

Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση

Μια Εισαγωγή

Νίκος Λαμπρόπουλος

17 Δεκεμβρίου 2024

Περιεχόμενα

1	Δυσικοί Χώροι	5
1.1	Ο Δυσικός ενός Χώρου με norm	5
1.2	Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz	12
1.3	Ο δυσικός Χώρος X^{**} του X^*	15

Κεφάλαιο 1

Δυϊκοί Χώροι

1.1 Ο Δυϊκός ενός Χώρου με norm

Μια σημαντική έννοια είναι εκείνη του δυϊκού χώρου X^* ενός γραμμικού χώρου X , ο οποίος μπορεί να οριστεί μέσω των γραμμικών συναρτησοειδών από τον X στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύνολο των γραμμικών συναρτησιακών που ορίζονται σε γραμμικό χώρο X πάνω σε ένα σώμα K ($K = \mathbb{R}$ ή $K = \mathbb{C}$), ο οποίος δεν είναι απαραίτητο να είναι χώρος με norm. Ένα μεγάλης σημασίας αλλά απλό ερώτημα που τίθεται και αφορά αυτό το σύνολο έχει να κάνει με την δομή αυτού του συνόλου και ιδιαίτερα με το αν αυτό το σύνολο είναι γραμμικός χώρος. Ορίζουμε τις αλγεβρικές πράξεις του χώρου αυτού ως ακολούθως:

Για κάθε $f_1, f_2 \in X^*$, κάθε $x \in X$ και κάθε $a \in K$ είναι

(i) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$, και

(ii) $(af)(x) = af(x)$.

Τότε, το σύνολο αυτό είναι ένας γραμμικός χώρος και το γεγονός αυτό δίνει μια καταφατική απάντηση στο ερώτημα. Ο γραμμικός αυτός χώρος λέγεται **αλγεβρικός δυϊκός** του X και συμβολίζεται με X^* .

Παρατήρηση 1.1.1. Ο αλγεβρικός δυϊκός X^* δεν έχει σχέση με κάποια norm. Ωστόσο, επειδή οι πλουσιότεροι σε *καλές ιδιότητες* χώροι είναι αντικειμενικά πιο χρήσιμοι στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τον δυϊκό ενός χώρου X με norm και όταν αναφερόμαστε στο δυϊκό ενός χώρου θα εννοούμε τον τοπολογικό δυϊκό του (βλ. Ορισμός 1.1.1) (εκτός και αν αλλιώς μας ζητηθεί) και θα τον συμβολίζουμε πάλι με X^* .

Ορισμός 1.1.1. Έστω X ένας χώρος με norm. Ο χώρος $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών από τον X στο $\mathbb{R}$ λέγεται (τοπολογικός) **δυϊκός χώρος** του X και συμβολίζεται με X^* . Η δράση κάθε στοιχείου x^* του X^* πάνω σε ένα στοιχείο $x \in X$ συμβολίζεται με

$$x^*(x) = \langle x^*, x \rangle_{X^*, X}$$

(ή απλά με $\langle \cdot, \cdot \rangle$) και ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο ως προς τη δυϊκότητα των X και X^* .

Ο X^* είναι εφοδιασμένος με τη norm

$$\|x^*\|_{X^*} = \sup\{|x^*(x)| : \|x\|_X \leq 1\} = \sup\{|\langle x^*, x \rangle| : \|x\|_X \leq 1\}, \quad (1.1)$$

ή ισοδύναμα

$$\|x^*\|_{X^*} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\langle x^*, x \rangle|}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\langle x^*, x \rangle|, \quad (1.2)$$

για κάθε $x \in X, x^* \in X^*$. □

Το θεώρημα που ακολουθεί αποτελεί μια πρώτη επιβεβαίωση της σπουδαιότητας του δυϊκού χώρου ενός χώρου με norm.

Θεώρημα 1.1.1. Έστω X ένας χώρος με norm. Ο δυϊκός χώρος X^* του X είναι χώρος Banach (ακόμα και αν ο X δεν είναι χώρος Banach).

Απόδειξη. Αφού ένα γραμμικό συναρτησιακό στον X απεικονίζει τον X στο $\mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{C}$) και αφού το $\mathbb{R}$ (ή το $\mathbb{C}$) με τη συνήθη μετρική του είναι πλήρες, ο X^* ανήκει στον $\mathcal{B}(X, Y)$, όπου Y είναι ο πλήρης μετρικός χώρος $\mathbb{R}$ (ή ο $\mathbb{C}$). Το αποτέλεσμα προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος ??.

