ΜΑΘΗΜΑ: «Κβαντική Θεωρία της Ύλης», ΔΜΠΣ-ΜΙΝΑ, ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ 2024-2025
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Λ. ΤΣΕΤΣΕΡΗΣ
1η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Οι ασκήσεις δίνονται για εξάσκηση, δεν ζητείται η παράδοση των λύσεων στον διδάσκοντα.

Πρόβλημα Α.1: Σωματίδιο μάζας *m* βρίσκεται μέσα σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με $V(x)=0\ αν\ x\in[0,a], V(x)=+\infty\ αν\ x\notin[0,a]$. Την χρονική στιγμή *t* = 0 το σωματίδιο περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi(x,0)=N\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[1+\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]$, όπου *N* πραγματική σταθερά. (α) Αν την στιγμή *t* = 0 γίνει μέτρηση της ενέργειας του σωματιδίου, ποιες είναι οι δυνατές τιμές της μέτρησης και οι αντίστοιχες πιθανότητες; (β) Βρείτε την κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$ του σωματιδίου σε χρονική στιγμή *t* > 0. (γ) Βρείτε την μέση τιμή της θέσης ως συνάρτηση του χρόνου. (δ) Έστω ότι έχουμε πολλά τέτοια σωματίδια (N_σ τον αριθμό) μέσα στο παραπάνω πηγάδι δυναμικού. Αν τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και γίνει την χρονική στιγμή *t* > 0 μέτρηση της ενέργειας για ολόκληρο το σύστημα, ποιο θα είναι το αποτέλεσμα; (ε) Τι θα απαντούσατε αν κάποιος σας έδινε ως αρχική κυματοσυνάρτηση την $\psi(x,0)=N\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[1+\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]$ και σας έθετε τα ίδια ερωτήματα με τα παραπάνω;

Πρόβλημα Α.2: (α) Δείξτε ότι ο τελεστής $U_T(a)=e^{iap/\hbar}$ (*p* είναι ο τελεστής της ορμής σε μία διάσταση *x*) είναι ο κβαντομηχανικός τελεστής χωρικής μετατόπισης κατά a, δηλαδή ότι ισχύει $U_T(a)\psi(x)=\psi(x+a)$ για τυχούσα κυματοσυνάρτηση *ψ*(*x*). (β) Ποιες είναι οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του $U_T(a)$; (γ) Καλούμε μοναδιαίο έναν τελεστή *A* αν ο ερμιτιανός συζυγής του *A* (δηλαδή ο $A^\dagger$) είναι ίσος με τον αντίστροφο A^{-1} του *A*. Δείξτε ότι ο $U_T(a)$ είναι μοναδιαίος τελεστής. Ισχύει το ίδιο για τον τελεστή χρονικής εξέλιξης που έχουμε βρει;

Πρόβλημα Α.3: Έστω L_x, L_y, L_z οι συνιστώσες του διανυσματικού τελεστή της στροφορμής $\boldsymbol{L}\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$. **(α)** Βρείτε τους μεταθέτες $[L_x,L_y],[L_y,L_z],[L_z,L_x]$. **(β)** Δείξτε ότι ο τελεστής $L^2\stackrel{\text{def}}{=}L_x^2+L_y^2+L_z^2$ μετατίθεται με όλες τις συνιστώσες L_x, L_y, L_z. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις σχέσεις $[x_i,p_j]=i\hbar\delta_{ij},[x_i,x_j]=[p_i,p_j]=0$ για τις συνιστώσες των τελεστών της θέσης και της ορμής.

Πρόβλημα Α.4: Αν οι *Ω* και *Λ* είναι ερμιτιανοί τελεστές, τι μπορεί να ειπωθεί για την πιθανή ερμιτιανότητα των τελεστών: (i) *ΩΛ*, (ii) $\Omega\Lambda+\Lambda\Omega$, (iii) [*Ω*,*Λ*], και (iv) *i*[*Ω*,*Λ*];

Πρόβλημα Α.5: Δείξτε ότι η μέση τιμή της ορμής για κάθε κυματοσυνάρτηση της μορφής $\Psi(x)=\psi(x)e^{ikx}$, όπου $\psi(x)$ είναι μια πραγματική και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη κυματοσυνάρτηση και k ένας πραγματικός αριθμός, ισούται πάντα – δηλαδή για κάθε $\psi(x)$ – με $\hbar k$.

Πρόβλημα Α.6: Έστω ότι *A* είναι ένας τελεστής που αντιστοιχεί σε κάποιο φυσικό μέγεθος. Έστω ακόμη ότι $f(x)$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση (συνεχής και διαφορίσιμη) σε όλο τον άξονα των *x*. Εάν η $f(x)$ είναι πραγματική συνάρτηση, δείξτε ότι ο τελεστής $f(A)$ είναι ερμιτιανός.

