

3 Δεκεμβρίου 2024

1. Έστω $k \in \mathbf{Z}$. Δείξτε ότι $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, και $i^{4k+3} = -i$. Να υπολογιστεί ο αριθμός i^{-202} .

2. Να περιγράψει το σύνολο το σημείων $z \in \mathbf{C}$ που ικανοποιούν:

$$(\alpha') \quad \Im(z) = -2,$$

$$(\beta') \quad \Re(z) = \frac{1}{2},$$

$$(\gamma') \quad \Re(z) \geq 4,$$

$$(\delta') \quad -1 < \Re(z) < 1,$$

$$(\epsilon') \quad |z - 1 + i| + 3,$$

$$(\zeta') \quad |z - 1| = |z + i|.$$

3. Δείξτε ότι $|z_1 z_2 z_3| = |z_1| |z_2| |z_3|$.

4. Βρείτε το όρισμα και γράψτε σε πολική μορφή τους μιγαδικούς:

$$(\alpha') \quad -\frac{1}{2},$$

$$(\beta') \quad -3 + 3i,$$

$$(\gamma') \quad -2\sqrt{3} - 2i.$$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$(\alpha') \quad z^2 + 16 = 0,$$

$$(\beta') \quad z^2 - 2z + i = 0,$$

$$(\gamma') \quad 2z^2 + z + 3 = 0.$$

6. Έστω $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ πραγματικές σταθερές. Δείξτε ότι αν το z_0 είναι ρίζα της πολωνυμικής εξίσωσης,

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

τότε το $\overline{z_0}$ είναι επίσης ρίζα.

7. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$(\alpha') \quad \lim_{z \rightarrow 2+3i} (z - 5i)^2,$$

$$(\beta') \quad \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 + 3}{iz},$$

$$(\gamma') \quad \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{z^2 + 9}{z - 3i},$$

$$(\delta') \quad \lim_{z \rightarrow 0} e^z,$$

$$(\varepsilon') \lim_{z \rightarrow \frac{\pi i}{2}} (z+1)e^z.$$

8. Έστω

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2z}{z+1}, & \text{αν } z \neq 0 \\ 1, & \text{αν } z = 0 \end{cases}$$

Σε ποια σημεία η f είναι συνεχής; Σε ποια σημεία η f είναι ασυνεχής; Ποιά από αυτά τα σημεία είναι σημεία αιρόμενης ασυνέχειας;

9. Δείξτε ότι $f(z) = \bar{z}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $\mathbf{C}$.

10. Να βρεθούν τα $z \in \mathbf{C}$ για τα οποία η

$$f(z) = x^2 + y^2 + i2xy$$

είναι διαφορίσιμη.

11. Δείξτε ότι σε πολικές συντεταγμένες η εξίσωση Laplace γράφεται

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0.$$