Ένα πρώτο ερώτημα που τίθεται κατά την μελέτη ενός χώρου με norm έχει να κάνει με το αν μπορούμε να βρούμε με τι μοιάζει ο δυϊκός του ή ακόμα και με το ποιός ακριβώς είναι αυτός ο χώρος. Θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.1.2. Ένας **ισομορφισμός** ενός χώρου X με norm επί ενός χώρου με norm $\tilde{X}$ είναι ένας 1-1 και επί γραμμικός τελεστής $T : X \rightarrow \tilde{X}$, ο οποίος διατηρεί τη norm, δηλαδή,

$$\|T(x)\| = \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Επομένως, ο T είναι μια **ισομετρία**. Ο X λέγεται **ισομορφικός** με τον $\tilde{X}$ και οι $X, \tilde{X}$ λέγονται **ισομορφικοί** χώροι. □

Παρατήρηση 1.1.2. Από μια αφηρημένη άποψη, δυο ισομορφικοί χώροι X και $\tilde{X}$ είναι 'πανομοιότυποι' και ο ισομορφισμός ισοδυναμεί απλά με την μετονομασία των στοιχείων τους επισυνάπτοντας κατά κάποια έννοια σε κάθε στοιχείο x του X μια "ετικέτα" T και το εμφανίζει σαν στοιχείο του $\tilde{X}$.

Ο λόγος που αναφερόμαστε σε αυτό το σημείο στους ισομορφικούς χώρους είναι γιατί, όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι δυϊκοί χώροι κάποιων βασικών χώρων με norm είναι ισομορφικοί με τους χώρους αυτούς ενώ για κάποιους άλλους δεν συμβαίνει το ίδιο. Ωστόσο, και οι δυο περιπτώσεις είναι ενδιαφέρουσες.

Παράδειγμα 1.1.1. Ο δυϊκός χώρος του $\mathbb{R}^n$ είναι ο ίδιος ο $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Έστω $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ μια βάση του $\mathbb{R}^n$ και $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ένα στοιχείο του. Τότε, από την ανισότητα των Cauchy – Schwarz, για κάθε $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f\left(\sum_{j=1}^n e_j x_j\right) \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j f(e_j)| \leq \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n (f(e_j))^2 \right)^{1/2} \\ &= \|x\| \left(\sum_{j=1}^n (f(e_j))^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Παίρνοντας το sup πάνω σε όλα τα x με $\|x\| = 1$ έχουμε

$$\|f\| \leq \left(\sum_{j=1}^n (f(e_j))^2 \right)^{1/2}.$$

Εξάλλου, για $x = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ από την ανισότητα των Cauchy – Schwarz παίρνουμε ισότητα, οπότε

$$\|f\| = \left(\sum_{j=1}^n (f(e_j))^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 \right)^{1/2} = \|y\|,$$

όπου $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Αυτό αποδεικνύει ότι η norm του f είναι η Ευκλείδεια και ότι $\|f\| = \|y\|$ για κάποιο $y \in \mathbb{R}^n$.

Άρα, η απεικόνιση του $(\mathbb{R}^n)^*$ στο $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την $f \rightarrow y$, με

$$y = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$$

διατηρεί τη norm και επειδή είναι γραμμική 1-1 και επί (αποδείξτε το) είναι ένα ισομορφισμός.

Παράδειγμα 1.1.2. Ο δυϊκός χώρος του L^p με $1 < p < \infty$ είναι ο L^q , όπου q είναι ο συζυγής του p , δηλαδή $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Απόδειξη (βλ. Θεώρημα ??).

Παράδειγμα 1.1.3. Ο δυϊκός χώρος του L^1 είναι ο L^∞ .

Απόδειξη (βλ. Θεώρημα ??).

Παράδειγμα 1.1.4. Ο δυϊκός χώρος του L^∞ περιέχει τον L^1 και είναι αυστηρά μεγαλύτερός του.

Απόδειξη (βλ. Παρατήρηση ??).

Παράδειγμα 1.1.5. Ο δυϊκός χώρος του ℓ^1 είναι ο ℓ^∞ .

