ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5

Άσκηση 1. Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $(f(x))^2 = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είτε $f(x) = 1$ ή $f(x) = -1$. Άρα η f είναι μια συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ που παίρνει το πολύ δύο τιμές. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών η f δεν μπορεί να λαμβάνει και τις δύο τιμές γιατί τότε θα υπήρχε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$, άτοπο. Άρα είτε $f(x) = 1$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ είτε $f(x) = -1$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $(f(x))^2 = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι δύο, η σταθερή $f_1(x) = 1$ και η σταθερή $f_2(x) = -1$.

Άσκηση 2. Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $(f(x))^2 = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = |x|$. Ειδικότερα, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και άρα, από Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών, η f διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $(f(x))^2 = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι οι εξής τέσσερεις: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = |x|$ και $f_4(x) = -|x|$.

Άσκηση 3. Εξετάστε αν ισχύουν ή όχι οι παρακάτω προτάσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής μη σταθερή. Τότε η f λαμβάνει άπειρες ρητές και άπειρες άρρητες τιμές.

(β) Υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(γ) Υπάρχει $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε το $f([a, b])$ να είναι ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$.

Λύση. (α) Η πρόταση είναι σωστή: Αφού η f είναι μη σταθερή υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) \neq f(x_2)$. Έστω $f(x_1) < f(x_2)$. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$. Από την πυκνότητα ρητών και αρρήτων μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$ υπάρχουν άπειροι ρητοί και άπειροι άρρητοι και άρα η f λαμβάνει άπειρες ρητές και άπειρες άρρητες τιμές.

(β) Η πρόταση είναι λάθος: Από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αν παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές τότε αναγκαστικά παίρνει και την τιμή μηδέν.

(γ) Η πρόταση είναι λάθος: Από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών και το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής προκύπτει ότι $f([a, b]) = [m, M]$ όπου $m = \min f$ είναι η ελάχιστη τιμή της f στο $[a, b]$ και $M = \max f$ η μέγιστη τιμή στο $[a, b]$.

Άσκηση 4. (α) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(q) = g(q)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(q) = 0$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $f = 0$.

Λύση. (α) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία (q_n) ρητών με $\lim_n q_n = x_0$. Επειδή η f είναι συνεχής, από Αρχή Μεταφοράς, έχουμε

$$\lim_n f(q_n) = f(x_0).$$

Ομοίως, από Αρχή Μεταφοράς για την συνεχή συνάρτηση $g(x)$, έχουμε

$$\lim_n g(q_n) = g(x_0)$$

Από υπόθεση $f(q_n) = g(q_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα από μοναδικότητα του ορίου, $f(x_0) = g(x_0)$.

(β) Προκύπτει άμεσα από το (α) για $g = 0$.

Άσκηση 5. (α) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(q) \geq g(q)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(q) \geq 0$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $f \geq 0$

Λύση. (α) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία (q_n) με $q_n \in \mathbb{Q}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $q_n \to x$. Από την συνέχεια των f, g και την Αρχή Μεταφοράς έχουμε

$$f(x_0) = \lim_n f(q_n) \;\text{ και }\; g(x_0) = \lim_n g(q_n)$$

Από τις ιδιότητες των ορίων έχουμε

$$f(q_n) \geq g(q_n) \Rightarrow \lim_n f(q_n) \geq \lim_n g(q_n)$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι $f(x_0) \geq g(x_0)$.

(β) Προκύπτει άμεσα από το (α) για $g = 0$.

Άσκηση 6. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: Υπάρχει $\theta > 0$ σταθερό τέτοιο ώστε σε κάθε ανοικτό διάστημα I του $\mathbb{R}$ υπάρχουν $x, y \in I$ με $|f(x) - f(y)| \geq \theta$. Δείξτε ότι η f δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας.

(β) Έστω $a \neq b$ στο $\mathbb{R}$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = a$ αν x ρητός και $f(x) = b$ αν x άρρητος. Δείξτε ότι η f είναι παντού ασυνεχής.

Λύση. (α) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι η f ήταν συνεχής στο x_0. Τότε για $\epsilon = \theta/2$ θα υπήρχε $\delta > 0$ με $|f(x) - f(x_0)| < \delta$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$. Αλλά τότε για κάθε $x, y \in I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ θα είχαμε

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(y) - f(y_0)| < 2\epsilon = \theta,$$

που αντιβαίνει στην υπόθεσή μας.

(β) <u>*α΄ τρόπος*</u>: Με χρήση του (α). Από Πυκνότητα ρητών και αρρήτων κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ περιέχει και ρητούς και άρρητους. Άρα το συμπέρασμα προκύπτει από το (α) για $\theta = b - a$.

