

Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση

Μια Εισαγωγή

Νίκος Λαμπρόπουλος

17 Δεκεμβρίου 2024

Περιεχόμενα

1	Τελεστές	5
1.1	Γραμμικοί Τελεστές	5
1.2	Γραμμικά Συναρτησιακά	17

Κεφάλαιο 1

Τελεστές

1.1 Γραμμικοί Τελεστές

Ορισμός 1.1.1. Μια απεικόνιση $A : \mathbf{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ (όχι αναγκαία γραμμική), όπου X, Y είναι δυο χώροι με norm και $\mathbf{D}(A) = \{x \in X : A(x) \in Y\}$ λέγεται **τελεστής** (ή συναρτησιακό αν $Y = \mathbb{R}$).

Το σύνολο $\mathbf{D}(A)$ λέγεται πεδίο ορισμού του A .

Ορίζουμε ακόμα τα σύνολα

$$\begin{aligned}\mathbf{Gr}(A) &= \{(x, A(x)) : x \in \mathbf{D}(A)\} \subset X \times Y \\ \mathbf{N}(A) &= \{x \in X : A(x) = 0\} \\ \mathbf{R}(A) &= \{y \in Y : \exists x \in X, \text{ τ.ω. } A(x) = y\}\end{aligned}$$

τα οποία ονομάζονται **γράφημα**, **μηδενοχώρος** (ή πυρήνας) και **σύνολο τιμών** του A αντίστοιχα. $\square$

Σημείωση 1.1.1. Αν $A : \mathbf{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ είναι ένας τελεστής πολλές φορές γράφουμε Ax αντί $A(x)$, ωστόσο στο εξής θα διατηρήσουμε τον συμβολισμό $A(x)$. Επίσης, παρόλο που για το μηδενοχώρο χρησιμοποιείται και ο όρος *πυρήνας*, όμως δεν θα χρησιμοποιήσουμε αυτό τον όρο για να αποφύγουμε πιθανή σύγχυση δεδομένου ότι χρησιμοποιείται και για άλλους σκοπούς.

Ορισμός 1.1.2. Ο τελεστής $A : \mathbf{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ (όπου X, Y είναι δυο χώροι με νόρμα), λέγεται **γραμμικός** τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbf{D}(A)$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ έχουμε,

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2).$$

Το σύνολο των γραμμικών τελεστών από τον X στον Y συμβολίζεται με $\mathcal{L}(X, Y)$.
□

Οι ακόλουθοι τελεστές είναι γραμμικοί.

Παράδειγμα 1.1.1. Ο ταυτοτικός τελεστής $I_X : X \rightarrow X$, που ορίζεται από τη σχέση $I_X(x) = x$, για όλα τα $x \in X$. (Επίσης, γράφουμε απλά I αντί για I_X , οπότε $I(x) = x$).

Παράδειγμα 1.1.2. Ο μηδενικός τελεστής $O : X \rightarrow Y$, που ορίζεται από τη σχέση $O(x) = 0$, για όλα τα $x \in X$.

Παράδειγμα 1.1.3. Ο διαφορικός τελεστής $D : X \rightarrow X$, που ορίζεται από τη σχέση $D(x(t)) = x'(t)$, για όλα τα $x \in X$, όπου X είναι ο χώρος των πολυωνύμων που ορίζονται στο $[a, b]$.

Παράδειγμα 1.1.4. Ο ολοκληρωτικός τελεστής $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, που ορίζεται από τη σχέση $A(x(t)) = \int_a^t x(\tau) d\tau$, για όλα τα $x \in C[a, b]$.

Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι οι τελεστές που εμφανίζονται στα παραπάνω παραδείγματα είναι γραμμικοί καθώς και ότι οι μηδενοχώροι καθώς και τα σύνολα τιμών τους είναι επίσης γραμμικοί χώροι. Στο θεώρημα που ακολουθεί θα αποδείξουμε αυτές τις ιδιότητες σε ένα γενικότερο πλαίσιο καθώς την ίσως προφανή ιδιότητα, δηλαδή, ότι σε ένα γραμμικό τελεστή A αν η διάσταση n του μηδενοχώρου του $\mathbf{N}(A)$ είναι πεπερασμένη, τότε η διάσταση του συνόλου τιμών του $\mathbf{R}(A)$ είναι μικρότερη ή ίση με το n .

Θεώρημα 1.1.1. Έστω A ένας γραμμικός τελεστής. Τότε:

- (i) Ο μηδενοχώρος $\mathbf{N}(A)$ είναι ένας γραμμικός χώρος.
- (ii) Το σύνολο τιμών $\mathbf{R}(A)$ είναι ένας γραμμικός χώρος.

Απόδειξη. (i) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbf{N}(A)$, τότε $A(x_1) = A(x_2) = 0$. Επειδή ο A είναι γραμμικός, για οποιαδήποτε βαθμωτά a, b θα έχουμε

$$A(ax_1 + bx_2) = aA(x_1) + bA(x_2) = 0,$$

οπότε το $(ax_1 + bx_2) \in \mathbf{N}(A)$. Άρα, ο $\mathbf{N}(A)$ είναι ένας γραμμικός χώρος.

(ii) Έστω $y_1, y_2 \in \mathbf{R}(A)$. Θα αποδείξουμε ότι $(ay_1 + by_2) \in \mathbf{R}(A)$, για όλα τα βαθμωτά a, b .