Πρόβλημα Α.7: (α) Βρείτε τις ιδιοσυναρτήσεις και ιδιοενέργειες για το διδιάστατο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με $V(x,y)=0$ αν $x\in[0,L]$ και $y\in[0,L]$, $V(x,y)=+\infty$ για κάθε άλλο *x* και *y*. (β) Υπάρχει εκφυλισμός των ιδιοενεργειών; Δώστε την πολλαπλότητα του εκφυλισμού για την βασική κατάσταση και για τις τρεις πρώτες διεγερμένες ενεργειακές στάθμες.

Πρόβλημα Α.8: Δύο φυσικά μεγέθη *Ω* και *Λ* αναπαρίστανται από τους πίνακες $\Omega=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ και $\Lambda=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&0&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$ σε κάποια βάση. (α) Βρείτε τον μεταθέτη $[\Omega,\Lambda]$. (β) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να δώσει μία μέτρηση του *Ω*; (γ) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να δώσει μία μέτρηση του *Λ*; (δ) Γίνεται μία μέτρηση του *Ω* και αμέσως μετά γίνεται μέτρηση του *Λ*. Ποιες είναι οι πιθανές τιμές της δεύτερης μέτρησης και ποιες οι αντίστοιχες πιθανότητες; Εξετάστε όλα τα ενδεχόμενα.

Πρόβλημα Α.9: Ιδιότητες συνάρτησης δέλτα του Dirac. (α) Δείξτε ότι $\delta(f(x))=\sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x)|}$, όπου x_i είναι τα σημεία μηδενισμού της $f(x)$, δηλαδή Υποθέτουμε ότι $f'(x_i)\equiv\frac{df(x_i)}{dx}\neq 0, \forall x_i$ και ότι η *f*(*x*) είναι συνεχής συνάρτηση παντού. Μπορείτε να δείξετε την σχέση πρώτα για την ειδική περίπτωση που η εξίσωση *f*(*x*) = 0 έχει μόνο δύο λύσεις και μετά να γενικεύσετε. (β) Η συνάρτηση βήματος *θ*(*x*) ορίζεται ως $\theta(x)=0$ αν $x<0, \theta(x)=1$ αν $x\geq 0$. Δείξτε ότι ισχύει $\theta(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(x')dx'$, ή, ισοδύναμα, ότι η παράγωγος της *θ*(*x*) είναι η συνάρτηση δέλτα *δ*(*x*).

Πρόβλημα Α.10: Στο πρόβλημα αυτό μας απασχολεί κίνηση μόνο στο *xy*-επίπεδο. Σε αυτήν την περίπτωση, η στροφορμή ορίζεται από την σχέση $p_\theta \overset{\text{def}}{=} x\,p_y - y\,p_x$.

(α) Βρείτε την έκφραση του τελεστή p_θ στο σύστημα πολικών συντεταγμένων (*r*,*θ*).

(β) Αν $\hat{\theta}$ είναι ο τελεστής της γωνίας, βρείτε τον μεταθέτη $[\hat{\theta}, p_\theta]$ στον χώρο των γωνιών, δηλαδή για κυματοσυναρτήσεις της μορφής *ψ*(*θ*).

(γ) Βρείτε τις κατάλληλα κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις $\psi_m(\theta)$ και ιδιοτιμές του p_θ.

(δ) Δείξτε ότι ο τελεστής $e^{i\delta\theta p_\theta/\hbar}$ είναι ο τελεστής γωνιακής μετατόπισης (δηλαδή περιστροφής) κατά *δθ* γύρω από τον *z*-άξονα.

