Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση
Μια Εισαγωγή

Νίκος Λαμπρόπουλος

14 Νοεμβρίου 2024

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Χώροι Hilbert

Στα προηγούμενα κεφάλαια, έχουμε αναφερθεί σε τοπολογικούς χώρους, σε μετρικούς χώρους και σε L^p χώρους και έχουμε ασχοληθεί με κάποιους από αυτούς τους χώρους επιδερμικά και με άλλους βαθύτερα, ανάλογα με το πόσο εμπίπτει στα ενδιαφέροντά μας ο κάθε ένας από αυτούς τους χώρους. Υπενθυμίζουμε ότι οι χώροι Banach είναι πλήρεις μετρικοί χώροι, δηλαδή μετρικοί χώροι όπου κάθε Cauchy ακολουθία τους συγκλίνει. Υπενθυμίζουμε, επίσης, ότι η έννοια του στοιχείου ένος αφηρημένου διανυσματικού χώρου γενικεύει την έννοια του διανύσματος του Ευκλειδείου χώρου και ότι η norm γενικεύει την έννοια του μήκους του. Ωστόσο, αυτό που λείπει από ένα γενικό χώρο με norm είναι ένα εσωρικό γινόμενο που να γενικεύει την έννοια του εσωτερικού γινομένου στον Ευκλείδειο χώρο. Και τούτο γιατί αφενός μεν θα μας δώσει τη δυνατότητα να ορίσουμε μέσω αυτού τη norm αφετέρου θα μας δώσει μιά συνθήκη ορθογωνιότητας που είναι ιδαίτερα σημαντική σε πολλές εφαρμογές. Επομένως, η ερώτηση που τίθεται είναι: Πότε το εσωτερικό γινόμενο και η ορθογωνιότητα μπορούν να γενικευτούν σε τυχόντες γραμμικούς χώρους; Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τους χώρους όπου η norm που προέρχεται από ένα εσωτερικό γινόμενο οι οποίοι λέγονται χώροι με εσωτερικό γινόμενο (ή προ-Hilbert χώροι) και στη συνέχεια με τους χώρους Hilbert που είναι πλήρεις προ-Hilbert χώροι, δηλαδή είναι χώροι Banach. Οι χώροι με εσωτερικό γινόμενο είναι χώροι με norm αποτελούν γενίκευση των Ευκλείδειων χώρων και παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η θεωρία τους είναι η πλουσιότερη από όλες τις θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί σε αφηρημένους χώρους και διατηρεί πολλά χαρακτηριστικά των Ευκλείδειων χώρων, μεταξύ των οποίων εξέχουσα θέση έχει η ορθογωνιότητα. Επανερχόμενοι στους χώρους Hilbert, σημειώνουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο αποπτελεί ένα επιπλέον χαρακτηριστικό σε σύγκριση με τους υπόλοιπους αφηρημένους χώρους Banach, γεγονός που τους καθιστά ακόμα πιο ξεχωριστούς και ιδιαίτερα ενδιαφέροντες. Ωστόσο, ο κυριότερος ίσως λόγος γιά τον οποίο ένας χώρος Hilbert παίζει εξέχοντα ρόλο είναι η ύπαρξη μιάς φυσικής ατιστοιχίας μεταξύ αυτού και του δυϊκού του H^*. Στο κεφάλαιο αυτό, όπως και σε ολόκληρο το βιβλίο, οι βασικές έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης θεωρούνται γνωστές, έχουμε δε ασχοληθεί σε προηγούμενα κεφάλαια με όλους τους χώρους που είναι χρήσιμοι προκειμένου να μελετήσουμε τους χώρους Hilbert. Ωστόσο, πρίν ασχοληθούμε με τους χώρους Hilbert θα κάνουμε μια περιήγηση στους προ-Hilbert χώρους. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το εσωτερικό γινόμενο για να εισαγάγουμε την έννοια της ορθογωνικότητας σε ένα χώρο Hilbert καθώς η γεωμετρία των χώρων Hilbert συμφωνεί σχεδόν πλήρως με τη διαισθητική προσέγγιση των χώρων με πεπερασμένη διάσταση. Αντίθετα, η γεωμετρία των χώρων Banach με άπειρη διάσταση, που δεν είναι χώροι Hilbert, είναι ιδιαίτερα περίπλοκη και αρκετά διαφορετική από μια αφελή ίσως γενίκευση της περίπτωσης των χώρων πεπερασμένης διάστασης.