<u>*β΄ τρόπος*</u>: Με χρήση της Αρχής Μεταφοράς. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Από Πυκνότητα ρητών και αρρήτων υπάρχουν ακολουθίες (q_n) και (a_n) με $q_n \in \mathbb{Q}$, $a_n \notin \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ με

$$x_0 = \lim_n q_n = \lim_n a_n$$

Από Αρχή Μεταφοράς θα έπρεπε

$$\lim_n f(q_n) = \lim_n f(a_n) = f(x_0)$$

Αλλά $f(q_n) = a \to a$ και $f(a_n) = b \to b$ οπότε θα είχαμε $a = b$, άτοπο.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -x, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

είναι συνεχής μόνο στο $x = 0$.

Λύση. Έστω $x_0 = 0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $|f(x) - f(0)| = \begin{cases} |x - 0| = |x| \text{ αν } x \text{ ρητός} \\ |-x - 0| = |x| \text{ αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(0)| = |x|$. Συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (συγκεκριμένα $\delta = \epsilon$) τέτοιο ώστε αν $|x - 0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(0)| < \epsilon$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Έστω τώρα $x_0 \neq 0$. Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Έστω (q_n) και (a_n) με $q_n \in \mathbb{Q}$, $a_n \notin \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ με

$$x_0 = \lim_n q_n = \lim_n a_n$$

Από Αρχή Μεταφοράς

$$\lim_n f(q_n) = \lim_n f(a_n) = f(x_0)$$

Αλλά $f(q_n) = q_n \to x_0$ και $f(a_n) = -a_n \to -x_0$ οπότε θα είχαμε $x_0 = -x_0$, άτοπο αφού $x_0 \neq 0$.

Άσκηση 8. Έστω $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

είναι ασυνεχής στα σημεία του $A \cup \{0\}$ και συνεχής παντού αλλού.

Λύση. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.

Αν $x_0 = 0$ τότε η f είναι ασυνεχής στο x_0 αφού $f(0) = 0$ ενώ $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \to 1$. Αν $x_0 \in A$ τότε πάλι η f είναι ασυνεχής στο x_0. Πράγματι, έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ με $x_0 = \frac{1}{n_0}$. Επειδή η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε

$$\dots \frac{1}{n_0+2} < \frac{1}{n_0+1} < \frac{1}{n_0} < \dots$$

και άρα στο ανοικτό διάστημα $I_0 = \left(\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0}\right)$ δεν υπάρχει στοιχείο του A. Επιλέγοντας ακολουθία (x_n) στο I_0 με $x_n \to x_0$ έχουμε $f(x_n) = 0 \to 0$ ενώ $f(x_0) = 1$.

Τέλος έστω $x_0 \notin A \cup \{0\}$. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα ανοικτό διάστημα I_0 τέτοιο ώστε στο διάστημα I_0 η f είναι σταθερά 0 και συνεπώς η f είναι συνεχής στο x_0 (αν $x_0 < 0$ θέτουμε $I_0 = (-\infty, 0)$, αν $x_0 > 1$ θέτουμε $I_0 = (1, +\infty)$ και αν $0 < x_0 < 1$ θέτουμε $I_0 = \left(\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0}\right)$ όπου n_0 είναι το ακέραιο μέρος του x^{-1}).

Άσκηση 9. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq \theta$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αντίστοιχα, αν $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq -\theta$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Αν $|f(x)| \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε ακριβώς ένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα συμβαίνει: Είτε 1) $f(x) \geq \theta$ για κάθε $x \in [a, b]$, ή (2) $f(x) \leq -\theta$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Λύση. (α) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ θα πρέπει να λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Δηλαδή, υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $\theta = f(x_0) > 0$ έχουμε το ζητούμενο. Όμοια για $f(x_0) < 0$.

(β) Αφού $|f(x)| \neq 0$ έπεται ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα η f θα διατηρεί πρόσημο, διότι διαφορετικά, από Θεώρημα Bolzano, θα υπήρχε σημείο που θα μηδενιζόταν. Άρα είτε $f(x) > 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ είτε $f(x) < 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ και το συμπέρασμα έπεται από το (α) ερώτημα.

Άσκηση 10. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και ότι $f(x_0) > g(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in [a, b]$. (α) Δείξτε ότι $f(x) > g(x)$ για όλα τα $x \in [a, b]$. (β) Δείξτε ότι ειδικότερα υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq g(x) + \theta$, για όλα τα $x \in [a, b]$.