Επειδή τα $y_1, y_2 \in \mathbf{R}(A)$ υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbf{D}(A)$ τέτοια ώστε $y_1 = A(x_1)$ και

$$y_2 = A(x_2).$$

Εξάλλου, το $(ax_1 + bx_2) \in \mathbf{N}(A)$, επειδή ο $\mathbf{D}(A)$ είναι γραμμικός χώρος.

Από την γραμμικότητα του A προκύπτει ότι

$$A(ax_1 + bx_2) = aA(x_1) + bA(x_2) = ay_1 + by_2,$$

οπότε $(ay_1 + by_2) \in \mathbf{R}(A)$ και επειδή τα $y_1, y_2 \in \mathbf{R}(A)$ είναι τυχόντα καθώς και τα βαθμωτά a, b έπεται ότι ο $\mathbf{R}(A)$ είναι ένας γραμμικός χώρος. $\square$

Ορισμός 1.1.3. Θεωρούμε τους γραμμικούς χώρους X, Y και ένα γραμμικό τελεστή $A : \mathbf{D}(A) \subseteq \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ ο οποίος είναι 1-1- και επί. Τότε, ορίζεται η απεικόνιση $A^{-1} : \mathbf{R}(A) \rightarrow \mathbf{D}(A)$, η οποία απεικονίζει κάθε $y \in \mathbf{R}(A)$ σε εκείνο το $x \in \mathbf{D}(A)$ για το οποίο $A(x) = y$. Η απεικόνιση A^{-1} λέγεται **αντίστροφος** τελεστής του A . $\square$

Θεώρημα 1.1.2. Θεωρούμε τους γραμμικούς χώρους X, Y πάνω σε ένα σώμα K ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) και ένα γραμμικό τελεστή $A : X \rightarrow Y$. Τότε:

- (i) $A(0) = 0$.
- (ii) Ο A είναι 1-1 και επί αν και μόνο αν $\mathbf{N}(A) = \mathbf{0}$.
- (iii) Αν ο A είναι 1-1, τότε ο τελεστής $A^{-1} : \mathbf{R}(A) \rightarrow \mathbf{X}$ είναι γραμμικός.

Απόδειξη. (i) Είναι $A(0) = A(0x) = 0A(x) = 0$, για κάθε $x \in X$.

(ii) Έστω ότι $\mathbf{N}(A) = \mathbf{0}$ και $x_1, x_2 \in X$ για τα οποία ισχύει $A(x_1) = A(x_2)$. Τότε, λόγω της γραμμικότητας του A θα είναι $A(x_1 - x_2) = A(x_1) - A(x_2) = 0$, οπότε το $(x_1 - x_2) \in \mathbf{N}(A)$ και λόγω του (i) το $x_1 - x_2 = 0$, δηλαδή, $x_1 = x_2$ και επομένως ο A είναι 1-1.

Αντίστροφα, αν ο A είναι 1-1 και αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x \in X, x \neq 0$, τέτοιο ώστε $x \in \mathbf{N}(A)$, τότε $A(x) = 0$. Όμως λόγω του (i) το $A(0) = 0$, οπότε το $x = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

(iii) Επειδή ο A είναι 1-1 ορίζεται ο αντίστροφος του $A^{-1} : \mathbf{R}(A) \rightarrow \mathbf{X}$ και επειδή ο $\mathbf{R}(A)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του Y (βλ. Θεώρημα 1.1.1) για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και κάθε $a, b \in K$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} A^{-1}(aA(x_1) + bA(x_2)) &= A^{-1}(A(ax_1 + bx_2)) \\ &= ax_1 + bx_2 \\ &= aA^{-1}(A(x_1)) + bA^{-1}(A(x_2)), \end{aligned}$$

και επομένως ο A^{-1} είναι γραμμικός. $\square$

Θεώρημα 1.1.3. Έστω A ένας γραμμικός τελεστής. Αν $\dim \mathbf{N}(A) = n < \infty$. Τότε $\dim \mathbf{R}(A) \leq n$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $n+1$ τυχόντα στοιχεία $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ του $\mathbf{R}(A)$. Τότε, $y_1 = A(x_1), y_2 = A(x_2), \dots, y_{n+1} = A(x_{n+1})$ για κάποια $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ στον $\mathbf{D}(A)$. Επειδή $\dim(A) = n$, το σύνολο $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, οπότε αν

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n+1} x_{n+1} = 0$$

για κάποια βαθμωτά $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, τότε αυτά δεν είναι όλα μηδέν. Επειδή ο A είναι γραμμικός το $A(0) = 0$, οπότε αν εφαρμόσουμε τον A και στα δυο μέλη της παραπάνω ισότητας παίρνουμε

$$A(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n+1} x_{n+1}) = A(0)$$

από όπου παίρνουμε

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_{n+1} y_{n+1} = 0.$$

Αυτό δείχνει ότι τα $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού τα $a_i, i = 1, 2, \dots, n+1$ δεν είναι όλα μηδέν. Επειδή τα $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ είναι $n+1$ τυχόντα στοιχεία του $\mathbf{R}(A)$, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχουν $n+1$ (ή και περισσότερα) στοιχεία του $\mathbf{R}(A)$ γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε (εξ ορισμού) $\dim \mathbf{R}(A) \leq n$. $\square$

Ορισμός 1.1.4. Ο γραμμικός τελεστής $A : \mathbf{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$, όπου X, Y χώροι με νόρμα, λέγεται **φραγμένος** αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c τέτοιος ώστε για κάθε $x \in \mathbf{D}(A)$,

$$\|A(x)\| \leq c\|x\|. \quad (1)$$

Το σύνολο των φραγμένων τελεστών από τον X στον Y συμβολίζεται με $\mathcal{B}(X, Y)$. $\square$