1.1 Χώροι με Εσωτερικό Γινόμενο

Θα δώσουμε τώρα τις βασικές έννοιες που αφορούν τους προ-Hilbert χώρους και στη συνέχεια θα μελετήσουμε τους χώρους Hilbert, που, όπως αναφέραμε παραπάνω, δεν είναι τίποτα άλλο παρά πλήρεις προ-Hilbert χώροι.
Ένα εσωτερικό γινόμενο δίνει την έννοια της γωνίας δύο <διανυσμάτων> καθώς και της ορθογωνιότητας με τον ίδιο τρόπο όπως το εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = |x||y| \cos\theta$ δύο διανυσμάτων x, y του Ευκλείδειου χώρου δίνει τη γωνία θ των x και y. Υπάρχουν πολλοί τρόποι να ορισθεί ένα εσωτερικό γινόμενο ανάλογα με τις εφαμογές, ωστόσο θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας σε κάποια βασκά εσωτερικά γινόμενα και σε κάποια γενικά αποτελέσματα που ισχύουν και για όλα τα εσωτερικά γινόμενα.

Σημείωση 1.1.1. Στο εξής τις περισσότερες φορές θα αναφερόμαστε σε μιγαδικούς χώρους με εσωτερικό γινόμενο και σε χώρους Hilbert γιατί αυτή η θεώρηση κάνει πιό άνετη και πλήρη την μελέτη τους καθώς και εκείνη των γραμμικών τελεστών. Στην περίπτωση που έχουμε πραγματικούς χώρους με εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να προσαρμόζουμε τους ορισμούς αντικαθιστώντας το συζυγή $\bar{z}$ ενός μιγαδικού (όπου εμφανίζεται) με τον ίδιο το μιγαδικό z.

Ορισμός 1.1.1. Ένας μιγαδικός χώρος X λέγεται **χώρος με εσωτερικό γινόμενο** ή **προ-Hilbert** χώρος τότε και μόνο τότε όταν έχει ορισθεί μια μιγαδική συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$\langle x, y \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες.
Για κάθε $x_1, x_2, y \in X$ και για όλα τα βαθμωτό a, b έχουμε:

(i) $\langle ax_1 + bx_2, y \rangle = a\langle x_1, y \rangle + b\langle x_2, y \rangle$

(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$,

(iv) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ο μιγαδικός $\overline{\langle y, x \rangle}$ είναι ο συζυγής του $\langle y, x \rangle$ και ισχύει

$$\langle x, ay_1 + by_2 \rangle = \bar{a}\langle x, y_1 \rangle + \bar{b}\langle x, y_2 \rangle.$$

Αν ο X είναι ένας πραγματικός χώρος, τότε $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
Ένα εσωτερικό γινόμενο στον X ορίζει μια norm στον X (βλ. Ορισμός 1.1.3 και Πρόταση 1.1.3) που δίδεται από τη σχέση

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

και μια μετρική στον στον X (βλ. Παρατήρηση 1.1.2) που δίδεται από τη σχέση

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Επομένως:
Οι χώροι με εσωτερικό γινόμενο είναι χώροι με norm. $\square$

Σημείωση 1.1.2. Η ονομασία προ-Hilbert οφείλεται στο ότι από ένα τέτοιο χώρο μπορούμε να μεταβούμε σε ένα χώρο Hilbert με τη διαδικασία της πλήρωσης. Υπενθυμίζουμε ότι με αυτή τη διαδικασία δημιουργούμε ένα πλήρη χώρο από ένα μη πλήρη "προσθέτοντας" κατά κάποια έννοια τα όρια όλων των συγκλινουσών ακολουθιών του τα οποία δεν ήταν στοιχεία του αρχικού μη πλήρους μετρικού χώρου.

Ορισμός 1.1.2. Ένας **υπόχωρος** W ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ορίζεται ως ο διανυσματικός υπόχωρος του X με εσωτερικό γινόμενο τον περιορισμό του $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στο $W \times W$. $\square$

Παράδειγμα 1.1.1. Η συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2, \;\; \forall\, x = (x_1, x_2),\, y = (y_1, y_2) \;\in\; \mathbb{R}^2,$$

είναι το γνωστό εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$.

Γενικότερα:
Η συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, όπου

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \;\; \forall\, x = (x_1, \cdots, x_n),\, y = (y_1, \cdots, y_n) \;\in\; \mathbb{R}^n,$$

είναι εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$.
Από αυτό το εσωτερικό γινόμενο προκύπτει η αντίστοιχη norm

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

και από αυτή η Ευκλείδεια μετρική που ορίζεται από τη σχέση

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Το εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε παραπάνω για $n = 2$ και $n = 3$ είναι το γνωστό μας εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$ είτε στον $\mathbb{R}^3$, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1.1.2. Η συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, όπου

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i, \; \forall\, x = (x_1, \cdots, x_n),\, y = (y_1, \cdots, y_n) \;\in\; \mathbb{C}^n,$$

είναι εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$.

Παράδειγμα 1.1.3. Η συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$, όπου

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n, \; \forall\, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\, y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \;\in\; \ell^2,$$

είναι εσωτερικό γινόμενο στον ℓ^2.

