ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκηση 1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)=1$, τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε: για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ισχύει $f(x)>\frac{4}{5}$.

(β) Η $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι συνεχής.

(γ) Υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $0,1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(δ) Υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(ε) Υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(στ) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο ξ, τότε είναι συνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(ζ) Αν η f είναι συνεχής στο (a,b) και $f(q)=0$ για κάθε ρητό $q\in(a,b)$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in(a,b)$.

Ασκηση 2. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x)\in\mathbb{Q}$ για κάθε $x\in[0,1]$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Ασκηση 3. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής σε κάθε σημείο του $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x\in[a,b]$ υπάρχει $y\in[a,b]$ ώστε $|f(y)|\leq\frac{1}{2}|f(x)|$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0\in[a,b]$ ώστε $f(x_0)=0$.

Ασκηση 4. (α) Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\max(f)<\max(g)$.

(β) Έστω $f,g:[a,b]\to[c,d]$ συνεχείς συναρτήσεις με $\max(f)=\max(g)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

Ασκηση 5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο: υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x_0 για τον οποίο

$$f(x_0)=x_0.$$

Ασκηση 6. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

Αποδείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή: υπάρχει $y\in\mathbb{R}$ ώστε $f(y)\geq f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ασκηση 7. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $|f(x)-f(y)|\geq|x-y|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι επί.