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι εξ ορισμού κάθε στοιχείο του χώρου ℓ^1 είναι μια ακολουθία $x = (x_1, x_2, \dots)$ από αριθμούς τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < +\infty$ (βλ. Ορισμός ??) καθώς και ότι μια Schauder βάση του (βλ. Παράδειγμα ??) είναι η

$$\{e_1 = (1, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)\}.$$

Άρα, κάθε $x \in \ell^1$ έχει μια μοναδική αναπαράσταση

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j. \quad (1)$$

Θεωρούμε ένα τυχόν στοιχείο $f \in (\ell^1)^*$, όπου $(\ell^1)^*$ είναι ο δυϊκός χώρος του ℓ^1 . Επειδή, το f είναι γραμμικό και φραγμένο, έχουμε

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} f(x_j e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j f(e_j), \quad (2)$$

όπου οι αριθμοί $f(e_j)$ είναι μοναδικά καθορισμένοι από το f . Εξάλλου, επειδή είναι $\|e_j\| = 1$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$|f(e_j)| \leq \|f\| \|e_j\| = \|f\|, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

οπότε

$$\sup_j |f(e_j)| \leq \|f\|, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

που σημαίνει ότι $\{f(e_j)\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$.

Αντίστροφα, για κάθε $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ μπορούμε να ορίσουμε στον ℓ^1 το συναρτησιακό g με

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

όπου $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^1$. Τότε το g είναι γραμμικό και επειδή

$$|g(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |y_j| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\| \sup_{j \in \mathbb{N}} |y_j|$$

είναι και φραγμένο. Άρα, $g \in (\ell^1)^*$.

Θα αποδείξουμε ότι η norm του f είναι η norm του ℓ^{∞} . Από την (2) έχουμε

$$|f(x)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j f(e_j) \right| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |f(e_k)| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|x\| \sup_{k \in \mathbb{N}} |f(e_k)|, \quad (5).$$

Από την (4) παίρνοντας τα $\sup$ πάνω από όλα τα x με $\|x\| = 1$, έχουμε ότι

$$\|f\| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |f(e_k)|, \quad (6).$$

Από την (4) και την (6) έχουμε ότι

$$\|f\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |f(e_k)|,$$

η οποία είναι η norm του ℓ^{∞} . Άρα, $\|f\| = \|f(e_k)\|_{\infty}$.

Επιπλέον, η απεικόνιση από τον $(\ell^1)^*$ στον ℓ^{∞} που ορίζεται από την

$$f \rightarrow y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} = \{f(e_k)\}_{k=1}^{\infty}$$

είναι 1-1 και επί (γιατί;), οπότε είναι ένας ισομορφισμός.

Παράδειγμα 1.1.6. Ο δυϊκός χώρος του ℓ^p με $1 < p < +\infty$ είναι ο ℓ^q , όπου ο q είναι ο συζυγής του p , δηλαδή, $1/p + 1/q = 1$.

Απόδειξη. Μια Schauder βάση για τον ℓ^p είναι η

$$\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots\},$$

όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα.

Άρα, κάθε $x \in \ell^p$ έχει μια μοναδική αναπαράσταση

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k. \quad (1)$$

Θεωρούμε ένα τυχόν στοιχείο $f \in (\ell^p)^*$, όπου $(\ell^p)^*$ είναι ο δυϊκός χώρος του ℓ^p .

Επειδή, το f είναι γραμμικό και φραγμένο, έχουμε

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \beta_k, \quad (2)$$

όπου οι αριθμοί $f(e_k)$ είναι μοναδικά καθορισμένοι από το f .

Έστω q ο συζυγής του p , $(1/p + 1/q = 1)$. Θέτουμε $\alpha_n = \{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$, όπου

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} |\beta_k|^q / \beta_k, & \beta_k \neq 0 \text{ και } k \leq n \\ 0, & \beta_k = 0 \text{ η } k > n \end{cases} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας στη (2) παίρνουμε

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} \beta_k = \sum_{k=1}^n |\beta_k|^q \quad (4)$$

Επίσης, από την (3) επειδή $(q-1)p = q$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(x_n) \leq \|f\| \|x_n\| &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^n |x_k^{(n)}|^p \right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^{(q-1)p} \right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^q \right)^{1/p} \end{aligned} \quad (5)$$

Από τις (4) και (5) παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^n |\beta_k|^q \leq \|f\| \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^q \right)^{1/p} \quad (6)$$

και επειδή είναι $1 - 1/p = 1/q$ από την (6) προκύπτει ότι

$$\left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^q \right)^{1-1/p} = \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^q \right)^{1/q} \leq \|f\| \quad (7)$$

Αφού το n είναι τυχαίο για $n \rightarrow \infty$ από την (7) προκύπτει ότι

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^q \right)^{1/q} \leq \|f\|. \quad (8)$$

Άρα, η $\{\beta_k\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^q$.

