + \|x\|} = \frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|}.$$

Επομένως, $DF(x,h) = \dfrac{1}{\|x\|}\langle x, h\rangle$, οπότε από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έπεται ότι $DF(x) = \frac{1}{\|x\|}x$, για κάθε $x \in X$ με $\neq 0$.
Αν $x = 0$ τότε, $F(\varepsilon h) - F(0) = |\varepsilon|\,\|h\|$ και επομένως η norm δεν είναι Gateaux παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Παρατήρηση 1.1.4. Αν θεωρήσουμε στα παραπάνω παραδείγματα ως χώρο X τον $\mathbb{R}$, τότε τα αντίστοιχα συναρτησιακά θα είναι οι συναρτήσεις $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$ και

$f_2(x) = |x|$, οπότε οι παράγωγοι αυτών είναι αντίστοιχα $f'(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f_2'(x) = \frac{1}{|x|}x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Αυτό ακριβώς αποτελεί μια επιβεβαίωση ότι Gateaux παράγωγος της norm αποτελεί γενίκευση της παραγώγου της απόλυτης τιμής.

Παράδειγμα 1.1.4. Έστω Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και θεωρούμε το χώρο Lebesgue $X = L^p(\Omega), 1 < p < \infty)$. Τότε, το τυχόν στοιχείο $x \in X$ είναι μια p-ολοκληρώσιμη συνάρτηση $u : X \to \mathbb{R}$, δηλαδή μια συνάρτηση για την οποία ορίζεται το $\int_\Omega |u(x)|^p dx$ και είναι πεπερασμένο. Επίσης, η τυχούσα κατεύθυνση h στο διανυσματικό χώρο $X = L^p(\Omega)$ καθορίζεται από μια συνάρτησση $v \in L^p(\Omega)$. Ορίζουμε το συναρτησιακό $F : X \to \mathbb{R}$ με

$$F(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{p}\int_\Omega |u(x)|^p dx.$$

Τότε, η Gateaux παράγωγος του F είναι ένα στοιχείο το οποίο ανήκει στον δυϊκό χώρο $X^* = (L^p(\Omega))^* = L^{p^*}(\Omega)$ του X, όπου το p^* είναι τέτοιο ώστε $1/p+1/p^* = 1$, και είναι ίση με $DF(u) = |u|^{p-2}u$.

Απόδειξη. Είναι γνωστό (βλ. Παράδειγμα 1.1.3) ότι η norm δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, οπότε θα υποθέσουμε ότι $u \neq 0$. Έχουμε

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F\left(u+\varepsilon v\right)-F\left(u\right)}{\varepsilon} = \frac{1}{p}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_\Omega |u+\varepsilon v|^p - \int_\Omega |u|^p\right).$$

Το πρόβλημα τώρα είναι η αντιμετάθεση την παραγώγισης με το ολοκλήρωμα. Από την κυρτότητα της συνάρτησης $|u|^p$, $p > 1$ παίρνουμε

$$|u+tv|^p = |(1-t)\,u + t\,(u+v)|^p \leqslant (1-t)\,|u|^p + t\,|u+v|^p\,,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$|u|^p - |u-v|^p \leqslant \frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t} \leqslant |u+v|^p - |u|^p\,,\ 0 < t \leqslant 1.$$

Επειδή, οι συναρτήσεις $|u|^p$, $|u+v|^p$ και $|u-v|^p$ είναι L^p-ολοκληρώσιμες το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης μας επιτρέπει να γράψουμε

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F\left(u+\varepsilon v\right)-F\left(u\right)}{\varepsilon} = \frac{1}{p}\int_\Omega \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|u\left(x\right)+\varepsilon v\left(x\right)|^p - |u\left(x\right)|^p}{\varepsilon}dx.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι αν $f(x) = |a+bx|^p$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, τότε,

$$f'(x) = pb|a+bx|^{p-1}\frac{a+bx}{|a+bx|} = pb|a+bx|^{p-2}(a+bx),$$

οπότε, έχουμε

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(u+\varepsilon v)-F(u)}{\varepsilon} = \int_{\Omega}|u(x)|^{p-2}u(x)v(x)\,dx.$$

Μπορούμε τώρα να θεωρήσουμε το δεξιό μέλος της τελευταίας σχέσης σαν $\langle |u|^p u, v\rangle_{L^p(\Omega), L^{p^*}(\Omega)}$, οπότε έχουμε το αποτέλεσμα.

