

# Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση

## Μια Εισαγωγή

Νίκος Λαμπρόπουλος

17 Δεκεμβρίου 2024



# Περιεχόμενα

|          |                                                                     |          |
|----------|---------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Ανακλαστικοί - Διαχωρίσιμοι - Ομοιόμορφα Κυρτοί Χώροι Banach</b> | <b>5</b> |
| 1.1      | Ανακλαστικοί Χώροι Banach . . . . .                                 | 5        |
| 1.2      | Διαχωρίσιμοι Χώροι Banach . . . . .                                 | 7        |
| 1.3      | Ομοιόμορφα Κυρτοί Χώροι Banach . . . . .                            | 10       |



# Κεφάλαιο 1

## Ανακλαστικοί - Διαχωρίσιμοι - Ομοιόμορφα Κυρτοί Χώροι Banach

### 1.1 Ανακλαστικοί Χώροι Banach

Είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι η κανονική εμφύτευση του  $X$  στον  $X^{**}$  γενικά δεν είναι επί, ωστόσο μας επιτρέπει να ταυτίζουμε τον  $X$  με ένα κλειστό υπόχωρο του  $X^{**}$ . Είναι ενδιαφέρον να μελετήσουμε τους χώρους για τους οποίους η κανονική εμφύτευση είναι επί και στην περίπτωση αυτή να εξετάσουμε ποιες καλές ιδιότητες έχουν αυτοί οι χώροι. Θα δώσουμε πρώτα τον ορισμό ενός τέτοιου χώρου.

**Ορισμός 1.1.1. (Ανακλαστικός Χώρος)** Έστω  $X$  ένας χώρος με  $\text{norm}$  και  $j : X \rightarrow X^{**}$  η κανονική απεικόνιση. Αν η  $j$  είναι επί, δηλαδή,  $j(X) = X^{**}$ , τότε ο χώρος λέγεται **ανακλαστικός**.  $\square$

Για ένα ανακλαστικό χώρο η κανονική απεικόνιση  $j$  είναι μια ισομετρία μεταξύ των χώρων  $X$  και  $X^{**}$  και επομένως οι  $X$  και  $X^{**}$  είναι ισομετρικά ισομορφικοί, οπότε μπορούν να ταυτιστούν μέσω μιας σχέσης ισοδυναμίας  $X \simeq X^{**}$ . Ωστόσο, το αντίστροφο δεν ισχύει, γιατί μπορεί να κατασκευαστεί μη ανακλαστικός χώρος  $X$  για τον οποίο υπάρχει μια ισομετρία από τον  $X$  επί του  $X^{**}$  (βλ. [R. C. James (1950, 1951)]).

Η πρόταση που ακολουθεί χαρακτηρίζει τους ανακλαστικούς χώρους.

**Πρόταση 1.1.1.** Έστω  $X$  ένας χώρος Banach. Τότε, ο  $X$  είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν η κλειστή μοναδιαία μπάλα

$$B_X = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$$

## 6ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΟΙ - ΔΙΑΧΩΡΙΣΙΜΟΙ - ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΚΥΡΤΟΙ ΧΩΡΟΙ Banach

είναι συμπαγής για την τοπολογία  $\sigma(X, X^*)$ .

*Απόδειξη.* (βλ. [Bre], Θεώρημα III.16).

**Θεώρημα 1.1.1.** Αν ένας χώρος  $X$  με norm είναι ανακλαστικός, τότε είναι χώρος Banach.

*Απόδειξη.* Αφού ο  $X^{**}$  είναι ο δυϊκός του  $X^*$  είναι πλήρης (βλ. Θεώρημα ?? και αφού ο  $X$  είναι ανακλαστικός, η κανονική απεικόνιση είναι επί, δηλαδή,  $j(X) = X^{**}$ . Η πληρότητα του  $X$  έπεται από την πληρότητα του ισομορφικού του  $X^{**}$  (βλ. Θεώρημα ??).  $\square$

**Θεώρημα 1.1.2.** Κάθε πεπερασμένης διάστασης χώρος με norm είναι ανακλαστικός.

*Απόδειξη.* (βλ. Θεώρημα 2.7-8 Κρευσινγ)]

**Θεώρημα 1.1.3.** Όλοι οι χώροι Hilbert είναι ανακλαστικοί.

*Απόδειξη.* Προκύπτει από το Θεώρημα του Riesz (βλ. [Kre], Θεώρημα 4.6-6).

Η ακόλουθη πρόταση δίνει δυο σημαντικές ιδιότητες των ανακλαστικών χώρων Banach.

**Πρόταση 1.1.2.** Έστω  $X$  ένας χώρος Banach. Τότε

- (i) Αν ο  $X$  είναι ανακλαστικός, τότε κάθε κλειστός υπόχωρός του είναι ανακλαστικός.
- (ii) Ο  $X$  είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν ο  $X^*$  είναι ανακλαστικός.

