# ΣΕΜΦΕ
## Μαθηματική Ανάλυση Ι
## ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5

**Άσκηση 1.** Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $(f(x))^2 = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Άσκηση 2.** Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $(f(x))^2 = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Άσκηση 3.** Εξετάστε αν ισχύουν ή όχι οι παρακάτω προτάσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής μη σταθερή. Τότε η $f$ λαμβάνει άπειρες ρητές και άπειρες άρρητες τιμές.

(β) Υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(γ) Υπάρχει $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε το $f([a, b])$ να είναι ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$.

**Άσκηση 4.** (α) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(q) = g(q)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(q) = 0$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $f = 0$.

**Άσκηση 5.** (α) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(q) \geq g(q)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(q) \geq 0$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $f \geq 0$

**Άσκηση 6.** (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: Υπάρχει $\theta > 0$ σταθερό τέτοιο ώστε σε κάθε ανοικτό διάστημα $I$ του $\mathbb{R}$ υπάρχουν $x, y \in I$ με $|f(x) - f(y)| \geq \theta$. Δείξτε ότι η $f$ δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας.

(β) Έστω $a \neq b$ στο $\mathbb{R}$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = a$ αν $x$ ρητός και $f(x) = b$ αν $x$ άρρητος. Δείξτε ότι η $f$ είναι παντού ασυνεχής.

**Άσκηση 7.** Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -x, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

είναι συνεχής μόνο στο $x = 0$.

**Άσκηση 8.** Έστω $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

είναι ασυνεχής στα σημεία του $A \cup \{0\}$ και συνεχής παντού αλλού.

**Άσκηση 9.** Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq \theta$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αντίστοιχα, αν $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq -\theta$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Αν $|f(x)| \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε ακριβώς ένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα συμβαίνει: Είτε 1) $f(x) \geq \theta$ για κάθε $x \in [a, b]$, ή (2) $f(x) \leq -\theta$ για κάθε $x \in [a, b]$.

**Άσκηση 10.** Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και ότι $f(x_0) > g(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in [a, b]$. (α) Δείξτε ότι $f(x) > g(x)$ για όλα τα $x \in [a, b]$. (β) Δείξτε ότι ειδικότερα υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq g(x) + \theta$, για όλα τα $x \in [a, b]$.

**Άσκηση 11.** Έστω $f : [a, b] \to [a, b]$ συνεχής και αύξουσα συνάρτηση. Έστω $x_0 \in [a, b]$ και έστω ότι $x_0 < f(x_0)$. Θέτουμε $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... και γενικά $x_n = f(x_{n-1})$, για κάθε $n \geq 1$. Δείξτε τα εξής.

(i) Η ακολουθία $(x_n)$ συγκλίνει σε ένα σημείο $\xi_0 \in [a, b]$.

(ii) Το $\xi_0$ είναι σταθερό σημείο της $f$ δηλαδή $f(\xi_0) = \xi_0$.

**Άσκηση 12.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η $f$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

**Άσκηση 13.** Έστω $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$. Αν $x_0 \in X$ δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(α) Η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$.

(β) Για κάθε ακολουθία $(x_n)$ στο $X$ με $x_n \to x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα.

**Άσκηση 14.** *(Γενίκευση της Άσκησης* (7)*)* Έστω $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ f_2(x) & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Δείξτε ότι ένας πραγματικός αριθμός $x_0$ είναι σημείο συνέχειας της $f$ αν και μόνο αν $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

**Άσκηση 15.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που έχει την ιδιότητα των Ενδιάμεσων Τιμών (δηλαδή αν $a < b$ με $f(a) \neq f(b)$ τότε για κάθε $y$ μεταξύ των $f(a), f(b)$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $f(\xi) = y$).

Αν για κάθε $y \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}$ είναι πεπερασμένο δείξτε ότι η $f$ είναι συνεχής.

**Άσκηση 16.** Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θα καλείται $2-1$ αν παίρνει κάθε τιμή της ακριβώς δύο φορές. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι $2-1$.