Αντίστροφα, για κάθε $\beta = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^q$ μπορούμε να ορίσουμε στον ℓ^p το συναρτησιακό g με

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \beta_k,$$

όπου $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$. Τότε, το g είναι γραμμικό και από την ανισότητα του Hölder (β. Πρόταση ??) παίρνουμε

$$|g(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k \beta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^q \right)^{1/q} \quad (9)$$

οπότε, επειδή το $x \in \ell^p$ λόγω της (3) προκύπτει ότι το g είναι και φραγμένο. Άρα, $g \in (\ell^p)^*$.

Θα αποδείξουμε ότι η norm του f είναι η norm του ℓ^q . Από την (9) έχουμε

$$|g(x)| \leq \|x\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^q \right)^{1/q} \quad (10)$$

Από την (10) παίρνοντας τα sup πάνω από όλα τα x με $\|x\| = 1$, έχουμε ότι

$$|g(x)| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^q \right)^{1/q} \quad (11)$$

Από την (8) και την (11) έχουμε ότι

$$|g(x)| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^q \right)^{1/q} \quad (11)$$

η οποία είναι η norm του ℓ^q . Άρα, $\|f\| = \|f(\beta_k)\|^q$.

Επιπλέον, η απεικόνιση από τον $(\ell^p)^*$ στον ℓ^q που ορίζεται από την

$$f \rightarrow \beta = \{\beta_k\}_{k=1}^\infty = \{f(e_k)\}_{k=1}^\infty$$

είναι 1-1 και επί (γιατί;), οπότε είναι ένας ισομορφισμός.

Παράδειγμα 1.1.7. Ο χώρος c_0 , των μηδενικών ακολουθιών εφοδιασμένος με τη norm $\|x\|_0 = \max |a_i|$, όπου $x = \{a_i\}_{i=1}^\infty \in c_0$ έχει δυϊκό τον ℓ^1 .

Απόδειξη. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in \ell^1$ τυχούσα αλλά σταθερή και ορίζουμε το γραμμικό συναρτησιακό f του οποίου η δράση πάνω στο τυχαίο $x \in c_0$ ορίζεται να είναι $f(x) = \sum_{i=1}^\infty a_i b_i$. Τότε, θα έχουμε

$$|f(x)| \leq \sum_{i=1}^\infty |a_i b_i| \leq \max_{1 \leq i < \infty} |a_i| \sum_{i=1}^\infty |b_i| = \|x\|_{c_0} \|f\|_{\ell^1}$$

και επομένως, $\|f\|_{c_0^*} \leq \|f\|_{\ell^1}$.

Έστω $f \in c_0^*$. Ορίζουμε, $f(e_n) = b_n$, όπου $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in c_0$ (όπου το 1 βρίσκεται στην n -οστή θέση). Θεωρούμε την ακολουθία $y_n = \sum_{k=1}^\infty e_k$, αν ο c_0 είναι

πραγματικός (ή την $y_n = \sum_{k=1}^\infty e^{-i \arg b_k} e_k$, αν ο c_0 είναι μιγαδικός). Τότε $\|y_n\|_{c_0} = 1$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|f\|_{c_0^*} \geq f(y_n) = \sum_{i=1}^\infty |b_i|,$$

οπότε $\|f\|_{c_0^*} \geq \|\{b_i\}\|_{\ell^1}$.

Αν ταυτίσουμε το $f \in c_0^*$ με την ακολουθία $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in \ell^1$, ($f = \{b_i\}_{i=1}^\infty \in \ell^1$), παίρνουμε $\|f\|_{c_0^*} \geq \|f\|_{\ell^1}$.