Αν ο χώρος είναι πραγματικός τότε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \; \forall\, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\, y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \;\in\; \ell^2,$$

Από την ανισότητα του Hölder έχουμε

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n)\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right)^{1/2},$$

οπότε η συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι καλά ορισμένη στον $\ell^2 \times \ell^2$.

Παράδειγμα 1.1.4. Η συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$, όπου $X = C[a, b]$ και

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt, \ \forall \, f, g \in \, C[a, b]$$

Όμοια:
Η συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$, όπου $X = C[a, b]$ και

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt, \ \forall \, f, g \in \, C[a, b]$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον X.
Πάλι, από την ανισότητα του Hölder προκύπτει ότι

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2},$$

οπότε, η συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι καλά ορισμένη στον $C[a, b] \times C[a, b]$.

Παράδειγμα 1.1.5. Η συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ και

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \ \forall \, f, g \in \, L^2(\Omega)$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\Omega)$.

Πρόταση 1.1.1. Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\langle x_1 \pm x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle \pm \langle x_2, y \rangle$,

(ii) $\langle x, y_1 \pm y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle \pm \langle x, y_2 \rangle$,

(iii) $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$,

(iv) $\langle 0, y \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$,

(v) $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle \ \forall z \in X \ \Rightarrow x = y$.

Απόδειξη.

(i) Προκύπτει από τον Ορισμό 1.1.1(i) για $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ και για $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$, αντίστοιχα.

(ii) Είναι

$$\begin{aligned} \langle x, y_1 \pm y_2\rangle &= \overline{\langle y_1 \pm y_2, x\rangle} \stackrel{(i)}{=} \overline{\langle y_1, x\rangle \pm \langle y_2, x\rangle} = \overline{\langle y_1, x\rangle} \pm \overline{\langle y_2, x\rangle} \\ &= \langle x, y_1\rangle \pm \langle x, y_2\rangle. \end{aligned}$$

(iii) Είναι

$$\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y, x\rangle} = \overline{\lambda\langle y, x\rangle} = \overline{\lambda}\,\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle.$$

(iv) Είναι

$$\langle 0, y\rangle = \langle 0 + 0, y\rangle = \langle 0, y\rangle + \langle 0, y\rangle,$$

οπότε $\langle 0, y\rangle = 0$.
Όμοια και $\langle x, 0\rangle = 0$.

(iv) Έστω ότι $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$, γιά κάθε $z \in X$. Τότε θα είναι

$$\langle x - y, z\rangle = \langle x, z\rangle - \langle y, z\rangle = 0,$$

οπότε από την (iv) προκύπτει ότι $x - y = 0$, από όπου $x = y$.

$\square$

Ορισμός 1.1.3. Έστω X ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ που ορίζεται από τη σχέση $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ ορίζει μια norm στον X (βλ. Πρόταση 1.1.3). $\square$

Παρατήρηση 1.1.1. Αν σε ένα γραμμικό χώρο X με εσωτερικό γινόμενο ορίσουμε μια norm σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.3 τότε ο χώρος γίνεται διανυσματικός χώρος με norm και λέμε ότι **η norm παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο**. Ωστόσο, υπάρχουν norms που δεν παράγονται από κάποιο εσωτερικό γινόμενο. Αποδεικνύεται ότι οι norms για τις οποίες δεν ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου δεν παράγονται από εσωτερικό γινόμενο (βλ. Θεώρημα 1.1.1).

Επομένως:

Δεν είναι όλοι οι χώροι με norm χώροι με εσωτερικό γινόμενο.

Στην Πρόταση 1.1.3 παρακάτω αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|$ που ορίστηκε από το εσωτερικό γινόμενο (βλ. Ορισμός 1.1.2) είναι όντως μια norm. Θα χρειαστεί να αποδείξουμε πρώτα την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.1.2. **(Ανισότητα Cauchy-Schwarz)** Έστω ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(X, \langle,\rangle)$. Τότε

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \ \forall\, x, y \in X,$$

όπου η ισότητα ισχύει όταν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.
Απόδειξη. Η ανισότητα $\|x + ay\|^2 \geq 0$, όπου x, y είναι δύο τυχόντα στοιχεία του X και $a \in \mathbb{C}$, γράφεται ισοδύναμα

$$\|x + ay\|^2 = \|x\|^2 + \overline{a}\langle x, y\rangle + a\langle y, x\rangle + |a|^2\|y\|^2 \geq 0,$$

και γιά $a = -\langle x, y\rangle/\|y\|^2$ προκύπτει η ανισότητα

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x + ay\|^2 &= \|x\|^2 - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}\langle y, x\rangle + \left(\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|^2}\right)^2\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}\overline{\langle x, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \\ &= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}, \end{aligned}$$

οπότε

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2.$$

Αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε $x = ky,\ k \in \mathbb{C}$, η τελευταία ισχύει ως ισότητα.
Αντίστροφα, αν $|\langle x, y\rangle| = \pm\|x\|\|y\|$ και $y \neq 0$, τότε η τελευταία ανισότητα συνεπάγεται ότι τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα. □

Πρόταση 1.1.3. Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ έχει τις ιδιότητες:

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}, x \in X$.