Στη συνέχεια θα δώσουμε μερικά παραδείγματα κάποιων ανακλαστικών αλλά και μη ανακλαστικών σημαντικών χώρων.

**Παράδειγμα 1.1.1.** Ο  $\mathbb{R}^n$  είναι ανακλαστικός.

*Απόδειξη.* Είναι  $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$  (βλ. Παράδειγμα ??).

**Παράδειγμα 1.1.2.** Όλοι οι χώροι  $L^p$  με  $1 < p < \infty$  είναι ανακλαστικοί.

*Απόδειξη* (βλ. Πρόταση 1.3.2).

**Παράδειγμα 1.1.3.** Ο χώρος  $L^1$  δεν είναι ανακλαστικός.

*Απόδειξη* (βλ. Πρόταση 1.3.3).

**Παράδειγμα 1.1.4.** Ο χώρος  $L^\infty$  δεν είναι ανακλαστικός.

*Απόδειξη* (βλ. Πρόταση 1.3.4).

**Παράδειγμα 1.1.5.** Ο χώρος  $\ell^p$ ,  $1 < p < \infty$  είναι ανακλαστικός, δηλαδή  $(\ell^p)^{**} \simeq \ell^p$ .

*Απόδειξη.* Επειδή,  $1 < p < \infty$ , ισχύει  $(\ell^p)^* \simeq \ell^{p^*}$ , όπου  $p^*$  είναι ο συζυγής του  $p$ , δηλαδή  $1/p + 1/p^* = 1$  (βλ. Παράδειγμα ??). Με τα ίδια επιχειρήματα βλέπουμε ότι  $(\ell^p)^{**} \simeq (\ell^{p^*})^* \simeq \ell^{p^{**}}$ , όπου  $p^{**}$  είναι ο συζυγής του  $p^*$ , δηλαδή  $1/p^* + 1/p^{**} = 1$ . Παρατηρούμε ότι  $p^{**} = p$ , οπότε,  $(\ell^p)^{**} \simeq \ell^p$  και επομένως ο χώρος  $\ell^p$  με  $1 < p < \infty$  είναι ανακλαστικός.

**Παράδειγμα 1.1.6.** Ο χώρος  $c_0$ , των μηδενικών ακολουθιών εφοδιασμένος με τη norm  $\|x\|_0 = \max |a_i|$ , όπου  $x = \{a_i\}_{i=1}^\infty \in c_0$  δεν είναι ανακλαστικός.

*Απόδειξη.* Είναι  $c_0^* = \ell^1$  (βλ. Παράδειγμα ??) και  $(\ell^1)^* = \ell^\infty$  (βλ. Παράδειγμα 1.1.4), οπότε ο χώρος  $c_0$  δεν είναι ανακλαστικός.

Η πρόταση που ακολουθεί χαρακτηρίζει τα συμπαγή υποσύνολα ενός ανακλαστικού χώρου Banach.

**Πρόταση 1.1.3.** Έστω  $X$  ένας ανακλαστικός χώρος Banach και  $C$  ένα μη κυρτό κλειστό και φραγμένο υποσύνολό του. Τότε, το  $C$  είναι συμπαγές για την τοπολογία  $\sigma(X, X^*)$ .

## 1.2 Διαχωρίσιμοι Χώροι Banach

Υπενθυμίζουμε ότι ένας μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος, αν υπάρχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο  $D \subset X$  που είναι πυκνό στον  $X$  (βλ. Ορισμός ??). Στο κεφάλαιο που μελετήσαμε τους μετρικούς χώρους έχουμε ακόμα αναφέρει κάποιους βασικούς διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους, όπως την πραγματική ευθεία, το μιγαδικό επίπεδο και τους χώρους  $\ell^p$  με  $1 \leq p < \infty$  (βλ. Παραδείγματα ??-??). Επίσης, υπενθυμίζουμε ότι ο χώρος  $\ell^\infty$  δεν είναι διαχωρίσιμος (βλ. Παράδειγμα ??). Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε κάποιες σημαντικές ιδιότητες των διαχωρίσιμων και μη διαχωρίσιμων χώρων. Μπορούμε με ένα διαισθητικό και απλό τρόπο να δείξουμε την πρόταση που ακολουθεί, ωστόσο θα παρουσιάσουμε μια επίσης απλή αλλά πιο αυστηρή απόδειξη.