Η μικρότερη τιμή της σταθεράς c για την οποία η ανισότητα (1) ισχύει για κάθε μη μηδενικό $x \in \mathbf{D}(A)$, (γιά $x = 0$ είναι $A(x) = 0$, οπότε θεωρούμε το $x \neq 0$), λέγεται **norm** του A και συμβολίζεται με $\|A\|$. Τίθεται, ωστόσο, το ερώτημα: Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του c ; Από την ανισότητα (1) προκύπτει ότι

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leq c, \quad \forall x \in \mathbf{D}(A) \setminus \{0\},$$

οπότε

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbf{D}(A), x \neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \quad (2)$$

Αν $\mathbf{D}(A) = \{0\}$, ορίζουμε την $\|A\| = 0$. Για $x \neq 0$ και για $c = \|A\|$ παίρνουμε την ανισότητα

$$\|A(x)\| \leq \|A\|\|x\|. \quad (3)$$

Η ακόλουθη πρόταση δικαιολογεί τον όρο norm που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω.

Πρόταση 1.1.1. Έστω $A : \mathbf{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής, όπου X, Y δύο χώροι με norm. Τότε

(i)

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbf{D}(A), \|x\|=1} \|A(x)\| \quad (4)$$

(ii) Η $\|\cdot\|$ που ορίζετε από τη (2) ικανοποιεί τις ιδιότητες της norm (βλ. Ορισμός ??).

Απόδειξη. (i) Για $x \neq 0$ θέτουμε $\|x\| = a$ και $y = \frac{1}{a}x$, οπότε $\|y\| = 1$ και επειδή ο A είναι γραμμικός από τη σχέση (2) παίρνουμε

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{1}{a} \|A(x)\| = \sup_{x \neq 0} \|A\left(\frac{1}{a}x\right)\| = \sup_{\|y\|=1} \|A(y)\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|,$$

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε θέσει το x στη θέση του y .

(ii) Από τη ανισότητα (3) προκύπτει ότι $\|A\| \geq 0$ καθώς και ότι αν $\|A\| = 0$, τότε $\|A(x)\| = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{D}(A)$, οπότε $A = 0$. Αντίστροφα, αν $A = 0$ εξ ορισμού είναι $\|A\| = 0$.

Γιά κάθε $x \in \mathbf{D}(A)$ με $\|x\| = 1$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ έχουμε

$$\|aA\| = \sup_{\|x\|=1} \|aA(x)\| = \sup_{\|x\|=1} |a| \|A(x)\| = |a| \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\| = |a| \|A\|.$$

Τέλος, έστω A_1, A_2 φραγμένοι γραμμικοί τελεστές με $\mathbf{D}(A_1) = \mathbf{D}(A_2) \subset X$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbf{D}(A_1)$ με $\|x\| = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|A_1 + A_2\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(A_1 + A_2)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1x + T_2x\| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|A_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|A_2x\| = \|A_1\| + \|A_2\|. \end{aligned}$$

□

Τα παραδείγματα που ακολουθούν αποτελούν μερικές τυπικές περιπτώσεις φραγμένων αλλά και μη γραμμικών τελεστών.

Παράδειγμα 1.1.5. Ο ταυτοτικός τελεστής $I_X : X \rightarrow X$, που ορίζεται σε ένα χώρο με νόρμα $X \neq \{0\}$ είναι φραγμένος και έχει νόρμα $\|I\| = 1$.

Παράδειγμα 1.1.6. Ο μηδενικός τελεστής $O : X \rightarrow Y$, που ορίζεται που ορίζεται σε ένα χώρο με νόρμα X είναι φραγμένος και έχει νόρμα $\|O\| = 0$.

Παράδειγμα 1.1.7. Ο διαφορικός τελεστής $D : X \rightarrow X$, που ορίζεται από τη σχέση $Dx(t) = x'(t)$, για όλα τα $x \in X$, όπου X είναι ο χώρος των πολυωνύμων που ορίζονται στο $[0, 1]$ με $\|x\| = \max |x(t)|$, $x \in [0, 1]$ είναι γραμμικός και μη φραγμένος.

Απόδειξη. Ο διαφορικός τελεστής είναι προφανώς γραμμικός, οπότε θα αποδείξουμε ότι δεν είναι φραγμένος. Θεωρούμε την ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $x_n(t) = t^n$, $t \in [0, 1]$. Τότε $\|x_n\| = 1$ και

$$D(x_n) = x'_n(t) = nt^{n-1},$$

οπότε

$$\frac{\|D(x_n)\|}{\|x_n\|} = n.$$

Αφού όμως το $n \in \mathbb{N}$ είναι τυχαίο δεν υπάρχει σταθερός αριθμός c τέτοιος ώστε

$$\frac{\|D(x_n)\|}{\|x_n\|} \leq c.$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι ο A δεν είναι φραγμένος.

Σημείωση 1.1.2. Δεδομένου ότι η διαφορίση είναι ιδιαίτερα σημαντική διαδικασία, από το τελευταίο παράδειγμα φαίνεται ότι και οι μη φραγμένοι τελεστές έχουν σημαντική πρακτική αξία, ωστόσο οι φραγμένοι τελεστές είναι απλούστεροι και πιο εύχρηστοι από τους μη φραγμένους.