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, για κάθε $x, y \in X$ (*Τριγωνική ανισότητα*).

Απόδειξη. (i) Προκύπτει άμεσα από τους Ορισμούς 1.1.1 και 1.1.3.
(ii) Από τον Ορισμό 1.1.1, την Πρόταση 1.1.1 και τον Ορισμό 1.1.3 έχουμε:

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}(x, x) = |\lambda|^2\|x\|^2.$$

(iii) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Cauchy-Schwarz παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|x\|\|y\| + \|y\|\|x\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 1.1.2. Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι σε ένα χώρο X με εσωτερικό γινόμενο η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$, με $d(x, y) = \|x - y\|$ γιά κάθε $x, y \in X$, είναι μια μετρική.

Παράδειγμα 1.1.6. Οι norms που παράγονται από τα εσωτερικά γινόμενα στους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$ των Παραδειγμάτων 1.1.1 και 1.1.2 είναι οι $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ και $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i}\right)^{1/2}$, αντίστοιχα, και είναι οι συνήθεις norms αυτών των χώρων.

Παράδειγμα 1.1.7. Η norm που παράγεται από το εσωτερικο γινόμενο στον διανυσματικό χώρο ℓ^2 του Παραδείγματος 1.4.3 είναι η $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ ή η $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i}\right)^{1/2}$ και είναι η συνήθης norm αυτού του χώρου.

Παράδειγμα 1.1.8. Η norm που παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $C[a, b]$ του Παραδείγματος 1.1.4 είναι η $\|x\| = \left(\int_a^b x^2(t)dx\right)^{1/2}$ ή η $\|x\| = \left(\int_a^b x(t)\overline{x(t)}dt\right)^{1/2}$, αντίστοιχα, ανάλογα με το αν η συνάρτηση x παίρνει πραγματικές ή μιγαδικές τιμές, και είναι η συνήθης norm αυτού του χώρου.

Παράδειγμα 1.1.9. Η norm που παράγεται από το εσωτερικο γινόμενο στον διανυσματικό χώρο $L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ του Παραδείγματος 1.1.5 είναι η $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega f^2(x)dx\right)^{1/2}$ και είναι η συνήθης norm αυτού του χώρου.

Πρόταση 1.1.4. Έστω $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

(i) Αν ο X είναι πραγματικός, τότε

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

(ii) Αν ο X είναι μιγαδικός, τότε

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2\right).$$

Απόδειξη.
(i) Είναι

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle - \|y\|^2 = 4\langle x,y\rangle.$$

(ii) Έστω

$$A = \|x+y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\,\|x-iy\|^2.$$

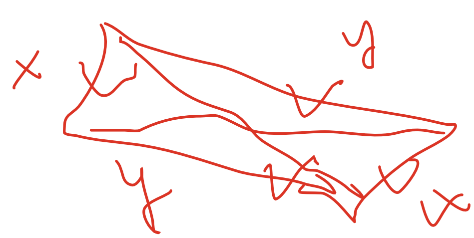
Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}
A &= \langle x+y, x+y\rangle + i\langle x+iy, x+iy\rangle - \langle x-y, x-y\rangle - i\langle x-iy, x-iy\rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 + i\,\|x\|^2 \\
&\quad +i\langle x,iy\rangle + i\langle iy,x\rangle + i\,\|y\|^2 - \|x\|^2 \\
&\quad +\langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle - \|y\|^2 - i\,\|x\|^2 \\
&\quad -i\langle -iy,x\rangle - i\langle x,-iy\rangle - i\,\|y\|^2\, 2\langle x,y\rangle \\
&= +2\langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle - \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle \\
&= 4\langle x,y\rangle.
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 1.1.1. (**Κανόνας του παραλληλογράμμου**) Ένας χώρος X με norm είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν η norm ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2.$$



Απόδειξη. Έστω ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι πραγματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ στον X που παράγει τη δοθείσα norm, οπότε θα είναι $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\ \|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \|y\|^2, \end{aligned}$$

οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει η ζητούμενη σχέση.
Πρέπει να αποδείξουμε και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν η norm ικανοποιεί την ανισότητα του παραλληλογράμμου τότε η norm αυτή παράγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον X.
Απόδειξη. (Άσκηση). □

Παρατήρηση 1.1.3. Το Θεώρημα 1.1.1 αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος της Ευκλείδειας γεωμετρίας το οποίο επίσης ονομάζεται <κανόνας του παραλληλογράμμου> και μας λέει ότι:

Το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων και των τεσσάρων πλευρών του.