**Πρόταση 1.2.1.** Αν  $F$  είναι ένας υπόχωρος ενός διαχωρίσιμου χώρου  $X$ , τότε ο  $F$  είναι διαχωρίσιμος.

*Απόδειξη.* Έστω  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  μια πυκνή ακολουθία στον  $X$ . Θεωρούμε επίσης την ακολουθία  $\{A_n = B(a_n, \frac{1}{n}) \cap F : n \in \mathbb{N}\}$ , όπου  $B(a_n, \frac{1}{n})$  είναι η μπάλα με

κέντρο το σημείο  $a_n$  και ακτίνα  $1/n$ . Αν σε κάθε  $A_n$  (αν αυτό δεν είναι κενό) θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο  $x_n$ , τότε η ακολουθία  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  αποτελεί αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του  $F$ .

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στη σχέση των ανακλαστικών χώρων με τους διαχωρίσιμους αλλά και τους μη διαχωρίσιμους χώρους. Και αυτό, γιατί η διαχωρισιμότητα ή η μη διαχωρισιμότητα ενός χώρου σε κάποιες περιπτώσεις μπορούν να παίζουν σημαντικό ρόλο στην μη ανακλαστικότητα ενός χώρου. Το θεώρημα που ακολουθεί αναφέρεται σε αυτή τη σύνδεση, ωστόσο, θα διατυπώσουμε πρώτα μια πρόταση που είναι χρήσιμη στην απόδειξή του.

**Πρόταση 1.2.2.** Έστω  $Y$  ένας γνήσιος κλειστός υπόχωρος ενός χώρου με norm  $X$ . Έστω  $x_0 \in X - Y$  τυχόν και  $d = \inf_{y \in Y} \|y - x_0\|$ , η απόσταση του  $x_0$  από το  $Y$ . Τότε, υπάρχει ένα  $f \in X^*$  τέτοιο ώστε  $\|f\| = 1$ ,  $f(y) = 0$ , για κάθε  $y \in Y$  και  $f(x_0) = d$ .  
Απόδειξη. (βλ. [Λήμμα 4.6-7, Κρευσιγκ])

**Θεώρημα 1.2.1. (Διαχωρισιμότητα)** Αν ο δυϊκός χώρος  $X^*$  ενός χώρου με norm είναι διαχωρίσιμος, τότε και ο ίδιος ο  $X$  είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο  $X^*$  είναι διαχωρίσιμος. Τότε, η μοναδιαία σφαίρα  $S^* = \{f : \|f\| = 1\}$  του  $X^*$  περιέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο, έστω το  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ . Αφού το  $f_n \in S^*$ , έχουμε

$$\|f_n\| = \sup_{\|x\|=1} |f_n(x)| = 1.$$

Από τον ορισμό του supremum μπορούμε να βρούμε σημεία  $x_n \in X$  με  $\|x_n\| = 1$ , τέτοια ώστε

$$|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}.$$

Έστω  $Y$  το κάλυμμα του  $\text{span}\{x_n\}$ . Τότε, ο  $Y$  είναι διαχωρίσιμος γιατί έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο, δηλαδή το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των  $x_n$  με συντελεστές των οποίων τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη είναι ρητοί αριθμοί. Θα δείξουμε ότι  $Y = X$ . Υποθέτουμε ότι  $Y \neq X$ . Τότε, επειδή το  $Y$  είναι κλειστό, υπάρχει  $\tilde{f} \in X^*$  με  $\|\tilde{f}\| = 1$  και  $\tilde{f}(y) = 0$ , για κάθε  $y \in Y$  (βλ. Πρόταση 1.2.2. Επειδή, το  $x_n \in X$ , έχουμε  $\tilde{f}(x_n) = 0$  και για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$\frac{1}{2} \leq |f_n(x_n)| = |f_n(x_n) - \tilde{f}(x_n)| = |(f_n - \tilde{f})(x_n)| \leq \|f_n - \tilde{f}\| \|x_n\|,$$

και επειδή  $\|x_n\| = 1$ , έπεται ότι

$$\|f_n - \tilde{f}\| \geq \frac{1}{2},$$

το οποίο είναι αντιφατικό με το ότι το  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  είναι πυκνό στην  $\mathbb{S}^*$ , γιατί  $\|\tilde{f}\| = 1$  αφού η  $\tilde{f} \in \mathbb{S}^*$ .

**Παρατήρηση 1.2.1.** Το αντίστροφο του Θεωρήματος 1.2.1 γενικά δεν ισχύει, ωστόσο ισχύει το ακόλουθο πόρισμα.

**Θεώρημα 1.2.2.** Ένας διαχωρίσιμος χώρος με norm με μη διαχωρίσιμο δυϊκό χώρο  $X^*$  δεν είναι ανακλαστικός.

**Παράδειγμα 1.2.1.** Ο χώρος  $\ell^1$  δεν είναι ανακλαστικός.

*Απόδειξη.* Ο χώρος  $\ell^1$  είναι διαχωρίσιμος (βλ. Παράδειγμα ??). Ο δυϊκός του  $\ell^1$  είναι ο  $\ell^\infty$  (βλ. Παράδειγμα ??), ο οποίος, ωστόσο, δεν είναι διαχωρίσιμος (βλ. Παράδειγμα ??). Επομένως, ο  $\ell^1$  δεν είναι ανακλαστικός (βλ. Θεώρημα 1.2.2).