Άρα, $\|f\|_{c_0^*} = \|f\|_{\ell^1}$, που σημαίνει ότι υπάρχει μια ταύτιση του ℓ^1 σαν δυϊκού του c_0^* , η οποία διατηρεί τις norms.

1.2 Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz

Θα ήταν πολύ σημαντικό και με ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον να μπορούσαμε να έχουμε μια γενική μορφή για όλα (αν ήταν δυνατόν) τα φραγμένα γραμμικά συναρτησιακά των διάφορων χώρων που μελετάμε και χρησιμοποιούμε. Για

γενικούς χώρους Banach κάτι τέτοιο είναι πολύπλοκο, όμως για ένα χώρο Hilbert κάτι τέτοιο είναι εξαιρετικά απλό, όπως φαίνεται στο θεώρημα που ακολουθεί. Θα αποδείξουμε πρώτα μια χρήσιμη πρόταση.

Πρόταση 1.2.1. Αν x_1, x_2 είναι δυο στοιχεία ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο X και $\langle x_1, x \rangle = \langle x_2, x \rangle$ για όλα τα $x \in X$, τότε $x_1 = x_2$. Ειδικότερα, αν $\langle x_1, x \rangle = 0$, για όλα τα $x \in X$, τότε $x_1 = 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι

$$\langle x_1, x \rangle = \langle x_2, x \rangle, \forall x \in X.$$

Τότε

$$\langle x_1 - x_2, x \rangle = 0, \forall x \in X,$$

οπότε αν πάρουμε το $x = x_1 - x_2$ θα έχουμε

$$\langle x_1 - x_2, x_1 - x_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x_1 - x_2\|^2 = 0.$$

Άρα $x_1 - x_2 = 0$ και επομένως $x_1 = x_2$.

Ειδικότερα, αν

$$\langle x_1, x \rangle = 0, \forall x \in X,$$

για $x = x_1$ θα έχουμε

$$\langle x_1, x_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x_1\|^2 = 0,$$

οπότε $x_1 = 0$. □

Θεώρημα 1.2.1. (Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz) Έστω H ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Για κάθε $x^* \in H^*$, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in H$ τέτοιο ώστε

$$x^*(x) = \langle x^*, x \rangle_{H^*, H} = \langle x_0, x \rangle_H, \forall x \in H. \quad (1)$$

Επιπλέον

$$\|x^*\|_{H^*} = \|x_0\|_H. \quad (2)$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση x^* έχει μια αναπαράσταση που δίνεται από την (1), ότι το x_0 είναι μοναδικό και ότι ισχύει η (2).

Αν $x^* = 0$, τότε οι (1) και (2) ισχύουν αν πάρουμε $x_0 = 0$. Έστω ότι $x^* \neq 0$. Τότε $x_0 \neq 0$ (γιατί αλλιώς θα ήταν $x^* = 0$). Επίσης, έχουμε $\langle x_0, x \rangle_H = 0$, για όλα τα $x \in H$ για τα οποία $x^*(x) = 0$, δηλαδή, για όλα τα x που ανήκουν στο

μηδενοχώρο $\mathbf{N}(x^*)$ του x^* . Άρα, $x_0 \perp \mathbf{N}(x^*)$. Ο $\mathbf{N}(x^*)$ είναι ένας γραμμικός χώρος (βλ. Θεώρημα ??) και είναι κλειστός (βλ. Θεώρημα ?? να το ψάξω...) και επειδή $x^* \neq 0$ έπεται ότι $\mathbf{N}(x^*) \neq H$, οπότε $\mathbf{N}(x^*)^\perp \neq \{0\}$ (βλ. Θεώρημα ??). Επομένως, ο $\mathbf{N}(x^*)^\perp$ περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο $\bar{x} \neq 0$.

Θέτουμε

$$y = x^*(x)\bar{x} - x^*(\bar{x})x,$$

όπου το $x \in H$ είναι τυχόν. Τότε, λόγω της γραμμικότητας του x^* , έχουμε

$$x^*(y) = x^*(x)x^*(\bar{x}) - x^*(\bar{x})x^*(x) = 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι $y \in \mathbf{N}(x^*)$.