Σημείωση 1.1.2. Από το Παράδειγμα 1.1.4 προκύπτει ότι αν $X = L^2(\Omega)$ και

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}|u(x)|^2 dx,\ u \in L^2(\Omega),\ u \neq 0,$$

τότε $DF(u) = |u|u$.
Επειδή ο L^2 είναι χώρος Hilbert θα μπορούσαμε σε αυτή την περίπτωση να υπολογίσουμε την $DF(u)$ όπως και στο Παράδειγμα 1.1.3.

Παρατήρηση 1.1.5. Η Gateaux παράγωγος έχει κάποιες ιδιότητες όμοιες με την παράγωγο. Η Gateaux παράγωγος μιας σταθεράς είναι ίση με το 0. Οι κανόνες του αθροίσματος, του γινομένου, του πηλίκου δύο συναρτησιακών καθώς και ο κανόνας της αλυσίδας ισχύουν και στην Gateaux παραγώγιση. Επίσης, ισχύει και το θεώρημα μέσης τιμής (κατά κάποια έννοια ασθενέστερη του ανίστοιχου στον απειροστικό λογισμό, αφού αντί για ισότητα έχουμε μια ανισότητα).

Θεώρημα 1.1.1. **(Θεώρημα Μέσης Τιμής)** Έστω $X \to \mathbb{R}$ ένα Gateaux παραγωγίσιμο συναρτησιακό. Τότε,

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq \sup_{t\in[0,1]}\|DF(tx_1 + (1-t)x_2)\|_{X^*}\|x_1 - x_2\|.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(t) = F(x_1 + t(x_2 - x_1)),\ t \in [0,1],\ x_1, x_2 \in X.$$

Χρησιμοποιώντας την Gateaux διαφορισιμότητα του F στο σημείο $x_1+t(x_2-x_1)$ στην κατεύθυνση του $h = x_2 - x_1$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dt}(t) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\phi(t+\epsilon)-\phi(t)}{\epsilon} \\
&= \frac{F(x_1 + t(x_2-x_1) + \epsilon(x_2-x_1)) - F(x_1 + t(x_2-x_1))}{\epsilon} \\
&= \langle DF(x_1 + t(x_2-x_1)), x_2 - x_1\rangle.
\end{aligned}$$

Εξάλλου, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση ϕ, υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε

$$\frac{d\phi}{dt}(t_0) = \phi(1) - \phi(0),$$

οπότε θα έχουμε

$$\langle DF(x_1 + t_0(x_2 - x_1)), x_2 - x_1\rangle = \phi(1) - \phi(0).$$

Όμως, είναι $\phi(1) = F(x_2)$ και $\phi(0) = F(x_1)$, οπότε

$$|F(x_2) - F(x_1)| = |\langle DF(x_1 + t_0(x_2 - x_1)), x_2 - x_1\rangle|$$

και λόγω της ανισότητας του Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned} |F(x_2) - F(x_1)| &\leq \|DF(x_1 + t_0(x_2 - x_1))\|_{X^*}\|x_2 - x_1\|_X, \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} \|DF(tx_1 + (1-t)x_2)\|_{X^*}\|x_2 - x_1\|_X. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.1.6. Το θεώρημα της Μέσης τιμής ισχύει και στην περίπτωση όπου αντί για ένα Gateaux παραγωγίσιμο συναρτησιακό έχουμε μια Gateaux παραγωγίσιμη συνάρτηση από ένα χώρο Banach X σε ένα χώρο Banach Y, αρκεί στο ά μέλος της ανισότητας να αντικαταστήσουμε την απόλυτη τιμή με την $\|\cdot\|_Y$. Εξάλλου, ίσως φαίνεται παράξενο που σε αυτό το θεώρημα έχουμε μια ανισότητα αντί για μια ισότητα που έχουμε στο κλασικό θεώρημα της μέσης τιμής του απειροστικού λογισμού. Όμως, σε αυτή τη γενική περίπτωση δεν μπορούμε να έχουμε ισότητα αφού υπάρχουν περιπτώσεις όπου έχουμε αυστηρή ανισότητα. Για παράδειγμα, έστω $X = [0,1]$, $Y = \mathbb{R}^2$ και η συνάρτηση $f : X \to Y$ με $f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$. Τότε, $f(1) - f(0) = 0$ και $\|Df(x)\|_Y = 2\pi$, για όλα τα $x \in [0,1]$.

