ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

Άσκηση 1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(a)=a^2$ για κάθε a άρρητο. Δείξτε ότι $f(x)=x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής, αύξουσα με την ιδιότητα $f(0)=0$ και $|f(x)|\geq|x|$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι επί.

Άσκηση 3. Εξετάστε αν ισχύουν ή όχι οι παρακάτω προτάσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α) Η συνάρτηση $f:(0,1)\cup(1,2)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1)\\ 2 & x\in(1,2]\end{cases}$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Έστω $A=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$. Η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ με $f\left(\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}0 & n \text{ άρτιος}\\ 1 & n \text{ περιττός}\end{cases}$ είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση 4. (α) Έστω $f,g:X\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. (i) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση $\lambda f+\mu g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. (ii) Ισχύει το ίδιο για το γινόμενο ή το πηλίκο·

(β) Έστω $g:X\to\mathbb{R}$ και $f:Y\to\mathbb{R}$ με $f(X)\subseteq Y$. Αν οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς δείξτε ότι και η συνθεσή τους $F(x)=f(g(x))$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση 5. Είναι σωστό ότι αν μια γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε είναι ομοιομορφισμός δηλαδή και η ίδια και η αντίστροφή της είναι συνεχείς συναρτήσεις ?

Άσκηση 6. Μια συνάρτηση $f:I\to\mathbb{R}$, I διάστημα του $\mathbb{R}$ καλείται Lipschitz αν υπάρχει σταθερά $C>0$ τέτοια ώστε $|f(x)-f(y)|\leq C|x-y|$, για όλα τα $x,y\in I$.

(α) Δείξτε ότι κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά δεν είναι Lipschitz.

(γ) Αν f παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο δείξτε ότι η f είναι Lipschitz.

(δ) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sin x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση 7. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x\neq 0$.

(α) Δείξτε ότι για κάθε $a\in[-1,1]$ υπάρχει ακολουθία (x_n) με $x_n\neq 0$, $x_n\to 0$ και $f(x_n)\to a$.

(γ) Δείξτε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής;

Άσκηση 8. Έστω $\emptyset\neq X\subseteq\mathbb{R}$ και $f:X\to\mathbb{R}$. Αν $x_0\in X$ δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(α) Η f είναι συνεχής στο x_0.

(β) Για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n\to x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα.

Άσκηση 9. Έστω $\emptyset\neq X\subseteq\mathbb{R}$ και $f:X\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αν το X είναι φραγμένο δείξτε ότι και το $f(X)$ είναι φραγμένο.