ΣΑΤΜ
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

Άσκηση 1. (α) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ υπάρχει ξ μεταξύ του 0 και του x τέτοιο ώστε

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\sinh \xi}{6} x^3$$

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [-1, 1]$ με $x \neq 0$ ισχύει ότι $\left|\cosh x - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\right| < |x|^3$.

(γ) Υπολογίστε το $\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}$.

Άσκηση 2. Υπολογίστε το $\sin(\arctan 1)$.

Άσκηση 3. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:(i) $\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\, dx$. (ii) $\int \frac{x}{x^2+6x+25}\, dx$.

Άσκηση 4. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:(i) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\, dx$. (ii) $\int \frac{e^x}{e^{3x}+e^{2x}}\, dx$.

Άσκηση 5. Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης $\mathbf{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ όπου $x(t) = \frac{1}{3}t^3$ και $y(t) = \frac{1}{2}t^2$ για κάθε $t \in [0, 1]$.

Άσκηση 6. Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = 1 - \sin^3 t$, $y(t) = \cos^3 t$, για κάθε $t \in [0, \pi/2]$.

Άσκηση 7. Έστω $f : [a, b] \to [c, d]$ γνησίως αύξουσα συνεχής και με συνεχή παράγωγο συνάρτηση. Δείξτε ότι $\int_c^d f^{-1}(x)\, dx = bd - ac - \int_a^b f(x)\, dx$.

Άσκηση 8. Για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ θέτουμε $I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n x\, dx$ (i) Βρείτε τα I_0 και I_1. (ii) Δείξτε ότι $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.

Άσκηση 9. (α) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους έως και δεύτερης τάξης. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)g''(x)\, dx = f(b)g'(b) - f'(b)g(b) - f(a)g'(a) + f'(a)g(a) + \int_a^b f''(x)g(x)\, dx$$

(β) Αν $f(x) = \arctan x$ $g(x) = \cos x$ υπολογίστε με βάση το (α) το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \cos x\, dx$.

Άσκηση 10. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b-a)$. Συμπεράνετε ότι αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε $\int_a^b f(x)\, dx \neq 0$.