1.2 Fre′chet **Παράγωγος**

Ορισμός 1.2.1. **(Fréchet Παράγωγος)** Έστω X ένας χώρος Banach και $F : X \to \mathbb{R}$ ένα συναρτησιακό. Το F λέγεται **Fréchet** (ή ισχυρώς) **παραγωγίσιμο** στο σημείο $x \in X$ αν υπάρχει στοιχείο $DF(x) \in X^*$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|F(x+h) - F(x) - \langle DF(x), h\rangle|}{\|h\|} \quad (3)$$

Το στοιχείο $DF(x)$ του X^* λέγεται **Fréchet παράγωγος** του F στο x και όταν υπάρχει είναι μοναδικό.
Έστω X, Y δυο χώροι Banach και $U \subset X$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $F : X \to Y$ λέγεται **Fréchet παραγωγίσιμη** στο σημείο $x \in U$ αν υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $DF(x) : X \to Y$ ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|F\left(x+h\right) - F\left(x\right) - \langle DF\left(x\right), h\rangle\|_Y}{\|h\|_X}, \quad (4)$$

όπου το όριο σε αυτή την περίπτωση λαμβάνεται με την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης ορισμένης σε ένα μετρικό χώρο.
Η Fréchet παράγωγος είναι η γενίκευση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και της Jacobian μιας διανυσματικής συνάρτησης $\mathrm{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Σε χώρους διάστασης 1 η Gateaux παράγωγος και η Fréchet παράγωγος Fréchet παράγωγος ταυτίζονται.
Η Fréchet παράγωγος ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή $L : X \to Y$ είναι ο ίδιος ο L. □

□

Παρατήρηση 1.2.1. Κάθε Fréchet παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα σημείο $x \in X$ είναι και Gateaux παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Πραγματικά, αν στη σχέση (3) θέσουμε όπου h to ϵh προκύπτει η σχέση (2). Ωστόσο, το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα, ακόμα και σε χώρους πεπερασμένης διάστασης (βλ. Παράδειγμα 1.1.1). Αποδείξαμε, για παράδειγμα, ότι η norm είναι Gateaux παραγωγίσιμη για κάθε $x \neq 0$ (βλ. Παράδειγμα 1.1.3), όμως δεν είναι Fréchet παραγωγίσιμη γιατί δεν είναι γραμμική. Αντί για ένα παράδειγμα, μπορούμε να διατυπώσουμε ένα πιό γενικό επιχείρημα προς αυτή την κατεύθυνση αν παρατηρήσουμε ότι η (2) συνεπάγεται την

$$F(x + \epsilon h) - F(x) = \epsilon\langle DF(x), h\rangle + R_G(\epsilon, h),$$

όπου ο *εναπομείναντας* όρος $R_G(\epsilon, h)$ είναι τέτοιος ώστε $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \frac{R(\epsilon,h)}{\epsilon} = 0$, και η (3) την

$$F(x + h) - F(x) = \langle DF(x), h\rangle + R_F(\|h\|),$$

όπου ο *εναπομείναντας* όρος $R_F(\|h\|)$ είναι τέτοιος ώστε $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \frac{R_F(\|h\|)}{\|h\|} = 0$. Στην πρώτη περίπτωση ο $R_G(\epsilon, h)$ εξαρτάται από την επιλογή της κατεύθυνσης h, ενώ στην δεύτερη ο $R_F(\|h\|)$ δεν εξαρτάται από αυτή αλλά παραμένει ο ίδιος για όλα τα h με $\|h\| \to 0$.