Παράδειγμα 1.1.10. Η norm $\|x\| = |x_1| + |x_2|$, όπου $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ δεν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμου (αποδείξτε το) και επομένως δεν παράγεται από κάποιο εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα 1.1.11. Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $C[0,1]$ εφοδιασμένο με τη norm $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Η $\|\cdot\|_1$ δεν παράγεται από κάποιο εσωτερικό γινόμενο.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η norm $\|\cdot\|_1$ δεν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμου. Έστω $f(x) = 1$ και $g(x) = 2x$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_0^1 1dx = 1, & \|g\|_1 = \int_0^1 |2x|dx = 1, \\ \|f+g\|_1 &= \int_0^1 |1+2x|dx = 2, & \|f-g\|_1 = \int_0^1 |1-2x|dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\|f+g\|_1^2 + \|f-g\|_1^2 = \frac{17}{4} \neq 2(\|f\|_1^2 + \|g\|_1^2).$$

Παράδειγμα 1.1.12. Θεωρούμε το γραμμικό χώρο $C[0,1]$ εφοδιασμένο με τη norm $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Η $\|\cdot\|$ δεν παράγεται από κάποιο εσωτερικό γινόμενο.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για τη norm $\|\cdot\|$ δεν ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου.
Έστω $f(x) = x$ και $g(x) = 1 - x$. Τότε, $f, g \in C[0,1]$ και

$$\begin{aligned} \|f\| &= \max_{x\in[0,1]} x = 1, \qquad & \|g\| = \max_{x\in[0,1]} (1-x) = 1, \\ \|f+g\| &= \max_{x\in[0,1]} 1 = 1, \qquad & \|f-g\| = \max_{x\in[0,1]} |-1+2x| = 1. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2 \neq 4 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Παρατήρηση 1.1.4. Γενικά, ο χώρος $C[a,b]$ εφοδιασμένος με τη norm $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ δεν είναι ένας ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Πραγματικά, αν πάρουμε $f(x) = 1$ και $g(x) = \frac{x-a}{b-a}$, τότε εύκολα βρίσκουμε ότι $\|f\| = 1$, $\|g\| = 1$, $\|f+g\| = 2$ και $\|f-g\| = 1$, οπότε δεν ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου για τη norm.

Παράδειγμα 1.1.13. Ο χώρος ℓ^p με $p \geq 1$ είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο μόνο για $p = 2$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για τη norm $\|\cdot\|$ του ℓ^p με $p \neq 2$ δεν ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου.
Έστω $x = (1, 1, 0, 0, \cdots) \in \ell^p$ και $y = (1, -1, 0, 0, \cdots) \in \ell^p$. Τότε,

$$\|x\| = \|y\| = 2^{1/p}, \quad \|x+y\| = \|x-y\| = 2.$$

Άρα,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 8, \quad 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4 \cdot 2^{2/p},$$

οπότε αν $p = 2$ ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου, ενώ αν $p \neq 2$ δεν ισχύει.

Θεώρημα 1.1.2. Κάθε εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ σε ένα χώρο X είναι μια συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη. Έστω $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ δύο ακολουθίες του X τέτοιες ώστε $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Τότε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle + \langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leqslant |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leqslant \|x_n - x\| \, \|y_n\| + \|x\| \, \|y_n - y\|, \end{aligned}$$

και επειδή για $n \to \infty$ το β' μέλος τείνει στο 0, έχουμε το αποτέλεσμα. □

Θεώρημα 1.1.3. Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ δύο ακολουθίες του. Αν $\{x_n\}$ και $\{y_n\}$ είναι ακολουθίες Cauchy στον X τότε και η $\{\langle x_n, y_n\rangle\}$ είναι επίσης ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη. Αφού η $\{x_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον X από την ανισότητα

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x_m|| + \|x_m\|$$

έπεται ότι η ακολουθία $\{\|x_n\|\}$ είναι φραγμένη.
Όμοια και η ακολουθία $\{\|y_n\|\}$ είναι επίσης φραγμένη. Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_m, y_m\rangle| \;\; &\leqslant \;\; \|x_n - x_m\| \, \|y_n - y_m\| + \|x_n - x_m\| \, \|y_m\| \\ &\quad + \|x_m\| \, \|y_n - y_m\| \end{aligned}$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ και το δεξιό μέλος τείνει στο 0 όταν τα m, n τείνουν στο ∞.
□

Από τα δυο παραπάνω θεωρήματα έχουμε το πόρισμα.

Πόρισμα 1.1.1. Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία του.

(i) Αν $x_n \to x$ τότε $\|x_n\| \to \|x\|$.

(ii) Αν $\{x_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον X τότε και η $\{\|x_n\|\}$ είναι επίσης ακολουθία Cauchy.

1.2 Χώροι Hilbert

Ορισμός 1.2.1. Χώρος Hilbert λέγεται κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(X, \langle , \rangle)$ ο οποίος ως μετρικός χώρος είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει η norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in X$.

Επομένως:

Οι χώροι Hilbert είναι χώροι Banach.

