ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k k!}{k^k}\,, \qquad (\beta)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\,, \qquad (\gamma)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}\,, \qquad (\delta)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}\,.$$

Υπόδειξη: (α) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Έχουμε ότι

$$\frac{\frac{2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{2^k k!}{(k)^k}} = 2\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \to 2/e < 1,$$

και άρα η σειρά συγκλίνει.

(β) Αφού η ακολουθία $\frac{1}{2k+1}$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο 0, η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο για εναλλάσσουσες σειρές (κριτήριο Leibniz).

(γ) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο συμπύκνωσης (η ακολουθία $\frac{1}{k\ln k}$ έχει θετικούς όρους και είναι φθίνουσα). Έχουμε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\cdot\frac{1}{2^k\ln(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln 2)k}$$

αποκλίνει (αρμονική σειρά), άρα και η σειρά $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$ αποκλίνει.

(δ) Έχουμε ότι

$$\frac{\frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}}{\frac{1}{k}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \to e > 0,$$

και άρα, από το κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς (η σύγκριση γίνεται με την αρμονική σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k$), η σειρά αποκλίνει. □

Ασκηση 2. Να προσδιορίσετε τα $x\in\mathbb{R}$, για τα οποία συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

και

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Στη συνέχεια, γι' αυτά τα x, να βρείτε τα αθροίσματα των σειρών.

Υπόδειξη: Πρόκειται για γεωμετρικές σειρές με λόγο $-x^2$ και $-x$ αντίστοιχα. Συνεπώς συγκλίνουν για $|x|<1$ με

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \text{ και } \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

□

Ασκηση 3. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών.

(α) Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2+k^2 a_k}$$

συγκλίνει.

(β) Αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει, να δείξετε ότι και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2+a_k}$$

αποκλίνει επίσης.

Υπόδειξη: (α) Έχουμε ότι

$$0 \leq \frac{a_k}{2+k^2 a_k} \leq \frac{a_k}{k^2 a_k} = \frac{1}{k^2}\,,$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και συνεπώς από το κριτήριο σύγκρισης, για σειρές με θετικούς όρους, έχουμε το συμπέρασμα.
(β) Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- η ακολουθία (a_k) είναι άνω φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $a_k \leq M$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\frac{a_k}{2+a_k} \geq \frac{a_k}{2+M}\,,$$

  για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και συνεπώς από το κριτήριο σύγκρισης, για σειρές με θετικούς όρους, έχουμε το συμπέρασμα.

- η ακολουθία (a_k) δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{s_k}) της (a_k) με

$$\lim_{k\to\infty} a_{s_k} = +\infty\,.$$

  Επομένως,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{s_k}}{2+a_{s_k}} = 1,$$

  και άρα από το κριτήριο απόκλισης η δοσμένη σειρά αποκλίνει.

□

Ασκηση 4. (Εκτίμηση σφάλματος για εναλλάσσουσες σειρές)

(i) Έστω (a_n) μηδενική και φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν υποθέσουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = S,$$

να δείξετε ότι

$$|S - s_n| \leq a_{n+1}\,,\ \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,,$$

όπου (s_n) η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της παραπάνω εναλλάσσουσας σειράς.

(ii) Να προσδιορίσετε το άθροισμα S της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

Υπόδειξη: (i) Παρατηρούμε ότι η (s_{2k}) είναι αύξουσα και η (s_{2k+1}) είναι φθίνουσα. Επίσης, $s_{2k} \to S$ και $s_{2k+1} \to S$. Έπεται ότι:

- αν n άρτιος, τότε $S \leq s_{n+1}$ και άρα
$$S - s_n \leq s_{n+1} - s_n = a_{n+1}\,.$$

- αν n περιττός, τότε $S \geq s_{n+1}$ και άρα
$$-(S - s_n) \leq -(s_{n+1} - s_n) = a_{n+1}\,.$$

Οπότε,
$$|S - s_n| \leq a_{n+1}\,, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

(ii) Αφού θέλουμε ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων, θα πρέπει το σφάλμα να είναι μικρότερο από $\frac{1}{1000}$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την εκτίμηση από το (i) θα πρέπει να επιλέξουμε τον n έτσι ώστε
$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}\,.$$
Με δοκιμές βρίσκουμε ότι αρκεί να θεωρήσουμε $n \geq 6$: σύμφωνα με το (i),
$$|S - s_6| \leq a_7 = \frac{1}{7!} < \frac{1}{1000}\,.$$
Αρα το $s_6 = 0,631944\ldots$ συμπίπτει σε τουλάχιστον τρία δεκαδικά ψηφία με το άθροισμα S της σειράς και επομένως έχουμε ότι $S = 0,631$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. □

Ασκηση 5. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_k) ως εξής: αν ο k είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k}$ και αν ο k δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k^2}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Υπόδειξη: Η σειρά έχει θετικούς όρους. Για να δείξουμε ότι συγκλίνει, αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε
$$\begin{aligned} s_{m^2} = \sum_{k=1}^{m^2} a_k &= \sum_{k=1}^{m} a_{k^2} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq m^2 \\ k \neq s^2}} a_k \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{m^2} \frac{1}{k^2} \\ &\leq 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = M < +\infty. \end{aligned}$$
Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε $s_n \leq s_{n^2} \leq M$. Δηλαδή, η (s_n) είναι άνω φραγμένη. □

Ασκηση 6. (α) Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$. Αποδείξτε ότι $r_n \to 0$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$ και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

(β) Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Αποδείξτε ότι $s_n \to +\infty$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: (α) Θέτουμε $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ και $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και παρατηρούμε ότι $r_n = s - s_n \to s - s = 0$. Τώρα, γράφουμε

$$\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}} = \frac{r_n - r_{n+1}}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} = \frac{a_n}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} \geq \frac{a_n}{2\sqrt{r_n}}.$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}} \leq 2\left(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \sqrt{r_2} - \sqrt{r_3} + \cdots + \sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right) \leq 2\sqrt{r_1}.$$

Έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

(β) Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ έχει θετικούς όρους και αποκλίνει, η ακολουθία (s_n) είναι αύξουσα και δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, το οποίο συνεπάγεται ότι $s_n \to +\infty$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{a_n}{s_n^2} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n^2} \leq \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}} = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}.$$

Αν t_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$, τότε

$$t_n = \frac{a_1}{s_1^2} + \frac{a_2}{s_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_1} + \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}\right) \leq \frac{2}{s_1}.$$

Η (t_n) είναι άνω φραγμένη, άρα η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει. □

Ασκηση 7. (α) Έστω (a_k) και (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

(β) Έστω $a_k > 0$ και $b_k > 0$. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει και ότι $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$ για κάθε $k \geq 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: (α) Η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, άρα $b_k \to 0$. Έπεται ότι η (b_k) είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|b_k| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τώρα, παρατηρούμε ότι

$$|a_k b_k| \leq M|a_k|$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Δηλαδή, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει και μάλιστα απολύτως.

(β) Από την υπόθεση βλέπουμε ότι $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \leq \frac{a_k}{b_k}$ για κάθε $k \geq 1$. Δηλαδή, η ακολουθία $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$ είναι φθίνουσα, και αφού έχουμε επίσης $\frac{a_k}{b_k} > 0$, υπάρχει το $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \geq 0$. Από την υπόθεση έχουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, άρα και η η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης. □