Παράδειγμα 1.2.1. Έστω $X = Y = C[a,b]$ με την $\|\cdot\|$ norm και $\mathrm{A} : X \to X$ ο γραμμικός ολοκληρωτικός τελεστής που ορίζεται με τη σχέση

$$\mathrm{A}(u)(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt,$$

όπου η $K(x,t)$ είναι συνεχής στο $[a,b] \times [a,b]$. Τότε, $DA(u) = A(u)$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} [A(u+h) - A(u)](x) &= \int_a^b K(x,t)[u(t)+h(t)]dt - \int_a^b K(x,t)u(t)dt \\ &= \int_a^b K(x,t)[u(t)+h(t)-u(t)]dt \\ &= \int_a^b K(x,t)h(t)dt. \end{aligned}$$

Ο τελευταίος όρος στην παραπάνω ισότητα είναι ένας γραμμικός τελεστής στο h (το οποίο δεν αποτελεί έκπληξη, αφού ο τελεστής A είναι γραμμικός). Τέλος, παρατηρούμε ότι για όλα τα $h \neq 0$ ισχύει

$$\frac{1}{\|h\|}\left[A(u+h) - A(u) - \int_a^b K(x,t)h(t)dt\right] = 0,$$

οπότε, η Fréchet παράγωγος του A είναι ο ίδιος ο A.

Παράδειγμα 1.2.2. Έστω $X = Y = C[a,b]$ με την $\|\cdot\|$ norm και $\mathrm{T} : X \to X$ ο μη γραμμικός ολοκληρωτικός τελεστής που ορίζεται με τη σχέση

$$\mathrm{T}(u)(x) = u(x)\int_a^b K(x,t)u(t)dt,$$

όπου η $K(x,t)$ είναι συνεχής στο $[a,b] \times [a,b]$. Τότε, ο T είναι Fréchet παραγωγίσιμος.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
[A(u+h)-A(u)](x) &= [u(x)+h(x)]\int_a^b K(x,t)[u(t)+h(t)]dt \\
&\quad -u(x)\int_a^b K(x,t)u(t)dt \\
&= u(x)\int_a^b K(x,t)h(t)dt + h(x)\int_a^b K(x,t)u(t)dt \\
&\quad +h(x)\int_a^b K(x,t)h(t)dt.
\end{aligned}$$

Ο τελευταίος όρος $R(u,h) = h(x)\int_a^b K(x,t)h(t)dt$ στην παραπάνω ισότητα είναι μη γραμμικός στο h, ωστόσο,

$$\|R(u,h)\| = \max_{x\in[a,b]}\left|h(x)\int_1^b K(x,t)h(t)dt\right| \leq M\|h\|^2,$$

όπου $\mathrm{M} = (b-a)\max\limits_{[a,b]\times[a,b]} K(x,t)$. Άρα,

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{R(\|h\|)}{\|h\|} \to 0.$$

οπότε, η Fréchet παράγωγος του Τ δίνεται από τη σχέση

$$\langle DT(u),h\rangle = u(x)\int_a^b K(x,t)h(t)dt + h(x)\int_a^b K(x,t)u(t)dt.$$

Παράδειγμα 1.2.3. Έστω $X = C_0^1[0,1]$ ο χώρος όλων των $C^1[0,1]$ οι οποίες μηδενίζονται στα άκρα του $[0,1]$ με την (energy) norm $\|u\| = \sqrt{\int_0^1 [u^2+(u')^2]dx}$. Θεωρούμε το συναρτησιακό που ορίζεται με τη σχέση

$$F(u)(x) = \int_0^1 [u^3+(u')^2]dx.$$

Τότε, το F είναι Fréchet παραγωγίσιμο.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} F(u+h)-F(u) &= \int_0^1 [(u+h)^3+(u'+h')^2]dx - \int_0^1 [u^3+(u')^2]dx \\ &= \int_0^1 [3u^2h+2u'h']dx + \int_0^1 [3uh^2+h^3+(h')^2]dx \\ &= \int_0^1 [3u^2h+2u'h']dx + R(u,h). \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι στην τελευταία σχέση έχουμε αναδιατάξει τους όρους έτσι ώστε το α' μέρος να περιλαμβάνει όλους τους γραμμικούς όρους ως προς h και ο εναπομείναντας όρος $R(u,h) = \int\limits_0^1 [3uh^2+h^3+(h')^2]dx$ περιλαμβάνει όλους τους μη γραμμικούς όρους ως προς h. Έτσι, αν $\frac{R(\|h\|)}{\|h\|} \to 0$ καθώς το $\|h\| \to 0$, τότε το γραμμικό μέρος της θα είναι η Fréchet παράγωγος του K. Έχουμε