Πρόβλημα Α.11: Δίνεται ο ερμιτιανός τελεστής $\hat{\sigma}$ για τον οποίο γνωρίζουμε ότι ισχύει $\hat{\sigma}^2=\hat{I}$, όπου $\hat{I}$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής. Έστω ακόμη ότι ο τελεστής $\hat{\sigma}$ έχει μόνο δύο ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$. **(α)** Δείξτε ότι ο τελεστής $\hat{\sigma}$ έχει ιδιοτιμές +1 και -1. Στα επόμενα θα θεωρήσουμε ότι συγκεκριμένα είναι $\hat{\sigma}\psi_1(x)=+\psi_1(x)$ και $\hat{\sigma}\psi_2(x)=-\psi_2(x)$. **(β)** Έστω ότι για ένα σωματίδιο ο τελεστής της Χαμιλτονιανής έχει την μορφή $H=-\lambda\hat{\sigma}$, όπου *λ* πραγματική σταθερά με κατάλληλες φυσικές διαστάσεις. Βρείτε τον τελεστή χρονικής εξέλιξης του σωματιδίου συναρτήσει των τελεστών $\hat{\sigma},\hat{I}$ και της παραμέτρου $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \lambda/\hbar$. Υπόδειξη: Για να βρείτε το αποτέλεσμα σε "κλειστή" μορφή, θα χρειαστεί να ανατρέξετε στους τύπους αναπτύγματος Taylor δύο γνωστών τριγωνομετρικών συναρτήσεων. **(γ)** Έστω ότι την χρονική στιγμή *t* = 0 το σωματίδιο βρίσκεται στην κατάσταση $\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x)+\psi_2(x)).(1)$ Βρείτε την χρονικά εξελιγμένη κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$ με δύο διαφορετικούς τρόπους (επιβεβαιώνοντας ότι οι δύο αυτοί τρόποι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα). **(δ)** Ορίζουμε τον τελεστή $\hat{P}$ ως αυτόν που εναλλάσσει τις $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$, δηλαδή είναι $\hat{P}\psi_1(x)=\psi_2(x)$ και $\hat{P}\psi_2(x)=\psi_1(x)$. Ο τελεστής $\hat{P}$ υποτίθεται ότι είναι γραμμικός (και ερμιτιανός). Ποιες είναι οι ιδιοσυναρτήσεις και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του τελεστή $\hat{P}$; Μετατίθεται ο $\hat{P}$ με τον τελεστή $\hat{\sigma}$; **(ε)** Έστω ότι την στιγμή *t* γίνεται μέτρηση του μεγέθους $\hat{P}$ ενώ το σύστημα είναι στην χρονικά εξελιγμένη κατάσταση $\psi(x,t)$ που έχουμε βρει στο ερώτημα (γ). Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της μέτρησης και ποιες οι αντίστοιχες πιθανότητες; Αν αντί για το μέγεθος $\hat{P}$ μετρήσουμε το μέγεθος $\hat{\sigma}$ (ή την ενέργεια για την παραπάνω Χαμιλτονιανή), πως αλλάζουν οι απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα σχετικά με τις δυνατές τιμές της μέτρησης και τις αντίστοιχες πιθανότητες;

Πρόβλημα Α.12: Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου έχει σε μια ορισμένη στιγμή τη μορφή $\Psi=(\psi_1+\psi_2)/\sqrt{2}$, όπου ψ_1 και ψ_2 κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας με ιδιοτιμές E_1 και E_2, αντίστοιχα. **(α)** Υπολογίστε τη μέση ενέργεια και την αβεβαιότητα της ενέργειας στην κατάσταση *Ψ*. **(β)** Υποθέτοντας ότι η ψ_1 (ψ_2) είναι μια άρτια (περιττή) πραγματική συνάρτηση, υπολογίστε τη μέση θέση του σωματιδίου ύστερα από χρόνο *t*.

Πρόβλημα Α.13: **(α)** Έστω $|a\rangle$ και $|b\rangle$ δύο κανονικοποιημένες καταστάσεις στον ίδιο διανυσματικό χώρο Hilbert. Αν $X \stackrel{\text{def}}{=} |b\rangle\langle a|$, βρείτε τους τελεστές $X^\dagger, X^\dagger X$ και $XX^\dagger$. **(β)** Έστω $\{|a_i\rangle\}$ και $\{|b_i\rangle\}, i=1,2,\ldots,n$ δύο πλήρεις και ορθοκανονικές βάσεις του ίδιου χώρου Hilbert (με διάσταση *n*). Δείξτε ότι υπάρχει τελεστής U τέτοιος ώστε να ισχύει $|b_i\rangle=U|a_i\rangle\,\forall i$. Δείξτε επιπλέον ότι αυτός ο τελεστής U είναι μοναδιαίος (unitary).

Πρόβλημα Α.14: Σωματίδιο μάζας *m* κινείται στον *x*-άξονα και σε δυναμικό $V(x)=-g\delta(x)$, όπου $g>0$ πραγματική σταθερά με κατάλληλες φυσικές διαστάσεις.

(α) Δείξτε ότι η πρώτη παράγωγος της κυματοσυνάρτησης $\psi(x)$ που ικανοποιεί την σχετική εξίσωση Schroedinger εμφανίζει ασυνέχεια $-g\psi(0)$ στο σημείο $x=0$.

(β) Βρείτε τις ιδιοενέργειες και τις ιδιοσυναρτήσεις για τις δέσμιες καταστάσεις (αν υπάρχουν).

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα να ανακλαστεί το σωματίδιο από το δυναμικό αν κινείται αρχικά από τα αριστερά προς τα δεξιά με ενέργεια $E>0$; Σημείωση: οι συντελεστές ανάκλασης R και διέλευσης T ορίζονται ως $R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|j_{\text{ανακλώμενο}}|}{|j_{\text{προσπίπτον}}|}$ και $T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|j_{\text{διερχόμενο}}|}{|j_{\text{προσπίπτον}}|}$ με βάση τα αντίστοιχα ρεύματα πυκνότητας πιθανότητας.