Παράδειγμα 1.1.8. Θεωρούμε τον τελεστή $D : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, όπου σε κάθε συνάρτηση $f \in C^1[0, 1]$ αντιστοιχεί η παράγωγός της f' . Τότε:

(i) Αν ο $C^1[0, 1]$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|f\|_{\infty} = \max\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$$

ο D δεν είναι φραγμένος.

(ii) Αν ο $C^1[0, 1]$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in [0, 1]\} + \max\{|f'(x)| : x \in [0, 1]\}$$

ο D είναι φραγμένος.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε την ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ του $C^1[0, 1]$ με

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}, \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Τότε, έχουμε

$$\|D(f_n)\|_\infty = \|f'_n\|_\infty = \max\{|x^{n-1}| : x \in [0, 1]\} = 1$$

και

$$\|f_n\|_\infty = \max\{|\frac{x^n}{n}| : x \in [0, 1]\} = \frac{1}{n}.$$

Αν υποθέσουμε ότι ο D είναι φραγμένος θα υπαρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|D(x_n)\|_\infty \leq c\|(f_n)\|_\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή

$$1 \leq \frac{c}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, ο T δεν είναι φραγμένος.

(ii) Παρατηρούμε ότι για κάθε $f \in C^1[0, 1]$,

$$\|D(x)\|_\infty \leq \|f\|,$$

οπότε ο D είναι φραγμένος.

Παράδειγμα 1.1.9. Ο ολοκληρωτικός τελεστής $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, που ορίζεται από τη σχέση $T(x(t)) = \int_a^t k(t, \tau)x(\tau)d\tau$, για όλα τα $x \in C[a, b]$, όπου k είναι μιά δοσμένη συνεχής συνάρτηση στο τετράγωνο $[a, b] \times [a, b]$ είναι γραμμικός και φραγμένος.

Η συνάρτηση k λέγεται **πυρήνας** του T .

Απόδειξη. Ο T ως ολοκληρωτικός τελεστής είναι γραμμικός. Θα αποδείξουμε ότι είναι φραγμένος. Επειδή η συνάρτηση k είναι συνεχής στο κλειστό τετράγωνο

$[a, b] \times [a, b]$ θα είναι φραγμένη, δηλαδή θα είναι $|k(t, \tau)| \leq k_0$ για όλα τα $(t, \tau) \in [a, b] \times [a, b]$, όπου k_0 είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Επιπλέον, είναι

$$|x(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t)| = \|x\|,$$

οπότε

$$\|T(x)\| = \max_{t \in [a, b]} \left| \int_a^t k(t, \tau)x(\tau)d\tau \right| \leq \max_{t \in [a, b]} \int_a^t |k(t, \tau)||x(\tau)|d\tau \leq k_0\|x\|.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι η (1) με $c = k_0$, οπότε ο T είναι φραγμένος.

Παράδειγμα 1.1.10. Ένας πραγματικός πίνακας $A = (a_{ij})$ με m γραμμές και n στήλες ορίζει ένα γραμμικό και φραγμένο τελεστή $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, που ορίζεται από τη σχέση

$$y = Ax, \quad (5)$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ και $y = (y_1, \dots, y_m)^T$, δηλαδή είναι διανύσματα στήλες με n και m συνιστώσες, αντίστοιχα και που η πράξη μεταξύ του πίνακα A και του διανύσματος στήλη x είναι εκείνη του πολλαπλασιασμού πινάκων.

Απόδειξη. Ο T είναι γραμμικός γιατί ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι γραμμικός. Θα αποδείξουμε ότι είναι φραγμένος.

Υπενθυμίζουμε ότι η ευκλείδεια νόρμα του $\mathbb{R}^n$ δίνεται από τη σχέση

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2},$$

όμοια και στον $\mathbb{R}^m$.

Εξάλλου, αν γράψουμε τη σχέση (5) χρησιμοποιώντας συντεταγμένες παίρνουμε

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (6)$$

Από την (6) και την ανισότητα Cauchy – Schwarz (βλ. ??) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|T(x)\|^2 = \|y\|^2 &= \sum_{i=1}^m y_i^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2} \right]^2 \\ &\leq \|x\|^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2. \end{aligned}$$

Επειδή το διπλό άθροισμα στην τελευταία γραμμή είναι ένας θετικός αριθμός δεν εξαρτάται από το x , έστω ό c^2 , η ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\|T(x)\|^2 = c^2 \|x\|^2,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι ο T είναι φραγμένος.

Σημείωση 1.1.3. Αυτό το τελευταίο παράδειγμα είναι πολύ σημαντικό για τους χώρους με πεπερασμένη διάσταση, γιατί οι γραμμικοί τελεστές μπορούν να αναπαρασταθούν με πίνακες. Αυτό το γεγονός κάνει τους πίνακες το πιο σημαντικό "εργαλείο" για τη μελέτη γραμμικών τελεστών στην περίπτωση της πεπερασμένης διάστασης. Το θεώρημα που ακολουθεί αποτελεί μια επιβεβαίωση αυτού.

Θεώρημα 1.1.4. Αν ένας διανυσματικός χώρος X με norm είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε κάθε γραμμικός τελεστής στον X είναι φραγμένος.

Απόδειξη. Έστω ότι $\dim X = n$ και $\{e_1, \dots, e_n\}$ μία βάση του X . Τότε, το κάθε $x \in X$ γράφεται $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, οπότε για κάθε γραμμικό τελεστή T στον X θα έχουμε

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \|T\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right)\| = \left\|\sum_{j=1}^n x_j T e_j\right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|T e_j\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_k \|T e_k\| \\ &\leq \max_k \|T e_k\| c \left\|\sum_{j=1}^n x_j e_j\right\| \\ &= c \max_k \|T e_k\| \|x\| = C \|x\|, \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι ο T είναι φραγμένος. □

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι πολύ ενδιαφέρον και αυτό που μεταξύ άλλων μας λέει είναι ότι για ένα γραμμικό τελεστή η συνέχεια και το φραγμένο είναι έννοιες ισοδύναμες.