$$\begin{aligned} R(\|h\|) &\leq \int_0^1 |3uh^2+h^3+(h')^2|dx \\ &\leq 3\max_{x\in[0,1]}|u(x)|\int_0^1 h^2dx + \max_{x\in[0,1]}|h(x)|\int_0^1 h^2dx + \int_0^1 (h')^2dx. \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της norm στον $C_0^1[0,1]$ είναι

$$\int_0^1 h^2dx \leq \|h\|^2, \quad \int_0^1 (h')^2dx \leq \|h\|^2,$$

οπότε

$$R(\|h\|) \leq (3\|u\|_\infty + \|h\|_\infty + 1)\|h\|^2.$$

Άρα,

$$\frac{R(\|h\|)}{\|h\|} \leq (3\|u\|_\infty + \|h\|_\infty + 1)\|h\|.$$

Από την τελευταία για $\|h\| \to 0$ το $\frac{R(\|h\|)}{\|h\|} \to 0$, με την προϋπόθεση ότι η $\|h\|_\infty$ είναι φραγμένη για όλα τα h. Ωστόσο, αυτό δεν είναι <προφανώς> εξασφαλισμένο και αυτό συμβαίνει γιατί η h είναι μεν φραγμένη (αφού είναι μια C^1 συνάρτηση στο $[0,1]$), δηλαδή, υπάρχει μια σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $|h(x) \leq M$, για κάθε

$x \in [0,1]$, αλλά για κάθε h υπάρχει ένα συγκεκριμένο M, ενώ εμείς θέλουμε ένα M για όλες τις h. Όμως ισχύει (βλ. Πρόταση 1.2.1)

$$\|h\|_\infty \leq 2\sqrt{\int_0^1 (h')^2 dx}, \ \forall\, h \in C^1[0,1].$$

Επομένως, η Fréchet παράγωγος του F δίνεται από τη σχέση

$$\langle DF(u), h\rangle = \int_0^1 [3u^2 h + 2u'h']dx.$$

Πρόταση 1.2.1. Αν $h \in C^[0,1]$ και $h(0) = 0$, τότε

$$\|h\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |h(x)| \leq 2\sqrt{\int_0^1 (h')^2 dx}.$$

Απόδειξη. Αν $h \equiv 0$ στο $[0,1]$ τότε η ανισότητα ισχύει, οπότε υποθέτουμε ότι $h \not\equiv 0$ στο $[0,1]$. Από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, έχουμε

$$h^2(t) = h^2(x) - h^2(0) = \int_0^x (h(t)^2)' dt = 2\int_0^x h(t)h'(t)dt$$

και από την ανισότητα Cauchy-Schwartz παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_0^x h(\tau)h'(t)dt &\leq \sqrt{\int_0^1 h^2(t)dt}\sqrt{\int_0^1 (h'(t))^2 dt} \leq \max_{x\in[0,1]} |h(x)| \int_0^1 (h'(t))dt \\ &\leq \|h\|_\infty \sqrt{\int_0^1 (h'(t))^2 dt}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$h^2(t) \leq 2\|h\|_\infty^2 \leq 2\|h\|_\infty \sqrt{\int_0^1 (h'(t))^2 dt},$$

και επομένως, $\|h\|_\infty \leq 2\|h\|$.