**Παράδειγμα 1.2.2.** Ο χώρος  $\ell^\infty$  δεν είναι ανακλαστικός.

*Απόδειξη.* Αν ο  $\ell^\infty$  ήταν ανακλαστικός, τότε και ο  $(\ell^\infty)^* = \ell^1$  θα ήταν επίσης ανακλαστικός (βλ. Πρόταση 1.1.2), το οποίο δεν ισχύει (βλ. Παράδειγμα 1.2.1).

**Πρόταση 1.2.3.** Αν ένας χώρος Banach  $X$  είναι ανακλαστικός και διαχωρίσιμος, τότε και ο δυϊκός του  $X^*$  είναι ανακλαστικός και διαχωρίσιμος και αντίστροφα.

*Απόδειξη.* Αν ο  $X$  είναι ανακλαστικός τότε ο  $X^{**} = j(X)$  είναι ισομορφικός με τον  $X$ , οπότε η διαχωρισιμότητα του  $X$  συνεπάγεται τη διαχωρισιμότητα του  $X^{**}$  και λόγω του Θεωρήματος 1.2.1 θα είναι διαχωρίσιμος και ο  $X^*$ .

Αντίστροφα, έστω ότι ο  $X^*$  είναι ανακλαστικός και διαχωρίσιμος. Τότε, ο  $X$  είναι ανακλαστικός (βλ. Πρόταση 1.1.2) και διαχωρίσιμος (βλ. Θεώρημα 1.2.1).

**Παρατήρηση 1.2.2.** Η ασθενής τοπολογία  $\sigma(X^*, X)$  (και κάθε τοπολογία σε ένα τοπολογικό χώρο  $X$ ) είναι μετριοποιήσιμη αν υπάρχει μια μετρική στον  $X$  που την παράγει (βλ. και Ορισμός ??). Η διαχωρισιμότητα είναι στενά συνδεδεμένη με την μετριοποιήσιμότητα της ασθενούς τοπολογίας  $\sigma(X^*, X)$ , ωστόσο:

*Ολόκληρος ο χώρος  $X^*$  δεν είναι ποτέ μετριοποιήσιμος για την  $\sigma(X^*, X)$ , εκτός και αν είναι πεπερασμένης διάστασης.*

**Θεώρημα 1.2.3.** Η ασθενής τοπολογία  $\sigma(X^*, X)$  είναι μετριοποιήσιμη αν και μόνο αν ο  $X$  είναι πεπερασμένης διάστασης.

**Θεώρημα 1.2.4.** Έστω  $X$  ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach. Τότε, η  $B_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\|_{X^*} \leq 1\}$  είναι μετριοποιήσιμη για την  $\sigma(X^*, X)$ . Αντίστροφα, αν η  $B_{X^*}$  είναι μετριοποιήσιμη για την  $\sigma(X^*, X)$ , τότε, ο  $X$  είναι διαχωρίσιμος.  
Απόδειξη. (βλ. [Bre], Θεώρημα III.25).

**Πρόταση 1.2.4.** Έστω  $X$  ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach και  $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$  μια φραγμένη ακολουθία στον  $X^*$ . Τότε, υπάρχει υπακολουθία  $\{x_{n_k}^*\}$  της  $\{x_n^*\}$  που συγκλίνει για την τοπολογία  $\sigma(X^*, X)$ .

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $\|x_n^*\|_{B_{X^*}} \leq 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Το σύνολο  $B_{X^*}$  είναι συμπαγές (βλ. Θεώρημα ??) και μετριοποιήσιμο για την τοπολογία  $\sigma(X^*, X)$  (βλ. Θεώρημα 1.2.4), οπότε έχουμε το ζητούμενο.

**Θεώρημα 1.2.5.** Έστω  $X$  ένας ανακλαστικός χώρος Banach και  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  μια φραγμένη ακολουθία στον  $X$ . Τότε, υπάρχει υπακολουθία  $\{x_{n_k}\}$  της  $\{x_n\}$  που συγκλίνει για την τοπολογία  $\sigma(X, X^*)$ . Ισχύει και το αντίστροφο δηλαδή: Αν  $X$  είναι ένας χώρος Banach τέτοιος ώστε για κάθε φραγμένη ακολουθία  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  υπάρχει υπακολουθία  $\{x_{n_k}\}$  που συγκλίνει για την τοπολογία  $\sigma(X, X^*)$ , τότε ο  $X$  είναι ανακλαστικός.

Απόδειξη. (βλ. [Bre], Θεωρήματα III.27, III.28).