Θεώρημα 1.1.5. (Βασικές ιδιότητες γραμμικών τελεστών)

Έστω $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ ένας γραμμικός τελεστής, όπου X, Y δύο χώροι με norm. Τότε, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Ο A είναι συνεχής στο 0,

- (ii) Ο A είναι συνεχής,
- (iii) Ο A είναι ομοιόμορφα συνεχής,
- (iv) Ο A είναι Lipschitz συνεχής,
- (v) Ο A είναι φραγμένος.

Απόδειξη. Η περίπτωση $A = 0$ είναι τετριμμένη, οπότε έστω ότι $A \neq 0$. Θα αποδείξουμε την ισοδυναμία: (α) των προτάσεων (ii) και (v), και (β) των (i) και (ii).
 (α) Υποθέτουμε ότι ο A είναι φραγμένος. Έστω τυχόν $x_0 \in \mathbf{D}(A)$ και $\varepsilon > 0$ δοσμένο. Τότε, επειδή ο A είναι φραγμένος, για κάθε $x \in \mathbf{D}(A)$ τέτοιο ώστε $\|x - x_0\| < \delta$, όπου $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$ θα έχουμε

$$\|A(x) - A(x_0)\| = \|A(x - x_0)\| \leq \|A\|\|x - x_0\| < \|A\|\delta = \varepsilon.$$

Επειδή το $x_0 \in \mathbf{D}(A)$ είναι τυχαίο, έπεται ότι ο A είναι συνεχής.
 Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο A είναι συνεχής σε ένα τυχαίο σημείο $x_0 \in \mathbf{D}(A)$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbf{D}(A)$ με $\|x - x_0\| < \delta$ έπεται ότι

$$\|A(x) - A(x_0)\| < \varepsilon. \quad (7)$$

Έστω $y \in \mathbf{D}(A)$, $y \neq 0$ τυχόν. Θέτουμε $x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|}y$, οπότε $\|x - x_0\| = \delta$, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (7).
 Επειδή ο A είναι γραμμικός, έχουμε

$$\|A(x) - A(x_0)\| = \|A(x - x_0)\| = \|A(\frac{\delta}{\|y\|}y)\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|A(y)\|,$$

και η (7) συνεπάγεται

$$\frac{\delta}{\|y\|}\|A(y)\| \leq \varepsilon,$$

οπότε

$$\|A(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\|y\|,$$

που σημαίνει ότι ο T είναι φραγμένος.

(β) Από το β' μέρος της απόδειξης του (α) έπεται ότι αν ο A είναι συνεχής σε ένα σημείο τότε είναι φραγμένος, οπότε πάλι από το (α) συνεπάγεται ότι είναι συνεχής. $\square$

Θεωρούμε δυο χώρους X και Y με νόρμα (και τους δυο πραγματικούς ή και τους δυο μιγαδικούς) και θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B}(X, Y)$ των φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y . Πρώτα από όλα ο $\mathcal{B}(X, Y)$ γίνεται διανυσματικός χώρος αν ορίσουμε το άθροισμα δυο τελεστών $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$ με την σχέση

$$(A_1 + A_2)(x) = A_1(x) + A_2(x)$$

και το γινόμενο ενός τελεστή $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ με ένα βαθμωτό λ με την σχέση

$$(\lambda A)(x) = \lambda A(x).$$

Από το Θεώρημα 1.1.5 προκύπτει ότι $\mathcal{B}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$, οπότε ο $\mathcal{B}(X, Y)$ εφοδιασμένος με τη νόρμα που δίδεται από τη σχέση (2), δηλαδή την

$$\begin{aligned} \|A\|_{\mathcal{B}(X, Y)} &= \sup \left\{ \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X, x \neq 0 \right\} \\ &= \sup \{ \|A(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X = 1 \}. \end{aligned}$$

γίνεται χώρος με νόρμα.

Το πολύ ενδιαφέρον ερώτημα που τίθεται σε αυτό το σημείο είναι:

Σε ποια περίπτωση ο $\mathcal{B}(X, Y)$ είναι ένας χώρος Banach; Η απάντηση δίδεται από το πολύ σημαντικό θεώρημα που ακολουθεί και το αξιοσημείωτο είναι ότι το θεώρημα ισχύει είτε ο X είναι χώρος Banach είτε όχι.

Θεώρημα 1.1.6. Αν ο Y είναι χώρος Banach τότε και ο $\mathcal{B}(X, Y)$ είναι χώρος Banach.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια ακολουθία Cauchy $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ στον $\mathcal{B}(X, Y)$. Θα αποδείξουμε ότι η $\{A_n\}$ συγκλίνει σε ένα τελεστή $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Αφού η $\{A_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|A_n - A_m\| < \varepsilon, \quad \forall m, n \geq N. \quad (1)$$

Τότε, από την (1), για τυχόν $x \in X$ και όλα τα $m, n \geq N$, λόγω της γραμμικότητας του $\mathcal{B}(X, Y)$ και λόγω της (3) έχουμε

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| = \|(A_n - A_m)(x)\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|. \quad (2)$$