Εξάλλου, το $\bar{x} \in \mathbf{N}(x^*)^\perp$, οπότε, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 = \langle y, \bar{x} \rangle_H &= \langle x^*(x)\bar{x} - x^*(\bar{x})x, \bar{x} \rangle_H \\ &= x^*(x)\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_H - x^*(\bar{x})\langle x, \bar{x} \rangle_H \\ &= x^*(x)\|\bar{x}\|_H^2 - x^*(\bar{x})\langle x, \bar{x} \rangle_H. \end{aligned} \quad (3)$$

Επειδή, $\bar{x} \neq 0$ από την (3) έπεται ότι

$$x^*(x) = \frac{x^*(\bar{x})}{\|\bar{x}\|_H^2} \langle x, \bar{x} \rangle \quad (4)$$

και αν θέσουμε

$$x_0 = \frac{\overline{x^*(\bar{x})}}{\|\bar{x}\|_H^2} \bar{x}$$

από την (4) προκύπτει

$$x^*(x) = \langle x_0, x \rangle_H,$$

δηλαδή η (1).

Το x_0 είναι μοναδικό γιατί αν υποθέσουμε ότι

$$x^*(x) = \langle x_0, x \rangle_H = \langle x'_0, x \rangle_H, \quad \forall x \in H,$$

τότε $x_0 = x'_0$ (βλ. Πρόταση 1.2.1).

Θα αποδείξουμε τη (2). Αν $x^* = 0$, τότε x_0 , οπότε η (2) είναι προφανής. Έστω $x^* \neq 0$, οπότε και $x_0 \neq 0$. Από την (1) και την ανισότητα του Schwarz έχουμε

$$|x^*(x)| \leq |\langle x_0, x \rangle| \leq \|x_0\|_H \|x\|_H,$$

οπότε

$$\|x^*\|_{H^*} = \sup_{\|x\|_H=1} |\langle x_0, x \rangle| \leq \|x_0\|_H. \quad (5)$$

Από την (4) (Κεφ. 12) έχουμε

$$\|x_0\|_H^2 = \langle x_0, x_0 \rangle = x^*(x_0) \leq \|x^*\|_{H^*} \|x_0\|_H, \quad (6)$$

οπότε

$$\|x_0\|_H \leq \|x^*\|_{H^*} \quad (6).$$

Από τις (5) και (6) προκύπτει η (2).

Παρατήρηση 1.2.1. Το Θεώρημα 1.2.1 δείχνει ότι κάθε γραμμικό συναρτησιακό πάνω σε ένα χώρο Hilbert H μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω του εσωτερικού γινομένου. Η απεικόνιση $x^* \rightarrow x_0$ είναι ένας ισομετρικός ισομορφισμός ο οποίος μας επιτρέπει να ταυτίσουμε τον H με τον H^* . Θα κάνουμε συχνά αυτή την ταύτιση, όχι όμως πάντοτε (βλ. Άσκηση ... Παρατ 1 Μπρεζις).

1.3 Ο δυϊκός Χώρος X^{**} του X^*

Πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα μπορούμε να ορίσουμε τον δυϊκό $(X^*)^*$ του χώρου X^* , τον οποίο στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με X^{**} . Πριν ασχοληθούμε διεξοδικότερα με τον X^{**} , χρειάζεται να ρίξουμε μια πολύ προσεκτική ματιά που αφορά τη φύση των στοιχείων των χώρων X^* και X^{**} (δηλαδή των συναρτησοειδών που ορίζονται σε αυτούς), τη φύση των στοιχείων στα οποία δρουν, αλλά και τον τρόπο κατασκευής τους. Συνοπτικά, έχουμε τα εξής βήματα:

- (i) Ξεκινώντας από ένα διανυσματικό χώρο X συμβολίζουμε με x το τυχόν σημείο του.
- (ii) Συμβολίζουμε με X^* τον δυϊκό χώρο του X και με x^* το τυχόν σημείο του X^* , το οποίο είναι μια συνεχής γραμμική απεικόνιση από τον X στο $\mathbb{R}$ με τιμή τον αριθμό $x^*(x)$, (δηλαδή, η απεικόνιση $x^* : X \rightarrow \mathbb{R}$, είναι συνεχής και γραμμική).
- (iii) Συμβολίζουμε με X^{**} τον δυϊκό χώρο του X^* και με x^{**} το τυχόν σημείο του X^{**} , το οποίο είναι μια συνεχής γραμμική απεικόνιση από τον X^* στο $\mathbb{R}$, (δηλαδή, η απεικόνιση $x^{**} : X^* \rightarrow \mathbb{R}$, είναι συνεχής και γραμμική).