**Παρατήρηση 1.2.3.** Υπάρχουν χώροι Banach  $X$  και φραγμένες ακολουθίες  $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$  στον  $X^*$  που δεν έχουν καμία συγκλίνουσα υπακολουθία για την  $\sigma(X, X^*)$ . Στην περίπτωση αυτή, ο  $X$  δεν είναι ούτε ανακλαστικός (βλ. Θεώρημα 1.2.5) ούτε διαχωρίσιμος (βλ. Πρόταση 1.2.4), ωστόσο, η μοναδιαία μπάλα  $B_{X^*}$  είναι συμπαγής για την τοπολογία  $\sigma(X, X^*)$  (βλ. Θεώρημα ??) και μη μετριοποιήσιμη (βλ. Θεώρημα 1.2.5).

## 1.3 Ομοιόμορφα Κυρτοί Χώροι Banach

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τους ομοιόμορφα κυρτούς χώρους. Όπως θα δούμε η ομοιόμορφη κυρτότητα είναι μια καθαρά γεωμετρική ιδιότητα, αφού μας δίνει μια γεωμετρική εικόνα για το σχήμα ενός τέτοιου χώρου (συγκεκριμένα για το πόσο *στρογγυλός* είναι), ωστόσο, συνεπάγεται την ανακλαστικότητα του χώρου, δηλαδή μια καθαρά τοπολογική φύσης ιδιότητα. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ως προς την ανακλαστικότητα και τη διαχωρισιμότητα κάποιους πολύ σημαντικούς χώρους.

**Ορισμός 1.3.1.** Ένας  $X$  χώρος Banach εφοδιασμένος με μια norm  $\|\cdot\|$  είναι **ομοιόμορφα κυρτός** αν για κάθε  $0 < \varepsilon \leq 2$  υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $x, y \in X$  με  $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$  η συνθήκη  $\|x - y\| > \varepsilon$  να συνεπάγεται ότι  $\|(x + y)/2\| < 1 - \delta$ .

Η  $\|\cdot\|$  λέγεται **ομοιόμορφα κυρτή norm**. □

**Παρατήρηση 1.3.1.** Διαισθητικά, ο Ορισμός 1.3.1 εισάγει μια γεωμετρική ιδιότητα της μοναδιαίας μπάλας του χώρου  $X$  και επιβάλλει να είναι αρκετά <στρογγυλή>. Προφανώς, η ιδιότητα αυτή εξαρτάται από τη norm ακόμα και στους χώρους πεπερασμένης διάστασης, όπου όλες οι norms είναι ισοδύναμες. Για παράδειγμα, ο χώρος  $\mathbb{R}^2$  εφοδιασμένος με τη norm  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  είναι ομοιόμορφα κυρτός ενώ όταν εφοδιάζεται με την norm  $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$  δεν είναι ομοιόμορφα κυρτός. (Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η μοναδιαία μπάλα του  $(\mathbb{R}^2, \|x\|_2)$  είναι κύκλος, ενώ η μοναδιαία μπάλα του  $(\mathbb{R}^2, \|x\|_1)$  είναι τετράγωνο).

**Παράδειγμα 1.3.1.** Οι χώροι Hilbert είναι ομοιόμορφα κυρτοί.

*Απόδειξη.* Έστω  $H$  ένας χώρος Hilbert,  $\varepsilon \in (0, 2]$  και  $x, y \in H$  τέτοια ώστε

$$\|x\| \leq 1, \quad \|y\| \leq 1, \quad \|x - y\| > \varepsilon.$$

Από την ταυτότητα που παραλληλογράμμου προκύπτει ότι

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4},$$

οπότε,

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$$

$$\text{με } \delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} > 0.$$

**Παράδειγμα 1.3.2.** Οι χώροι  $L^p$  για  $1 < p < \infty$  είναι ομοιόμορφα κυρτοί.

*Απόδειξη.* Θα χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες του Clarkson, οπότε θα διακρίνουμε τις περιπτώσεις  $2 \leq p < \infty$  και  $1 < p \leq 2$ .

(i) Για  $2 \leq p < \infty$  ισχύει (πρώτη ανισότητα του Clarkson)

$$\left\| \frac{f + g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f - g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p), \quad \forall f, g \in L^p.$$

Επομένως, για τυχόν  $\varepsilon \in (0, 2]$  σταθερό και  $f, g \in L^p$  τέτοια ώστε

$$\|f\|_{L^p} \leq 1, \quad \|g\|_{L^p} \leq 1, \quad \|f - g\|_{L^p} > \varepsilon$$

προκύπτει ότι

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_{L^p}^p \leq 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^p,$$

και άρα

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_{L^p} \leq 1 - \delta$$

με  $\delta = 1 - \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right]^{1/p} > 0$ .