Παράδειγμα 1.2.4. Έστω $X = H$ ένας χώρος Hilbert με norm $\|\cdot\|$ και εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Θεωρούμε ένα γραμμικό και φραγμένο τελεστή $A : H \to \mathbb{R}$ και το συναρτησιακό $F : \mathrm{H} \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \frac{1}{2}\langle A(x), x\rangle$. Τότε,

$$\begin{aligned} F(x+\varepsilon h) - F(x) &= \frac{1}{2}\langle A(x+\varepsilon h), x+\varepsilon h\rangle - \frac{1}{2}\langle A(x), x\rangle \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon \langle A(x), h\rangle + \frac{1}{2}\varepsilon \langle A(h), x\rangle + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \langle A(h), h\rangle \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon \langle A(x), h\rangle + \frac{1}{2}\varepsilon \langle h, A^*(x)\rangle + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \langle A(h), h\rangle \\ &= \varepsilon \left\langle \frac{1}{2}(A+A^*)(x), h\right\rangle + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \langle A(h), h\rangle, \end{aligned}$$

όπου A^* είναι ο συζυγής του A.
Επειδή, ο τελεστής A είναι γραμμικός και φραγμένος, συμπεραίνουμε ότι η Gateaux παράγωγος του F είναι

$$DF(x;h) = \left\langle \frac{1}{2}(A+A^*)(x), h\right\rangle, \ \forall\, h \in X,$$

οπότε από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έχουμε ότι

$$DF(x) = \frac{1}{2}(A+A^*)(x).$$

Επειδή, ο τελεστής A είναι φραγμένος υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $\|\mathrm{A}\| \leq c$, οπότε έχουμε

$$\left| F(x+h) - F(x) - \left\langle \frac{1}{2}(A+A^*)(x), h\right\rangle \right| = \frac{1}{2}\left|\langle A(h), h\rangle\right| \leqslant c\,\|h\|^2.$$

Αν διαιρέσουμε την τελευταία κατά μέλη με $\|h\|$ και πάρουμε τα όρια για $\|h\| \to 0$ συμπεραίνουμε ότι η Fréchet παράγωγος του F είναι ίση με

$$DF(x) = \frac{1}{2}(A+A^*)(x),$$

δηλαδή, ίση με την Gateaux παράγωγό του.
Αν $A = I$, τότε $F(x) = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle = \frac{1}{2}\|x\|^2$ και η Fréchet παράγωγος του F είναι ίση $DF(x) = x$ (βλ. και Παράδειγμα 1.1.2).
Αν $A = A^*$, δηλαδή, ο A είναι αυτοσυζυγής, τότε $DF(x) = \mathrm{A}(x)$.

Παρατήρηση 1.2.2. Είδαμε ότι μια Fréchet παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι και Gateaux παραγωγίσιμη. Επίσης από τον ορισμό της Gateaux παραγώγου προκύπτει ότι για μια Gateaux παραγωγίσιμη συνάρτηση όλες οι κατευθυνόμενες παράγωγοι υπάρχουν, οπότε, για συναρτήσεις ορισμένες σε χώρους πεπερασμένης διάστασης και όλες οι μερικοί παράγωγοι υπάρχουν. Τα αντίστροφα των παραπάνω προτάσεων δεν ισχύουν απαραίτητα ακόμα και για χώρους πεπερασμένης διάστασης.

1.3 Gateaux, Fre´chet **Παραγωγισιμότητα και Συνέχεια**

Όπως έχουμε αναφέρει η Fréchet παράγωγος αποτελεί γενίκευση της κλασικής παραγώγου, οπότε είναι αναμενόμενο μια Fréchet παραγωγίσιμη συνάρτηση να είναι συνεχής. Πραγματικά, αυτό είναι αληθές και συγκεκριμένα ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.3.1. Έστω X ένας χώρς Banach, $A \subset X$ και $F : X \to \mathbb{R}$ ένα συναρτησιακό το οποίο είναι Fréchet παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x \in \text{int}(A)$. Τότε, το F είναι συνεχές στο x.