Για να πάρουμε ένα <σημείο> x^{**} του X^{**} εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό $x^{**} : X^* \rightarrow \mathbb{R}$, δηλαδή, μια συνεχή γραμμική απεικόνιση η οποία παίρνει ένα στοιχείο $x^* \in X^*$, (δηλαδή ένα συναρτησιακό με πεδίο ορισμού το X) και το απεικονίζει σε ένα πραγματικό αριθμό $x^{**}(x^*)$ και ορίζουμε την τιμή του x^{**} στο σημείο x^* με την σχέση

$$x^{**}(x^*) = \langle x^{**}, x^* \rangle_{X^{**}, X^*}, \quad \forall x^* \in X^*. \quad (2)$$

Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε με την (2) για κάθε $x^{**} \in X^{**}$ και κάθε $x^* \in X^*$ ένα εσωτερικό γινόμενο (ακριβέστερα ένα δυαδικό ζευγάρισμα μεταξύ του X^* και του X^{**}). Προφανώς, αυτό το εσωτερικό γινόμενο είναι διαφορετικό από το $\langle x^*, x \rangle_{X^*, X}$ μεταξύ των X^* και X , ωστόσο, αυτά τα εσωτερικά γινόμενα μπορούμε να τα συμβολίζουμε με $\langle x^{**}, x^* \rangle$ και $\langle x^*, x \rangle$, χωρίς να υπάρχει κίνδυνος κάποιας σύγχυσης αφού τα στοιχεία x, x^* και x^{**} ανήκουν στους χώρους X, X^* και X^{**} , αντίστοιχα.

Σημείωση 1.3.1. Στο εξής αν δεν συντρέχει κάποιος ιδιαίτερος λόγος θα συνεχίσουμε να συμβολίζουμε με x, x^* και x^{**} τα στοιχεία των χώρων X, X^* και X^{**} , αντίστοιχα.

Για τον X^{**} έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.3.1. Έστω X ένας χώρος με norm. Ο χώρος $\mathcal{L}(X^*, \mathbb{R})$ όλων των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών από τον X^* στο $\mathbb{R}$ λέγεται **δεύτερος δυϊκός χώρος** του X και συμβολίζεται με $X^{**} = (X^*)^*$. Η δράση κάθε στοιχείου x^{**} του X^{**} πάνω σε ένα στοιχείο $x^* \in X^*$ συμβολίζεται με

$$x^{**}(x^*) = \langle x^{**}, x^* \rangle_{X^{**}, X^*}, \quad \forall x^* \in X^*$$

(ή απλά με $\langle \cdot, \cdot \rangle$) και ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο ως προς τη δυϊκότητα των X^* και X^{**} .

Ο X^{**} είναι εφοδιασμένος με τη norm

$$\|x^{**}\|_{X^{**}} = \sup\{|\langle x^{**}, x^* \rangle| : \|x^*\|_{X^*} \leq 1\}, \quad (1.3)$$

ή ισοδύναμα

$$\|x^{**}\|_{X^{**}} = \sup_{x^* \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|\langle x^*, x^* \rangle|}{\|x^*\|_{X^*}} = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\|=1}} |\langle x^{**}, x^* \rangle|, \quad (1.4)$$

για κάθε $x^* \in X^*, x^{**} \in X^{**}$. □

Παρατήρηση 1.3.1. Σύμφωνα με τα παραπάνω τα οποία ενσωματώνονται στον Ορισμό 1.3.1, τα στοιχεία του X^{**} είναι γραμμικά συναρτησιακά από τον X^* στο $\mathbb{R}$, δηλαδή συνεχείς γραμμικές απεικονίσεις $x^{**} : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ που παίρνουν ένα συναρτησιακό $x^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ και το απεικονίζουν σε ένα πραγματικό αριθμό $x^{**}(x^*)$. Η απάντηση σε ένα πιθανό ερώτημα που μπορεί να διατυπωθεί, δηλαδή γιατί θεωρούμε ακόμα έναν δυϊκό τον X^{**} , είναι ότι, όπως θα δούμε στη συνέχεια, υπάρχει μια ενδιαφέρουσα και πολύ σημαντική σχέση μεταξύ του X και του X^{**} . Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να ταυτίσουμε με κάποιο τρόπο τον οποιοδήποτε χώρο με norm X (είτε είναι χώρος Banach είτε όχι) με τον $X^{**} = (X^*)^*$, ο οποίος είναι χώρος Banach (βλ. Θεώρημα ??).