Επομένως για τυχόν $x \in X$ σταθερό και για δοθέν $\varepsilon' > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\varepsilon = \varepsilon_x$ τέτοιο ώστε $\varepsilon_x \|x\| < \varepsilon' > 0$, οπότε από την (2) παίρνουμε

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| < \varepsilon', \quad \forall m, n \geq N. \quad (3)$$

Από την (3) συμπεραίνουμε ότι η $\{A_n(x)\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον Y . Αφού ο Y είναι χώρος πλήρης, η $\{A_n(x)\}$ συγκλίνει, έστω στο $y \in Y$. Δηλαδή, για τυχόν $x \in X$ η $A_n(x) \rightarrow y \in Y$, όπου προφανώς το y εξαρτάται από το x . Αυτό ορίζει ένα τελεστή $A : X \rightarrow Y$, όπου για κάθε $x \in X$, το

$$A(x) = y = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x). \quad (4)$$

Ο τελεστής A είναι γραμμικός γιατί για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και a, b βαθμωτά λόγω της (4) έχουμε

$$\begin{aligned} A(ax_1 + bx_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(ax_1 + bx_2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [aA_n(x_1) + b \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x_2)] \\ &= aA(x_1) + bA(x_2). \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε ότι ο A είναι φραγμένος και ότι $A_n \rightarrow A$, δηλαδή $\|A_n - A\| \rightarrow 0$. Αφού η (2) ισχύει για κάθε $m > N$ και λόγω της (4) $A_m(x) \rightarrow A(x)$, χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της νόρμας, από τη (2) παίρνουμε

$$\|A_n(x) - A(x)\| = \|A_n(x) - \lim_{m \rightarrow \infty} A_m(x)\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A_n(x) - A_m(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \quad (5)$$

Από την (5) συμπεραίνουμε ότι ο $(A_n - A)$ είναι φραγμένος τελεστής για κάθε $m > N$ και επειδή ο A_n είναι φραγμένος θα είναι και ο $A = A_n - (A_n - A)$, δηλαδή $A \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Τέλος, αν στην (5) πάρουμε το $\sup$ για όλα τα $x \in X$ με $\|x\| = 1$, παίρνουμε $\|A_n - A\| < \varepsilon$ και επειδή το ε μπορεί να ληφθεί οσοδήποτε μικρό, έπεται ότι $\|A_n - A\| \rightarrow 0$. $\square$

Πόρισμα 1.1.1. Έστω A ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία σημείων του $\mathbf{D}(A)$. Αν $x_n \rightarrow x$, $x \in \mathbf{D}(A)$ τότε $A(x_n) \rightarrow A(x)$.

Απόδειξη. Προκύπτει από το Θεωρήματος 1.1.5 ή από την (3) γιατί για $n \rightarrow \infty$ έχουμε

$$\|A(x) - A(x_0)\| = \|A(x - x_0)\| \leq \|A\| \|x - x_0\| \rightarrow 0.$$

Αν ένας τελεστής A είναι ορισμένος σε ένα γνήσιο υποσύνολο $\mathbf{D}(A)$ ενός διανυσματικού χώρου X με νόρμα, τότε ο A δέχεται πολλές επεκτάσεις, ωστόσο πρακτικό ενδιαφέρον έχει ποιες από αυτές τις επεκτάσεις διατηρούν κάποιες βασικές ιδιότητες (π.χ. γραμμικότητα ή συνέχεια) του A , ποιες μπορεί να είναι αυτές, και με ποιο τρόπο μπορεί να κατασκευαστεί μια τέτοια επέκταση. Απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα δίνει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.7. Έστω $A : \mathbf{D}(A) \rightarrow Y$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής, όπου $\mathcal{D}(A)$ είναι γνήσιο υποσύνολο ενός χώρου X με νόρμα και Y είναι ένας χώρος Banach. Τότε ο A έχει μια επέκταση $\bar{A} : \overline{\mathbf{D}(A)} \rightarrow Y$, όπου ο $\bar{A}$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής με νόρμα $\|\bar{A}\| = \|A\|$.

Απόδειξη. Έστω $x \in \overline{\mathbf{D}(A)}$. Τότε, υπάρχει μια ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ στο $\mathbf{D}(A)$ τέτοια ώστε $x_n \rightarrow x$ και επειδή ο A είναι γραμμικός και φραγμένος θα έχουμε

$$\|A(x_n) - A(x_m)\| = \|A(x_n - x_m)\| \leq \|A\| \|x_n - x_m\|.$$

Αυτό δείχνει ότι η $\{A(x_n)\}_{n=1}^\infty$ είναι ακολουθία Cauchy γιατί η $\{x_n\}$ συγκλίνει. Επομένως, η $\{A(x_n)\}$ συγκλίνει, έστω στο y , και επειδή ο Y είναι πλήρης το $y \in Y$. Ορίζουμε τον $\bar{A}$ από τη σχέση $\bar{A}(x) = y$. Ο ορισμός του $\bar{A}$ είναι ανεξάρτητος από την επιλογή της ακολουθίας $\{x_n\}$ που συγκλίνει στο x . Πραγματικά, αν η ακολουθία $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ έχει το ίδιο όριο με την $\{x_n\}$, δηλαδή το x , τότε λόγω του πορίσματος ?? και ακολουθία $\{A(w_n)\}_{n=1}^\infty$ έχει το ίδιο όριο με την $\{A(x_n)\}$, δηλαδή το y . Αυτό αποδεικνύει ότι ο $\bar{A}$ είναι μοναδικά ορισμένος σε κάθε $x \in \overline{\mathbf{D}(A)}$. Προφανώς, ο $\bar{A}$ είναι γραμμικός και $\bar{A}(x) = A(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{D}(A)$. Επίσης, επειδή

$$\|A(x_n)\| \leq \|A\| \|x_n\|$$

για $n \rightarrow \infty$, παίρνουμε

$$\|\bar{A}(x)\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Επομένως, ο $\bar{A}$ είναι φραγμένος και $\|\bar{A}\| \leq \|A\|$. Εξάλλου, $\|A\| \leq \|\bar{A}\|$, λόγω ορισμού της νόρμας ως ένα supremum (βλ. (4)) και λόγω του ότι $\mathcal{D}(A) \subset \overline{\mathbf{D}(A)}$. Άρα, $\|\bar{A}\| = \|A\|$.