(ii) Για  $1 \leq p \leq 2$  ισχύει (δεύτερη ανισότητα του Clarkson)

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^q + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^q \leq \left[ \frac{1}{2} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2} \|g\|_{L^p}^p \right]^{1/(p-1)}, \quad \forall f, g \in L^p,$$

όπου  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Επομένως, για τυχόν  $\varepsilon \in (0, 2]$  σταθερό και  $f, g \in L^p$  τέτοια ώστε

$$\|f\|_{L^p} \leq 1, \quad \|g\|_{L^p} \leq 1, \quad \|f - g\|_{L^p} > \varepsilon$$

προκύπτει ότι

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_{L^p}^q \leq 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^q,$$

και άρα

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_{L^p} \leq 1 - \delta$$

με  $\delta = 1 - \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^q \right]^{1/q} > 0$ .

Το θεώρημα που ακολουθεί αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για την απόδειξη της ανακλαστικότητας κάποιων χώρων Banach. Το γεγονός ότι υπάρχουν ανακλαστικοί χώροι οι οποίοι δεν έχουν καμία ομοιόμορφα κυρτή norm περιορίζει την αποτελεσματικότητα του θεωρήματος, ωστόσο, είναι εφαρμόσιμο σε βασικούς χώρους όπως σε όλους τους χώρους Hilbert (βλ. και Θεώρημα 1.3.1) καθώς και τους χώρους  $L^p$  με  $1 < p < \infty$ .

**Θεώρημα 1.3.1.** Κάθε ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach είναι ανακλαστικός. Απόδειξη. (βλ. [Bre], Θεώρημα III.29).

**Πρόταση 1.3.1.** Όλοι οι χώροι Hilbert είναι ανακλαστικοί (βλ. και Θεώρημα 1.3.1).

*Απόδειξη.* Αφού κάθε χώρος Hilbert είναι ομοιόμορφα κυρτός (βλ. Παράδειγμα 1.3.1) το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα 1.3.1.

**Πρόταση 1.3.2.** Όλοι οι χώρος  $L^p$  με  $1 < p < \infty$  είναι ανακλαστικοί.

*Απόδειξη.* Αφού κάθε χώρος  $L^p$  με  $1 < p < \infty$  είναι ομοιόμορφα κυρτός (βλ. Παράδειγμα 1.3.2) το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα 1.3.1.

Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz και την ανακλαστικότητα ενός χώρου  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ , για να βρούμε τον δυϊκό του.

**Θεώρημα 1.3.2.** Έστω  $1 < p < \infty$  και  $\phi \in (L^p)^*$ . Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση  $g_\phi \in L^q$ , όπου  $q = \frac{p}{p-1}$  ο συζυγής του  $p$ , τέτοια ώστε

$$\phi(f) = \langle \phi, f \rangle = \int g_\phi f, \quad \forall f \in L^p.$$

Επιπλέον,

$$\|g_\phi\|_{L^q} = \|\phi\|_{(L^p)^*}.$$

Στη συνέχεια θα κάνουμε συστηματικά την ταύτιση

$$(L^p)^* = L^q$$

και δηλαδή:

Ο δυϊκός του  $L^p$  για  $1 < p < \infty$  είναι ο  $L^q$ , όπου  $q = p/(p-1)$  ο συζυγής του  $p$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $1 < p < \infty$ . Θεωρούμε τον τελεστή  $T : L^p \rightarrow (L^q)^*$  που ορίζεται ως εξής: Έστω  $f \in L^p$ , σταθερό. Η απεικόνιση  $g \rightarrow \int fg$ ,  $\forall g \in L^q$  είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό στον  $L^q$  και επομένως ορίζει ένα στοιχείο, στον  $(L^q)^*$ , έστω το  $T(f)$ , τέτοιο ώστε

$$\langle T(f), g \rangle = \int fg, \quad \forall g \in L^q.$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$\|T(f)\|_{(L^q)^*} = \|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in L^p.$$

Από την ανισότητα του Hölder, έχουμε

$$|\langle T(f), g \rangle| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}, \quad \forall g \in L^q,$$

και επομένως,

$$\|T(f)\|_{(L^q)^*} \leq \|f\|_{L^p}.$$

Θέτουμε

$$g_0(x) = \begin{cases} |f(x)|^{p-2}f(x), & f(x) \neq 0 \\ 0, & f(x) = 0. \end{cases}$$

Τότε,

$$\int |g_0|^q = \int ||f(x)|^{p-2}f(x)|^q = \int |f(x)|^{(p-1)q} = \int |f(x)|^p < \infty,$$

γιατί η  $f \in L^p$ , οπότε η  $g \in L^q$ .

Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned} \|g_0\|_{L^q} &= \left( \int |g_0|^q \right)^{1/q} = \left( \int |f(x)|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \\ &= \left( \int |f(x)|^p \right)^{(p-1)/p} = \|f\|_{L^p}^{p-1} \end{aligned}$$

και

$$\langle T(f), g_0 \rangle = \int |f(x)|^p = \|f\|_{L^p}^p.$$

Άρα,

$$\|T(f)\|_{(L^q)^*} \geq \frac{\langle T(f), g_0 \rangle}{\|g_0\|_{L^q}} = \|f\|_{L^p}.$$

Έτσι, τελικά έχουμε ότι

$$\|T(f)\|_{(L^q)^*} = \|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in L^p.$$

Έχουμε αποδείξει ότι ο  $T$  είναι μια ισομετρία από τον  $L^p$  στον  $(L^q)^*$ , που σημαίνει ότι ο  $T(L^p)$  είναι ένας κλειστός υπόχωρος του  $(L^q)^*$ , γιατί ο  $L^p$  είναι χώρος Banach. Πρέπει να αποδείξουμε ότι ο  $T$  είναι επί. Επειδή ο  $T(L^p)$  είναι κλειστός υπόχωρος του  $(L^q)^*$ , αρκεί να δείξουμε ότι είναι πυκνός στον  $(L^q)^*$ . Έστω  $h \in (L^q)^{**}$  τέτοια ώστε  $\langle T(f), h \rangle = 0$ , για κάθε  $f \in L^p$ . Επειδή ο  $L^q$  είναι ανακλαστικός (βλ. Πρόταση 1.3.2), η  $h \in L^q$  και ικανοποιεί την

$$\int fh = 0, \quad \forall f \in L^p,$$

οπότε για  $f = |h|^{q-2}h$ , παίρνουμε  $h = 0$ .

**Παρατήρηση 1.3.2.** Το Θεώρημα 1.3.3 είναι πολύ σημαντικό γιατί μας επιτρέπει να αναπαριστούμε κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησιακό με ένα ολοκλήρωμα και να ταυτίζουμε τον αφηρημένο χώρο  $(L^p)^*$  με τον  $L^q$  μέσω μιας ισομετρίας.

Συμβολίζουμε με  $C_0^\infty(\Omega)$  το χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο  $\Omega$  με συμπαγή φορέα, δηλαδή,

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : f(x) = 0, \forall x \in \Omega \setminus K\},$$

όπου  $K \subset \Omega$  συμπαγές.

**Θεώρημα 1.3.3. (Θεώρημα της πυκνότητας)** Ο χώρος  $C_0^\infty(\Omega)$  είναι πυκνός στον  $L^p(\Omega)$  με  $1 \leq p < \infty$ , δηλαδή, για κάθε  $f \in L^p(\Omega)$  και κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $f_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ , τέτοια ώστε  $\|f - f_0\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$ .

Με τη χρήση το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz μπορούμε να βρούμε τον δυϊκό χώρο του  $L^1$  και στη συνέχεια να αποδείξουμε ότι ο  $L^1$  δεν είναι ανακλαστικός.

**Θεώρημα 1.3.4.** Έστω  $\phi \in (L^1)^*$ . Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση  $g_\phi \in L^\infty$ , τέτοια ώστε

$$\phi(f) = \langle \phi, f \rangle = \int g_\phi f, \forall f \in L^1.$$

Επιπλέον,

$$\|g_\phi\|_{L^\infty} = \|\phi\|_{(L^1)^*}.$$

Στη συνέχεια θα κάνουμε συστηματικά την ταύτιση

$$(L^1)^* = L^\infty$$

και θα λέμε ότι:

Ο δυϊκός του  $L^1$ , είναι ο  $L^\infty$ .

Απόδειξη. (βλ. [Bre], Θεώρημα 4.14).

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

**Λήμμα 1.3.1. (Variational Lemma)** Έστω  $u \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  τέτοια ώστε

$$\int_\Omega u \phi = 0, \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Τότε,  $u = 0$ , σ.π. στο  $\Omega$ .

Απόδειξη (βλ. [Bre], Λήμμα IV.2).

**Πρόταση 1.3.3.** Ο χώρος  $L^1$  δεν είναι ανακλαστικός.

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το  $0 \in \Omega$  και θεωρούμε την ακολουθία  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  με

$$f_n = \frac{1}{|B(0, \frac{1}{n})|} \chi_{B(0, \frac{1}{n})},$$

όπου το  $n$  είναι αρκετά μεγάλο ώστε  $B(0, \frac{1}{n}) \in \Omega$ .

Τότε,

$$\|f_n\|_{L^1} = 1.$$

Αν ο  $L^1$  ήταν ανακλαστικός, θα υπήρχε υπακολουθία  $\{f_{n_k}\}$  και συνάρτηση  $f \in L^1$  τέτοιες ώστε  $f_{n_k} \rightharpoonup f$  για την ασθενή τοπολογία  $\sigma(L^1, L^\infty)$ .