Λύση. (α) Αν υπήρχε $x_1 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) < g(x_1)$ η συνεχής συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ αλλάζει πρόσημο στα x_0, x_1 και άρα από το Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ξ μεταξύ των x_0, x_1 με $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = g(\xi)$ άτοπο. Συνεπώς $f(x) > g(x)$ για όλα τα $x \in [a, b]$.

(β) Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ ως συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Έστω $\xi_0 \in [a, b]$ με $h(\xi_0) = \min\{h(x) : x \in [a, b]\}$. Τότε

$$h(x) \geq h(\xi_0) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq h(\xi_0) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) + h(\xi_0)$$

Θέτοντας λοιπόν $\theta = h(\xi_0)$ έχουμε $f(x) \geq g(x) + \theta$ για όλα τα $x \in [a, b]$. Το θ είναι γνήσια θετικό αφού $\theta = h(\xi_0)$ και όπως δείξαμε στο (α), $h(x) = f(x) - g(x) > 0$ για οποιοδήποτε $x \in [a, b]$.

Άσκηση 11. Έστω $f : [a, b] \to [a, b]$ συνεχής και αύξουσα συνάρτηση. Έστω $x_0 \in [a, b]$ και έστω ότι $x_0 < f(x_0)$. Θέτουμε $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... και γενικά $x_n = f(x_{n-1})$, για κάθε $n \geq 1$. Δείξτε τα εξής.

(i) Η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε ένα σημείο $\xi_0 \in [a, b]$.

(ii) Το ξ_0 είναι σταθερό σημείο της f δηλαδή $f(\xi_0) = \xi_0$.

Λύση. (i) Έχουμε $x_0 < x_1$ και γενικά αν $x_{n-1} \leq x_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τότε $f(x_{n-1}) \leq f(x_n)$ (αφού f αύξουσα) και άρα $x_n \leq x_{n+1}$. Συνεπώς η (x_n) είναι αύξουσα. Επιπλέον $f(x) \in [a, b]$ για κάθε $x \in [a, b]$ και άρα $x_n \in [a, b]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η (x_n) είναι μονότονη και φραγμένη ακολουθία και συνεπώς είναι συγκλίνουσα σε κάποιο $\xi_0 \in \mathbb{R}$. Επειδή $a \leq x_n \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $a \leq \lim x_n \leq b$. Άρα $x_n \to \xi_0$ με $\xi_0 \in [a, b]$.

(ii) Επειδή η f είναι συνεχής και $\lim x_n = \xi_0$, από Αρχή Μεταφοράς έχουμε

$$\lim f(x_n) = f(\xi_0)$$

Αλλά $f(x_n) = x_{n+1}$ και άρα η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\lim x_{n+1} = f(\xi_0)$$

Όμως η (x_{n+1}) είναι υπακολουθία της (x_n) και άρα θα πρέπει

$$\lim x_{n+1} = \xi_0$$

και συνεπώς από μοναδικότητα του ορίου προκύπτει ότι

$$\xi_0 = f(\xi_0)$$

Άσκηση 12. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Λύση. Τέλος, η f έχει το πολύ ένα σταθερό σημείο, διότι αν υπήρχαν δύο σταθερά σημεία, έστω $\xi_1 < \xi_2$, επειδή η f είναι φθίνουσα θα είχαμε $\xi_1 = f(\xi_1) \geq f(\xi_2) = \xi_2$, άτοπο.

Έστω τώρα $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίο σημείο. Αν το x_0 δεν είναι σταθερό σημείο της f θα πρέπει $x_0 \neq f(x_0)$. Έστω

$$x_0 < f(x_0) \tag{1}$$

(αν $x_0 > f(x_0)$ η απόδειξη είναι παρόμοια). Θέτουμε $y_0 = f(x_0)$. Τότε η (1) γράφεται $x_0 < y_0$ και άρα επειδή η f είναι φθίνουσα έπεται ότι

$$f(x_0) \geq f(y_0) \Leftrightarrow y_0 \geq f(y_0) \tag{2}$$

Αν το y_0 δεν είναι σταθερό σημείο της f από την (2) παίρνουμε

$$y_0 > f(y_0) \tag{3}$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(x) - x$. Από τις (1) και (3) έχουμε

$$g(y_0) < 0 < g(x_0)$$

Τώρα, αφού η g είναι συνεχής, από Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει $\xi \in (x_0, y_0)$ με $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi$ δηλαδή το ξ είναι σταθερό σημείο της f.

Άσκηση 13. Έστω $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$. Αν $x_0 \in X$ δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(α) Η f είναι συνεχής στο x_0.