Παρατήρηση 1.1.1. Αποδείξαμε στο παραπάνω θεώρημα ότι η επέκταση ενός φραγμένου τελεστή A στο κάλυμμα $\overline{\mathbf{D}(A)}$ του πεδίου ορισμού του $\mathbf{D}(A)$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $\bar{A}$ με την ίδια νόρμα. Αυτό περικλείει και την περίπτωση μιας επέκτασης από ένα πυκνό σύνολο σε ένα χώρο X με νόρμα σε ολόκληρο το χώρο X , καθώς επίσης και την επέκταση από ένα χώρο X με νόρμα στην πλήρωσή του.

1.2 Γραμμικά Συναρτησιακά

Ένα συναρτησιακό είναι ένας τελεστής με τιμές στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ ή στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$. Τα συναρτησιακά ως τελεστές έχουν όλες τις ιδιότητες

που αφορούν τους τελεστές που μελετήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, ωστόσο, θα εξειδικεύσουμε κάποιες έννοιες μιας και αποτελούν ειδική περίπτωση αλλά και για το λόγο ότι έχουν κυρίαρχο ρόλο στην συναρτησιακή ανάλυση. Στην πραγματικότητα η συναρτησιακή ανάλυση είναι η ανάλυση των συναρτησοειδών.

Θα συμβολίζουμε στη συνέχεια τα συναρτησιακά με τα γράμματα f, g κτλ που χρησιμοποιούμε και για τις συναρτήσεις με προσοχή προς αποφυγή οποιασδήποτε σύγχυσης.

Ορισμός 1.2.1. Έστω X ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$ (ή το $\mathbb{C}$). Μια απεικόνιση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ λέγεται **συναρτησιακό** ή **συναρτησοειδές**. $\square$

Ορισμός 1.2.2. Ένα **γραμμικό συναρτησιακό** είναι ένας γραμμικός τελεστής με πεδίο ορισμού $\mathbf{D}(f)$ σε ένα διανυσματικός χώρο X και τιμές σε ένα σώμα K , δηλαδή,

$$f : \mathbf{D}(f) \rightarrow K,$$

όπου $K = \mathbb{R}$ αν ο X είναι πραγματικός και $K = \mathbb{C}$ αν ο X είναι μιγαδικός. $\square$

Ορισμός 1.2.3. Ένα **φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό** είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής με τιμές στο σώμα K ενός χώρου X με norm στον οποίο περιέχεται το πεδίο ορισμού του $\mathbf{D}(f)$. $\square$

Παρατήρηση 1.2.1. Οι ιδιότητες των φραγμένων γραμμικών τελεστών είναι και ιδιότητες των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών, ωστόσο θα ορίσουμε τη norm και το φραγμένο σαν ειδική περίπτωση των φραγμένων γραμμικών τελεστών.

Αν το γραμμικό συναρτησιακό f είναι φραγμένο, τότε υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c τέτοιος ώστε για όλα τα $x \in \mathbf{D}(f)$,

$$|f(x)| \leq c\|x\|. \quad (1)$$

Επιπλέον, η norm του $\|f\|$ ορίζεται από τη σχέση (2) (βλ. § 10.1), δηλαδή

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbf{D}(f), x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad (2)$$

ή

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbf{D}(f), \|x\|=1} \|f(x)\| \quad (3)$$

Επίσης από τον τύπο (3) (βλ. § 10.1) συνεπάγεται ότι

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\|. \quad (4)$$

Σημείωση 1.2.1. Μερικές φορές η νόρμα ενός γραμμικού συναρτησιακού f συμβολίζεται με $|f|$, ωστόσο θα συνεχίσουμε να την συμβολίζουμε με $\|f\|$.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν αποτελούν μερικά από τα πιο συνήθη συναρτησιακά της συναρτησιακής ανάλυσης.

Παράδειγμα 1.2.1. Η νόρμα $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ ενός χώρου $(X, \|\cdot\|)$ είναι ένα συναρτησιακό στον X το οποίο δεν είναι γραμμικό.

Παράδειγμα 1.2.2. Έστω $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ σταθερό. Για κάθε $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο $a \cdot x$ στον $\mathbb{R}^n$ και ορίζουμε το συναρτησιακό $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$f(x) = a \cdot x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

Το f είναι γραμμικό και επειδή

$$|f(x)| = |x \cdot a| \leq \|x\| \|a\|,$$

είναι φραγμένο.

Από τη σχέση (3) αν πάρουμε το supremum πάνω σε όλα τα x με $\|x\| = 1$ προκύπτει ότι

$$\|f\| \leq \|a\|.$$

Εξάλλου, για $x = a$ πάλι από την (3) προκύπτει ότι

$$\|f\| \geq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|.$$

Άρα, $\|f\| = \|a\|$.