Θεώρημα 1.3.1. Ο $(X^{**}, \|\cdot\|_{X^{**}})$, όπου $\|\cdot\|_{X^{**}}$ είναι η norm (1.3), είναι χώρος Banach.

Απόδειξη. (βλ. Θεώρημα 1.1.1).

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε μια διαδικασία κατασκευής ενός συναρτησιακού στον X^{**} , η οποία θα μας οδηγήσει με μια πολύ σημαντική γραμμική απεικόνιση από τον X στον X^{**} . Θεωρούμε ένα τυχόν αλλά σταθερό σημείο x ενός χώρου με norm X και ορίζουμε την απεικόνιση $f_x : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_x(x^*) = \langle x^*, x \rangle_{X^*, X}, \quad \forall x^* \in X^*. \quad (3)$$

Η απεικόνιση f_x είναι γραμμική, ως εσωτερικό γινόμενο και συνεχής, λόγω της βασικής ανισότητας

$$|f_x(x^*)| = |\langle x, x^* \rangle_{X, X^*}| \leq \|x\|_X \|x^*\|_{X^*}.$$

Επομένως, το f_x είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό ορισμένο στον X^* , δηλαδή, ένα στοιχείο του $(X^*)^* = X^{**}$. Αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε το $f_x(x^*)$ σαν ένα δυαδικό ζευγάρι μεταξύ των X^* και X^{**} , δηλαδή,

$$f_x(x^*) = \langle f_x, x^* \rangle_{X^{**}, X^*} \quad (4).$$

Άρα, το f_x είναι ένα στοιχείο του X^{**} για το οποίο, λόγω των (3), (4), ισχύει

$$\langle f_x, x^* \rangle_{X^{**}, X^*} = \langle x^*, x \rangle_{X^*, X}, \quad \forall x^* \in X^* \quad (5)$$

και ότι

$$\|f_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X. \quad (6)$$

Ορίζουμε την απεικόνιση $j : X \rightarrow X^{**}$ με $j(x) = f_x$, για κάθε $x \in X$. Για την απεικόνιση j , λόγω της (5), ισχύει ότι

$$\langle j(x), x^* \rangle_{X^{**}, X^*} = \langle x^*, x \rangle_{X^*, X}, \quad \forall x^* \in X^*.$$

Λόγω ορισμού και λόγω της (6) έχουμε ότι

$$\|j(x)\|_{X^{**}} = \|f_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X,$$

δηλαδή, η απεικόνιση j είναι μια ισομετρία και διατηρεί τη norm. Αν θέσουμε

$$Y = \mathbf{R}(j) = \{x^{**} \in X^{**} : \exists x \in X, j(x) = x^{**}\},$$

τότε, προφανώς η απεικόνιση $j : X \rightarrow Y$ είναι επί και επειδή είναι ισομετρία μπορούμε να ταυτίσουμε το χώρο X με το χώρο $Y = \mathbf{R}(j)$.

Η απεικόνιση $j : X \rightarrow X^{**}$, γενικά, δεν είναι επί, ωστόσο, σε κάθε περίπτωση ο διανυσματικός χώρος X μπορεί να θεωρείτε σαν ένας υπόχωρος του X^{**} και για αυτό το λόγο η απεικόνιση $j : X \rightarrow X^{**}$ λέγεται **κανονική εμφύτευση** του X στον X^{**} .

Για ορισμένους τύπους χώρων με norm η κανονική απεικόνιση είναι επί και σε αυτή την περίπτωση οι χώροι αυτοί λέγονται **ανακλαστικοί** (βλ. Κεφάλαιο ?) και έχουν πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στο ακόλουθο βασικό θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.2. (Κανονική Εμφύτευση του X στον X^{})** Έστω X ένας χώρος με norm. Τότε, υπάρχει ένας γραμμικός τελεστής $j : X \rightarrow X^{**}$, με $\langle j(x), x^* \rangle_{X^{**}, X^*} = \langle x^*, x \rangle_{X^*, X}$, για κάθε $x^* \in X^*$, τέτοιος ώστε

$$\|j(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X.$$