(β) Για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β): Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, από Αρχή Μεταφοράς έχουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα στο $f(x_0)$.

(β) $\to$ (α): Υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα. Θα δείξουμε ότι η υπόθεση αυτή συνεπάγεται ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to x_0$, $\lim f(x_n) = f(x_0)$ και συνεπώς από την Αρχή Μεταφοράς η f είναι συνεχής στο x_0.

Πράγματι, έστω (x_n) τυχούσα ακολουθία στο X με $x_n \to x_0$. Σχηματίζουμε την ακολουθία $(\tilde{x}_n)$ θέτοντας

$$\tilde{x}_{2k} = x_k \text{ και } \tilde{x}_{2k-1} = x_0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $\tilde{x}_n \to x_0$. Ππράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Αφού $x_n \to x_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|x_n - x_0| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Ισχυριζόμαστε ότι αν $n \geq 2n_0$ έχουμε $|\tilde{x}_n - x_0| < \epsilon$. Πράγματι έστω $n \geq 2n_0$. Αν $n = 2k - 1$ περιττός τότε $|\tilde{x}_n - x_0| = |x_0 - x_0| = 0 < \epsilon$ ενώ αν $n = 2k$ άρτιος τότε $2k \geq 2n_0 \Rightarrow k \geq n_0 \Rightarrow |\tilde{x}_n - x_0| = |x_k - x_0| < \epsilon$.

Άρα από την υπόθεσή μας θα πρέπει η ακολουθία $(f(\tilde{x}_n))$ να είναι συγκλίνουσα. Επειδή κάθε υπακολουθία της $(f(\tilde{x}_n))$ θα πρέπει να συγκλίνει στο ίδιο όριο, θα πρέπει

$$\lim_n f(\tilde{x}_{2n}) = \lim_n f(\tilde{x}_{2n-1})$$

Από τον ορισμό της $(\tilde{x}_n)$,

$$f(\tilde{x}_{2n}) = f(x_n) \text{ και } f(\tilde{x}_{2n-1}) = f(x_0)$$

Άρα $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$. □

Άσκηση 14. Έστω $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ f_2(x) & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$
Δείξτε ότι ένας πραγματικός αριθμός x_0 είναι σημείο συνέχειας της f αν και μόνο αν $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

Λύση. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Δείχνουμε πρώτα την συνεπαγωγή:

$$x_0 \text{ σημείο συνέχειας της } f \Rightarrow f_1(x_0) = f_2(x_0).$$

Πράγματι, έστω (x_n) ακολουθία ρητών με $x_n \to x_0$ και (x'_n) ακολουθία αρρήτων με $x'_n \to x_0$ (τέτοιες ακολουθίες υπάρχουν απο την πυκνότητα ρητών και αρρήτων στο $\mathbb{R}$). Αφού υποθέτουμε ότι το x_0 είναι σημείο συνέχειας της f, απο την Αρχή Μεταφοράς, θα πρέπει

$$f(x_n) = f_1(x_n) \to f(x_0) \text{ και } f(x'_n) = f_2(x'_n) \to f(x_0). \tag{4}$$

Απο την άλλη μεριά οι f_1, f_2 είναι συνεχείς (θυμηθείτε ότι ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$) και άρα πάλι απο Αρχή Μεταφοράς,

$$f_1(x_n) \to f_1(x_0) \text{ και } f_2(x'_n) \to f_2(x_0). \tag{5}$$

Απο (4) και (5) έπεται ότι $f_1(x_0) = f_2(x_0) = f(x_0)$.

Περνάμε τώρα στην αντίστροφη συνεπαγωγή, δηλαδή έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Θα δείξουμε ότι το x_0 είναι σημείο συνέχειας της f. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι οι f, f_1 και f_2 δίνουν την ίδια τιμή στο x_0, δηλαδή

$$f(x_0) = f_1(x_0) = f_2(x_0) \tag{6}$$

Πράγματι, από τον ορισμό της f, έχουμε ότι $f(x_0) = f_1(x_0) = f_2(x_0)$ αν $x_0 \in \mathbb{Q}$ και ομοίως $f(x_0) = f_2(x_0) = f_1(x_0)$ αν $x_0 \notin \mathbb{Q}$.

Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της συνέχειας: Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta. \tag{7}$$

Έστω λοιπόν ένα $\epsilon > 0$. Θα πρέπει τώρα να βρούμε $\delta > 0$ που να ικανοποιεί την (7). Για να προσδιορίσουμε το δ εργαζόμαστε ως εξής: Αφού η $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής θα υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f_1(x) - f_2(x_0)| < \epsilon \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta_1. \tag{8}$$

Ομοίως αφού η $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής θα υπάρχει $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f_2(x) - f_2(x_0)| < \epsilon \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta_2. \tag{9}$$

Θέτουμε

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει ότι

$$|f_1(x) - f_1(x_0)| < \epsilon \text{ και } |f_2(x) - f_2(x_0)| < \epsilon$$

Ισχυριζόμαστε ότι το δ που ορίσαμε είναι και το ζητούμενο δηλαδή ικανοποιεί την (7). Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$. Αν x ρητός τότε $|f(x) - f(x_0)| = |f_1(x) - f_1(x_0)| < \epsilon$. Ομοίως αν x άρρητος $|f(x) - f(x_0)| = |f_2(x) - f_2(x_0)| < \epsilon$. Άρα $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$. Επομένως η f είναι συνεχής στο x_0.

Άσκηση 15. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που έχει την ιδιότητα των Ενδιάμεσων Τιμών (δηλαδή αν $a < b$ με $f(a) \neq f(b)$ τότε για κάθε y μεταξύ των $f(a), f(b)$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $f(\xi) = y$).

Αν για κάθε $y \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}$ είναι πεπερασμένο δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

Λύση. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$. Από την υπόθεσή μας τα σύνολα

$$F_1 = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) - \epsilon\} \text{ και } F_2 = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + \epsilon\}$$

είναι πεπερασμένα. Θέτουμε

$$F = F_1 \cup F_2$$

και έστω

$$\delta = \min\{|x_0 - x| : x \in F\}$$

Παρατηρείστε ότι $\delta > 0$ ως ελάχιστο ενός πεπεπερασμένου συνόλου γνήσια θετικών αριθμών). Επίσης, αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $x \notin F$ και άρα

$$F \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \emptyset \tag{10}$$

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$$

Πράγματι, έστω ότι υπήρχε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ τέτοιο ώστε $f(x) \notin (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. Τότε από την (10) είτε $f(x) > f(x_0) - \epsilon$ είτε $f(x) < f(x_0) + \epsilon$. Αν $f(x) > f(x_0) + \epsilon$ τότε

$$f(x) > f(x_0) + \epsilon > f(x_0)$$

και αφού η f έχει την ιδιότητα των Ενδιαμέσων τιμών θα υπήρχε ξ μεταξύ των x_0 και x τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(x_0) + \epsilon$. Αλλά τότε $\xi \in F_2 \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ άτοπο από την (10). Ομοίως αν υπήρχε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ με $f(x) < f(x_0) + \epsilon$, από την ιδιότητα των ενδιαμέσων τιμών, θα υπήρχε $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap F_1$ πάλι άτοπο από την (10). Επομένως, $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. Άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

Άσκηση 16. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θα καλείται $2 - 1$ αν παίρνει κάθε τιμή της ακριβώς δύο φορές. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι $2 - 1$.

Λύση. Έστω ότι υπήρχε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και $2-1$. Έστω m μια τιμή της f και έστω $a < b$ τα δύο μοναδικά σημεία του $\mathbb{R}$ με $f(a) = f(b) = m$. Από το Θεώρημα Μέγιστης και ελάχιστης Τιμής η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$. Ισχυριζόμαστε ότι ακριβώς ένα από τα επόμενα συμβαίνει. Είτε

(α) $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$, είτε

(β) $m = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Πράγματι αν η f έπαιρνε στο $[a, b]$ τιμές εκατέρωθεν του m, τότε από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών θα υπήρχε $\xi \in (a, b)$ με $f(\xi) = m$ και άρα η f θα έπαιρνε 3 φορές την τιμή m.

Ας υποθέσουμε ότι $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ (η απόδειξη όταν $m = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ είναι παρόμοια και αφήνεται στον αναγνώστη). Θέτουμε $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Τότε $m < M$ γιατί αλλιώς η f θα ήταν σταθερή στο $[a, b]$ και άρα θα έπαιρνε μια τιμή άπειρες φορές. Έστω $a < c < d < b$ με $f(c) = f(d) = M$. Θέτουμε

$$m' = \min\{f(x) : x \in [c, d]\}$$

και έστω $\zeta \in (c, d)$ με $f(\zeta) = m'$. Έχουμε $m < m' < M$. Άρα για $\eta = \dfrac{m' + M}{2}$ έχουμε ότι

$$m < m' < \eta < M$$

Άρα από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών υπάρχουν $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ με $a < \xi_1 < c < \xi_2 < \zeta < \xi_3 < d$ με $f(\xi_1) = f(\xi_2) = f(\xi_3) = \eta$ άτοπο.