Παράδειγμα 1.2.3. Θεωρούμε την απεικόνιση f που σε κάθε σημείο x (δηλαδή συνάρτηση) του χώρου $C[a, b]$ αντιστοιχεί το ορισμένο ολοκλήρωμά του στο διάστημα $[a, b]$. Δηλαδή είναι $f : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \int_a^b x(t) dt$, για κάθε $x \in C[a, b]$. Η f ορίζει στο $C[a, b]$ ένα συναρτησοειδές το οποίο, λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος, είναι γραμμικό και επειδή

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t) dt \right| \leq (b-a) \max_{t \in [a, b]} x(t) = (b-a) \|x\|$$

έπεται ότι είναι και φραγμένο.

Από την τελευταία ανισότητα παίρνοντας το supremum πάνω σε όλα τα $x \in C[a, b]$ με $\|x\| = 1$ προκύπτει ότι

$$\|f(x)\| \leq b - a.$$

Εξάλλου, για $x = x_0 = 1$, από την (3) προκύπτει ότι

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = |f(x_0)| = \int_a^b dt = b - a.$$

Άρα, $\|f\| = b - a$.

Παράδειγμα 1.2.4. Έστω $t_0 \in [a, b]$ σταθερό. Θεωρούμε την απεικόνιση f που σε κάθε σημείο $x(t) \in C[a, b]$ αντιστοιχεί την τιμή της στο t_0 . Δηλαδή είναι $f : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = x(t_0), \quad \forall x \in C([a, b]).$$

Η f ορίζει στο $C([a, b])$ ένα συναρτησιακό το οποίο, λόγω ορισμού της πρόσθεσης των συναρτήσεων, είναι γραμμικό. Επίσης, είναι και φραγμένο γιατί

$$|f(x)| = |x(t_0)| \leq \|x\|.$$

Από την τελευταία ανισότητα παίρνοντας το supremum πάνω σε όλα τα $x \in C([a, b])$ με $\|x\| = 1$ προκύπτει ότι

$$\|f(x)\| \leq 1.$$

Εξάλλου, για $x = x_0 = 1$, από την (3) προκύπτει ότι

$$\|f\| \geq |f(x_0)| = 1.$$

Άρα, $\|f\| = 1$.

Παράδειγμα 1.2.5. Έστω $a = \{a_n\} \in \ell^2$ σταθερό. Θεωρούμε την απεικόνιση f που σε κάθε σημείο $x = \{x_n\}$ (δηλαδή ακολουθία) του χώρου ℓ^2 , αντιστοιχεί το εσωτερικό γινόμενο $a \cdot x$ και ορίζουμε το συναρτησιακό $f : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τη σχέση

$$f(x) = a \cdot x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j.$$

Το f είναι γραμμικό και επίσης από την ανισότητα των Cauchy – Schwarz έχουμε

$$|f(x)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{1/2} = \|a\| \|x\|,$$

οπότε είναι φραγμένο.

Τέλος, εργαζόμενοι όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\|f\| = \|a\|$.

Παράδειγμα 1.2.6. Στο χώρο $C[0, 1]$ θεωρούμε την απεικόνιση $F(x) = \int_0^1 x(t)f(t)dt$, όπου η f είναι ολοκληρώσιμη. Τότε, η F ορίζει στον $C[0, 1]$ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό.

Η γραμμικότητα είναι προφανής και ισχύει

$$|F(x)| \leq \max_{t \in [0,1]} |x(t)| \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Παράδειγμα 1.2.7. Στο χώρο ℓ^p , $1 < p < \infty$ θεωρούμε την απεικόνιση f που ορίζεται με τη σχέση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, για κάθε $x = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$, όπου $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^q$. Τότε, η f ορίζει στον ℓ^p ένα γραμμικό συναρτησιακό.

Επειδή

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |b_n| \leq \|x\|_{\ell^p} \|f\|_{\ell^q} < \infty,$$

ένα τέτοιο συναρτησιακό είναι ορισμένο σε ολόκληρο τον χώρο ℓ^p . Άρα, το συναρτησιακό f είναι ταυτισμένο με τα στοιχεία $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ του ℓ^q .

Παράδειγμα 1.2.8. Έστω X ένας άπειρης διάστασης χώρος Banach και $\{x_i\}_{i \in I}$ μια Hamel βάση στον X . Υποθέτουμε ότι $\|x_i\| = 1$ για κάθε $i \in I$ (αλλιώς διαιρούμε κάθε x_i την norm του $\|x_i\| = 1$). Έστω $J_0 = \{j_1, j_2, \dots\}$ μια αριθμήσιμη υπακολουθία του I . Ορίζουμε τη συνάρτηση f στην $\{x_i\}_{i \in I}$ θέτοντας $f(x_{j_n}) = n$, $n \in \mathbb{N}$ και $f(x_i) = 0$, $i \in I \setminus J_0$. Τότε, η συνάρτηση f είναι γραμμική σε όλο τον X . Κάθε μη μηδενικό $x \in X$ έχει μοναδική αναπαράσταση $x = \sum_{k=1}^N a_k x_{i_k}$ για κάποια $i_1, i_2, \dots, i_N \in I$ και κάποια μη μηδενικά βαθμωτά $a_1, a_2, \dots, a_N$, οπότε ορίζουμε $f(x) = \sum_{k=1}^N a_k f(x_{i_k})$ και $f(0) = 0$. Τότε το f είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό στον X και επειδή $\|x_i\| = 1$ και $|f(x_{j_n})| = n$, δεν είναι φραγμένο.