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε έν χώρο Hilbert με το γράμμα H.

Παράδειγμα 1.2.1. Ο χώρος $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$) όλων των μιγαδικών (πραγματικών) αριθμών του Παραδείγματος 1.1.2 (1.1.1) είναι είναι χώρος Hilbert, γιατί γνωρίζουμε ότι είναι χώρος Banach και ότι η norm του $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i}\right)^{1/2}$ $\left(\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\right)$ παράγεται από εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα 1.2.2. Ο χώρος ℓ^2 όλων των ακολουθιών $\{x_i\}_{n=1}^{\infty}$ μιγαδικών (πραγματικών) αριθμών με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty$ και norm την $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i}\right)^{1/2}$ $\left(\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\right)^{1/2}$ του Παραδείγματος 1.4.3 είναι χώρος Hilbert, γιατί γνωρίζουμε ότι είναι χώρος Banach και η norm του παράγεται από εσωτερικό γινόμενο, ενώ ο ℓ^p με $p \neq 2$ δεν είναι χώρος Hilbert, γιατί η norm του δεν παράγεται από κάποιο εσωτερικό γινόμενο (βλ. Παράδειγμα 1.1.13).

Παράδειγμα 1.2.3. Ο διανυσματικός χώρος $C[a, b]$ εφοδιασμένος με τη norm $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ είναι χώρος με norm που παράγεται από εσωτερικό γινόμενο (βλ. Παραδείγματα 1.1.4 και 1.1.8), ωστόσο, δεν είναι χώρος $Hilbert$ γιατί δεν είναι πλήρης. Αποδεικνύεται εύκολα (η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη του Παραδείγματος **??**) ότι η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ του παραδείγματος αυτού είναι και στον παρόντα χώρο Cauchy, ωστόσο δεν συγκλίνει. Ο χώρος αυτός, όπως είναι γνωστό, μπορεί να γίνει πλήρης (βλ. Θεώρημα **??**) (βλ. Θεωρ 1.6-2 και 2.3-2). Η πλήρωση του $C[a, b]$ είναι ο χώρος $L^2[a, b]$.

Γενικά:

Ο χώρος $L^p[a, b]$, $p \geq 1$, είναι η πλήρωση του χώρου $C[a, b]$ με norm που ορίζεται από τη σχέση

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

ωστόσο, είναι χώρος Hilbert μόνο αν το $p = 2$.

Παράδειγμα 1.2.4. Ο διανυσματικός χώρος $L^2(\Omega)$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο του Παραδείγματος 1.1.5 είναι ένας χώρος $Hilbert$.

1.3 Ορθογωνιότητα

Αν θεωρήσουμε ένα πραγματικό γραμμικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Έστω, επίσης, δυο στοιχεία $x, y \in X$ τέτοια ώστε $x \neq 0$, $y \neq 0$. Τότε, λόγω της ανισότητας Cauchy-Schwartz, ισχύει

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1,$$

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\alpha|\,|\beta| \cos\theta$

οπότε υπάρχει $\theta \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε

$|2\beta|$ $\quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$

$\alpha \cdot \beta$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}}.$$

$\beta = (\beta_1, \beta_2)$

Η θ λέγεται **γωνία** των διανυσμάτων x και y.

Παρατήρηση 1.3.1. Όταν ο χώρος X ειναι μιγαδικός η έννοια της γωνίας δύο διανυσμάτων δεν έχει νόημα αφού $\langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$, ωστόσο, αν $\langle x, y\rangle = 0$, τότε $\theta = \pi/2$, οπότε σε αυτή την περίπτωση έχει έννοια.

Γενικότερα, σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο έχουμε τον ακόλουθο ορισμό για την ορθογωνιότητα, η οποία είναι βασική στους χώρους με εσωτερικό γινόμενο και κατ' επέκτση και στους χώρους Hilbert.

Ορισμός 1.3.1. Ένα στοιχείο x ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο X λέγεται **ορθογώνιο** (ή **κάθετο**) σε ένα στοιχείο $y \in X$ αν

$$\langle x, y\rangle = 0$$

και γράφουμε $x \perp y$. Τότε, τα στοιχεία x και y λέγονται **ορθογώνια** (ή **κάθετα**). Το σύνολο όλων των διανυσμάτων $y \in X$ που είναι κάθετα στο x το συμβολίζουμε με $x^{\perp}$.
Στο εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \forall\, x = (x_1, \cdots, x_n),\ y = (y_1, \cdots, y_n) \ \in \mathbb{R}^n,$$

η ορθογωνιότητα ορίζεται ακριβώς όπως η καθετότητα σε αυτούς τους χώρους, δηλαδή,

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = x \cdot y = 0.$$

□

Πρόταση 1.3.1. Το σύνολο $x^{\perp} = \{y \in X : y \perp x\}$ είναι υπόχωρος του X.