Απόδειξη. Αφού το $x \in \text{int}(A)$, υπάρχει $\epsilon_1 > 0$ τέτοιο ώστε $(x + h) \in A$, για κάθε h τέτοιο ώστε $\|h\| \leq \epsilon_1$.
Από τον ορισμό της Fréchet παραγώγου του F στο x έπεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα $\epsilon_2 > 0$ τέρτοιο ώστε για κάθε h με $\|h\| \leq \epsilon_2$, έχουμε

$$|F(x + h) - F(x) - \langle DF(x), h\rangle| \leq \epsilon\|h\|.$$

Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned}|F(x+h) - F(x)| &= |F(x+h) - F(x) - \langle DF(x), h\rangle + \langle DF(x), h\rangle| \\ &\leq |F(x+h) - F(x) - \langle DF(x), h\rangle| + |\langle DF(x), h\rangle| \\ &\leq |F(x+h) - F(x) - \langle DF(x), h\rangle| + \|DF(x)\|_{X^*}\|h\|.\end{aligned}$$

όπου $\|DF(x)\|_{X^*}$ είναι η norm του $DF(x) \in X^*$.
Θέτουμε $\delta = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $\|h\| < \delta$ θα έχουμε

$$|F(x + h) - F(x)| \leq (\epsilon + \|DF(x)\|_{X^*})\|h\|,$$

οπότε, υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε αν $\|h\| < \delta$

$$|F(x + h) - F(x)| \leq c\|h\|,$$

από το οποίο έπεται η συνέχεια του F sto x.

Έχουμε αποδείξει ότι η Gateaux παραγωγισιμότητα ενός συναρτησιακού είναι ασθενέστερη ιδιότητα από την Fréchet παραγωγισιμότητα. Έτσι, αντίθετα με την παραπάνω πρόταση, η Gateaux παραγωγισιμότητα δεν εξασφαλίζει τη συνέχεια του συναρτησιακού στο σημείο αυτό (βλ. Παράδειγμα 1.3.1). Ωστόσο, η

Gateaux παραγωγισιμότητα ενός συναρτησιακού μας εξασφαλίζει την ημισυνέχεια (βλ. Ορισμός 1.3.1) η οποία είναι μια ασθενέστερη ιδιότητα από τη συνέχεια (βλ. Πρόταση 1.3.1).

Παράδειγμα 1.3.1. Έστω

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_2^3}{x_1}, \ x_1 \neq 0 \\ 0, \ x_1 = 0. \end{cases}$$

Η f είναι Gateaux παραγωγίσιμη στο σημείο $(0,0)$, αλλά δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη Για τυχόν $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, $h_1 \neq 0$ έχουμε

$$\frac{|f((0,0) + \epsilon h) - f(0,0)|}{\epsilon} = \epsilon^2 \left| \frac{h_2^3}{h_1} \right|,$$

οπότε για $\epsilon \to 0$ είναι $Df((0,0); h) = 0$. Όμως, η f δεν είναι συνεχής στο (0,0), αφού για $x_1 \neq 0$, είναι $f(x_1, \lambda x_1) = \lambda^3 x_1^2$, και επομένως δεν υπάρχει το όριο της f για $(x_1, x_2) \to (0,0)$.

Ορισμός 1.3.1. (**Ημισυνέχεια**) Ένα συναρτησιακό $F : X \to \mathbb{R}$, όπου X είναι ένας χώρος Banach λέγεται **ημισυνεχές** (hemicontinuous) στο σημείο $x \in X$ αν η πραγματική συνάρτηση $\lambda \to F(x + \lambda h)$ είναι συνεχής στο $\lambda = 0$, για κάθε $h \in X$, δηλαδή,

$$\lim_{\epsilon \to 0} F(x + \lambda h) = F(x), \ \forall\, h \in X.$$

□

Πρόταση 1.3.2. Έστω A ένα υποσύνολο ενός χώρου Banach και έστω $F : A \to \mathbb{R}$ ένα Gateaux παραγωγίσιμο συναρτησιακό σε ένα σημείο $x \in \text{int}(A)$. Τότε, το F είναι ημισυνεχές στο x.

Απόδειξη. Παίρνουμε ένα $h \in A$, $h \neq 0$ τυχόν και θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση $\phi(\lambda) = F(x + \lambda h)$. Επειδή, το F είναι Gateaux παραγωγίσιμο το

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{F(x + \lambda h) - F(x)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\phi(\lambda) - \phi(0)}{\lambda}$$

είναι πραγματικός αριθμός, το οποίο σημαίνει ότι η συνάρτηση ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $\lambda = 0$, οπότε αυτή θα είναι συνεχής σε αυτό το σημείο, δηλαδή, θα είναι $\lim_{\lambda \to 0} \phi(\lambda) = \phi(0)$ ή (από τον ορισμό της ϕ) $\lim_{\epsilon \to 0} F(x + \lambda h) = F(x)$ και άρα, το F είναι ημισυνεχές.