Άρα,

$$\int f_{n_k} \phi \rightharpoonup \int f \phi, \quad \forall \phi \in L^\infty. \quad (1)$$

Όταν η  $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ , για αρκετά μεγάλο  $k$ , είναι  $\int f_{n_k} \phi = 0$ , οπότε από την (1) παίρνουμε ότι

$$\int f \phi = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\}).$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.3.1 στο ανοικτό  $\Omega \setminus \{0\}$  για τη συνάρτηση  $f$  περιορισμένη στο  $\Omega \setminus \{0\}$  παίρνουμε  $f = 0$  σ.π. στο  $\Omega \setminus \{0\}$ , οπότε,  $f = 0$  σ.π. στο  $\Omega$ .

Όμως, για  $\phi = 1$  από την (1) βρίσκουμε ότι  $\int f = 1$ , το οποίο είναι άτοπο.

**Πρόταση 1.3.4.** Ο χώρος  $L^\infty$  δεν είναι ανακλαστικός.

*Απόδειξη.* Αν ο  $L^\infty$  ήταν ανακλαστικός, τότε θα ήταν και ο  $L^1$  ανακλαστικός (βλ. Πρόταση 1.1.2). Όμως γνωρίζουμε ότι ο  $L^1$  δεν είναι ανακλαστικός (βλ. Πρόταση 1.3.3).

**Παρατήρηση 1.3.3.** Είδαμε στην παραπάνω πρόταση ότι ο  $L^\infty$  δεν είναι ανακλαστικός. Όμως, είναι  $(L^1)^* = L^\infty$ , οπότε αφού ο  $L^\infty$  αποτυγχάνει να είναι ανακλαστικός συμπεραίνουμε ότι ο δυϊκός του  $(L^\infty)^*$  θα είναι αυστηρά μεγαλύτερος του  $L^1$ . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν γραμμικά συναρτησιακά  $\phi$  πάνω στον  $L^\infty$  που δεν είναι της μορφής

$$\langle \phi, f \rangle = \int g f, \quad \forall f \in L^\infty$$

με  $g \in L^1$ . Ένα τέτοιο παράδειγμα κατασκευάζεται ως εξής (βλ. [Bre]): Υποθέτουμε ότι το  $0 \in \Omega$  και ορίζουμε το συναρτησιακό  $\phi_0 : C_0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  με τη σχέση

$$\phi_0(f) = f(0), \quad \forall f \in C_0(\Omega). \quad (1)$$

Το  $\phi_0$  είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό πάνω στον  $C_0(\Omega)$  για τη norm  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  και σύμφωνα με το θεώρημα Hahn-Banach επεκτείνεται σε ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό πάνω στον  $L^\infty$ , έστω το  $\phi$ . Έχουμε

$$\phi(f) = f(0), \quad \forall f \in C_0(\Omega).$$

Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει  $g \in L^1$  τέτοια ώστε

$$\phi(f) = \int gf, \quad \forall f \in L^\infty.$$

Έστω ότι υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση  $g$  τέτοια ώστε

$$\int gf, \quad \forall f \in C_0(\Omega \setminus \{0\}).$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 1.3.1 θα έχουμε  $g = 0$  σ.π. στο  $\Omega \setminus \{0\}$  και άρα  $g = 0$  σ.π. στο  $\Omega$ . Επομένως

$$\phi(f) = 0, \quad \forall f \in L^\infty,$$

το οποίο είναι άτοπο λόγω της (1).

**Θεώρημα 1.3.5.** Οι χώροι  $L^p$  με  $1 \leq p < \infty$  είναι διαχωρίσιμοι.

**Θεώρημα 1.3.6.** Ο χώρος  $L^\infty$  δεν είναι διαχωρίσιμος.

**Παρατήρηση 1.3.4.** Παρόλο που ο  $L^\infty$  δεν είναι ούτε ανακλαστικός ούτε διαχωρίσιμος έχει κάποιες πολύ καλές ιδιότητες για την ασθενή\* τοπολογία  $\sigma(L^\infty, L^1)$  οφειλόμενες στο ότι  $L^\infty = (L^1)^*$ .

(i) Η κλειστή μοναδιαία μπάλα  $B_{L^\infty}$  είναι συμπαγής για την ασθενή\* τοπολογία  $\sigma(L^\infty, L^1)$  (βλ. Θεώρημα Alaoglu).

(ii) Αν  $f_n : n \in \mathbb{N}$  είναι μια φραγμένη ακολουθία στον  $L^\infty$ , τότε υπάρχει μια υπακολουθία  $\{f_{n_k} : n \in \mathbb{N}\}$  που συγκλίνει στον  $L^\infty$  για την ασθενή\* τοπολογία  $\sigma(L^\infty, L^1)$ . (Επειδή ο  $L^1$  είναι διαχωρίσιμος το αποτέλεσμα έπεται από την Πρόταση 1.2.4).