Απόδειξη. Αν $y, z \in x^{\perp}$, τότε

$$\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle = 0,$$

άρα $(y + z) \in x^{\perp}$.
Αν $c \in \mathbb{C}$ κάποια σταθερά και $x \in X$, τότε

$$\langle x, ay\rangle = \overline{a}\langle x, y\rangle = 0,$$

άρα $(ay) \in x^{\perp}$. □

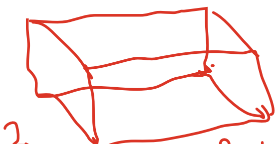
Ορισμός 1.3.2. Έστω ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ και $\mathrm{A}, B \subset X$.

- Το στοιχείο $x \in X$ λέγεται **ορθογώνιο** στο σύνολο A όταν είναι ορθογώνιο σε κάθε στοιχείο $y \in A$ και γράφουμε $x \perp A$.
- Το σύνολο όλων των στοιχείων του X τα οποία είναι ορθογώνια στο σύνολο A λέγεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του A και συμβολίζεται με $\mathrm{A}^{\perp}$, δηλαδή,
$$A^{\perp} = \{x \in X : x \perp y, \ \forall \ y \in A\}.$$
- Τα σύνολα $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subset X$ λέγονται **ορθογώνια** (μεταξύ τους) αν $x \perp y$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $y \in B$.

Από τα παραπάνω προκύπτουν άμεσα τα εξής:
(i) $x \perp 0$, για όλα τα $x \in X$. (ii) $\{0\}^{\perp} = X$ και $X^{\perp} = \{0\}$. □

Θεώρημα 1.3.1. (**Πυθαγόρειο Θεώρημα**) Έστω $(X, \langle,\rangle)$ ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x, y \in X$. Αν $x \perp y$ τότε
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Γενικότερα:
Αν $x_1, x_, \cdots, x_n$ είναι διανύσματα του X ανά δύο κάθετα μεταξύ τους τότε
$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$



$D^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

Απόδειξη. Επειδή, $x \perp y$, θα έχουμε

0

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Στη γενική περίπτωση, αν $x_1, x_, ..., x_n$ είναι διανύσματα του X ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, τότε θα έχουμε
$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

□

Παρατήρηση 1.3.2. Είναι γνωστό ότι στην Ευκλείδεια γεωμετρία ισχύει και το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος. Αυτό όμως δεν συμβαίνει σε κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο. Αν ο χώρος είναι πραγματικός ισχύει και το αντίστροφο ενώ αν ο χώρος είναι μιγαδικός δεν ισχύει. Πραγματικά, επειδή σε κάθε πραγματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει η ισότητα $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, έχουμε

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0.$$

Θεωρούμε τώρα το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με $\langle x, y\rangle = x\overline{y}$, γιά κάθε $x, y \in \mathbb{C}$. Τότε το $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}$, ωστόσο, δεν υπάρχουν διανύσματα x, y τέτοια ώστε $x \neq 0, y \neq 0$ και $x \perp y$ (αποδείξτε το), ενώ υπάρχουν διανύσματα $x, y \in \mathbb{C}$ τα οποία δεν είναι κάθετα και για τα οποία ισχύει

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Τέτοια διανύσματα για παράδειγμα είναι τα $x = 1+i$ και $y = 1-i$.

1.4 Ορθοκανονικά Συστήματα - Βάσεις

Η ορθογωνιότητα στοιχείων ενός συνόλου παίζει σημαντικό ρόλο στους χώρους με εσωτερικό γινόμενο και στους χώρους Hilbert και ιδιαίτερα εκείνων των συνόλων που τα στοιχεία τους είναι ορθογώνια κατά ζεύγη. Αν επιστρέψουμε για λίγο στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ ένα τέτοιο σύνολο είναι ένα σύνολο που αποτελείται από τα τρία μοναδιαία διανύσματα στις διευθύνσεις των θετικών ημιαξόνων ενός ορθογώνιου συστήματος αξόνων τα οποία αποτελούν μια ορθοκανονική βαση του $\mathbb{R}^3$. Από πρακτικής πλευράς ένα μεγάλο πλεονέκτημα της ορθογωνιότητας είναι η δυνατότητα υπολογισμού των συντεταγμένων δοθέντος διανύσματος x ως προς μια ορθοκανονική βάση με ιδιαίτερα απλό και σύντομο τρόπο, δεδομένου ότι υπάρχει μοναδική αναπαράσταση του στοιχείoιυ αυτού ως προς τη συγκεκριμένη βάση. Για παράδειγμα αν $\{e_1, e_2, e_3\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και x ένα στοιχείο του, τότε

$$x = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,$$

όπου οι αριθμοί a_i είναι μοναδικοί και δίνονται από τις σχέσεις

$$a_i = \langle x, e_i\rangle,\ i = 1, 2, 3.$$

Το ερώτημα που τίθεται είναι το αν υπάρχουν παρόμοιες δυνατότητες χρήσης των ορθογωνίων συνόλων σε γενικότερους χώρους με εσωτερικό γινόμενο και σε χώρους Hilbert. Η απάντηση είναι καταφατική και η μελέτη και η εφαρμογή των ιδιοτήτων τέτοιων συνόλων αποτελεί ουσιαστικό μέρος ολόκληρης της θεωρίας των χώρων αυτών. Θα εισάγουμε πρώτα κάποιες βασικές έννοιες και θα δώσουμε μερικά βασικά παραδείγματα.