Παρατήρηση 1.3.1. Η ημισυνέχεια είναι ασθενέστερη ιδιότητα από τη συνέχεια ακόμα και σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_2}{x_1}(x_1^2 + x_2^2), & x_1 \neq x_2 \\ 0, & x_1 = 0 \end{cases}$$

είναι ημισυνεχής στο σημείο $(0,0)$. Πραγματικά, αν πάρουμε κάποιο $h = (h_1, h_2) \neq (0,0)$ και ορίσουμε τη συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπως και στην Πρόταση 1.3.2 θα έχουμε

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\phi(\lambda) - \phi(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} F(\lambda(h_1, h_2)) = \lim_{\lambda \to 0} \lambda^2 F((h_1, h_2)) = 0,$$

δηλαδή, η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο 0, οπότε είναι συνεχής το οποίο σημαίνει ότι η F είναι ημισυνεχές. Όμως, η F δεν είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$ γιατί

$$\lim_{(x_1,x_2) \to (0,0)} F(x_1, x_2) = \lim_{\rho \to 0} F(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) = \lim_{\rho \to 0} (\tan\theta \rho^2), \ \ \theta \in (-\pi, \pi].$$

Το όριο όμως αυτό δεν υπάρχει και επομένως η F δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Η πρόταση που ακολουθεί μας επιτρέπει να περάσουμε από την Gateaux στην Fréchet παραγωγισιμότητα ενός συναρτησιακού $F : X \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο $x \in X$ και συγκεκριμένα, για να είναι αυτό δυνατόν, αρκεί το F να είναι Gateaux παραγωγίσιμο με συνεχή Gateaux παράγωγο όχι μόνο στο x αλλά σε μια γειτονιά $\mathcal{N}(x)$ του x. Δηλαδή, απαιτείται η *Gateaux αναλυτικότητα* του F στο x.

Πρόταση 1.3.3. Έστω ένα συναρτησιακό $F : X \to \mathbb{R}$ Gateaux παραγωγίσιμο σε μια ανοικτή γειτονιά $\mathcal{N}(x)$ του x και έστω ότι η Gateaux παράγωγος $x \to DF(x)$ του F στο x είναι συνεχής. Τότε, το F είναι Fréchet παραγωγίσιμο στο x με συνεχή Fréchet παράγωγο στο x.

Απόδειξη. Για τυχόν αλλά σταθερό $h \in X$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g(t) = F(x + th) - F(x) - t\langle DF(x), h\rangle.$$

Από την Gateaux παραγωσιμότητα του F έπεται ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη, οπότε το θεώρημα της μέσης τιμής συνεπάγεται ότι

$$g(1) - g(0) = \frac{dg}{dt}(t_0),$$

για κάποιο $t_0 \in (0, 1)$.
Επειδή, όμως

$$\frac{dg}{dt}(t_0) = \langle DF(x + t_0 h) - DF(x), h\rangle$$

παίρνουμε ότι

$$F(x + h) - F(x) - \langle DF(x), h\rangle = \langle DF(x + t_0 h) - DF(x), h\rangle.$$

Από την τελευταία σχέση και από την συνέχεια του DF προκύπτει ότι το F είναι Fréchet παραγωγίσιμο στο x. Τέλος, η συνέχεια της Fréchet παραγώγου έπεται από τη συνέχεια της Gateaux παραγώγου. (Η Fréchet παράγωγος συμπίπτει με την Gateaux παράγωγο, όταν υπάρχουν και οι δύο).

Παρατήρηση 1.3.2. Το αντίστροφο της Πρότασης 1.3.3 δεν ισχύει απαραίτητα. Αν ένα συναρτησιακό είναι Fréchet παραγωγίσιμο είναι και Gateaux παραγωγίσιμο, ωστόσο η Gateaux παράγωγος δεν είναι απαραίτητα συνεχής.