Ορισμός 1.4.1. Ένα υποσύνολο A ενός χώρου $(X, \langle , \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται **ορθοκανονικό σύνολο** ή **ορθοκανονικό σύστημα**, αν είναι ορθογώνιο, δηλαδή, $x \perp y$, για όλα τα $x, y \in A$ και $\|x\| = 1$, για κάθε $x \in A$.
Αν το A είναι ένα ορθογώνιο σύνολο μη μηδενικών στοιχείων, τότε το σύνολο $B = \{x/\|x\| : x \in A\}$ είναι ορθοκανονικό. □

Παράδειγμα 1.4.1. Το σύνολο $A = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, όπου για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, δηλαδή όλες οι συνιστώσες του e_i είναι 0 εκτός από την i-συνιστώσα που είναι 1, είναι ορθοκανονικό στον $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ $((\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle))$ του Παραδείγματος 1.1.1 (1.1.2).

Παράδειγμα 1.4.2. Το σύνολο $A = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots\}$, όπου για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$, δηλαδή όλοι οι όροι της ακολουθίας ε_n είναι 0 εκτός από τον n-στό όρο που είναι 1, είναι ορθοκανονικό στον $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ του Παραδείγματος 1.4.3.

Παράδειγμα 1.4.3. Θεωρούμε τον χώρο $C[-\pi, \pi]$, των συνεχών συναρτήσεων $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Τότε, το υποσύνολο του

$$A = \{\frac{1}{2}\} \cup \{\cos(nx) : n = 1, 2, \cdots\} \cup \{\sin(nx) : n = 1, 2, \cdots\}$$

είναι ορθογώνιο και το υποσύνολό του $B = \{x/\|x\| : x \in A\}$ είναι ορθοκανονικό.

Απόδειξη. Αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(nx)dx = 0, \ \forall\ n \in \mathbb{N},$$

$\frac{1}{2}$ ημ$(2nx)$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = 0,\ \forall\, m,n \in \mathbb{N},\ m \neq n.$$

Άρα, το σύνολο A είναι ορθογώνιο.
Εξάλλου, επειδή είναι

$$\left\|\frac{1}{2}\right\|_{L^2[-\pi,\pi]} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4}dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\|\cos{(nx)}\|_{L^2[-\pi,\pi]} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2{(nx)}\,dx\right)^{1/2} = \sqrt{\pi},\ n = 1, 2, \ldots$$

και

$$\|\sin{(nx)}\|_{L^2[-\pi,\pi]} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2{(nx)}\,dx\right)^{1/2} = \sqrt{\pi},\ n = 1, 2, \cdots$$

έπεται ότι το σύνολο

$$\begin{aligned} B &= \left\{\frac{x}{\|x\|} : x \in A\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} : n = 1, 2, \cdots\right\} \cup \left\{\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} : n = 1, 2, \cdots\right\} \end{aligned}$$

είναι ορθοκανονικό.

~~**Παράδειγμα 1.4.4.** Στο χώρο $C[-\pi,\pi]$, των συνεχών συναρτήσεων $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο~~

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

~~το σύνολο $\{(1/\sqrt{2\pi})e^{inx}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ είναι ορθοκανονικό.~~

~~*Απόδειξη.* (Άσκηση).~~

Ορισμός 1.4.2. Ένα υποσύνολο S ενός χώρου X λέγεται **γραμμικά ανεξάρτητο** αν κάθε μη κενό πεπερασμένο υποσύνολό του είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Το S λέγεται **γραμμικά εξαρτημένο** αν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο. □

σύνολο

Ορισμός 1.4.3. Αν $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύστημα, συμβολίζουμε με span$\{x_i\}_{i=1}^{n}$, $n = 1, 2, \cdots$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων γραμμικών συνδιασμών με στοιχεία του $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. $\square$

Η ακόλουθη επαγωγική διαδικασία λέγεται **ορθοκανονικοποίηση** Gram – Schmidt και μετασχηματίζει ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύστημα σε ένα ορθοκανονικό.

σύνολο

Θεώρημα 1.4.1. Έστω $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύστημα σε ένα χώρο Hilbert. Θέτουμε $e_1 = x_1/\|x_1\|$ και ορίζουμε επαγωγικά

$$e_n = \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|}, \quad \forall\ y_n = \sum_{n=1}^{n-1} \langle x_n, e_i \rangle e_i.$$

Τότε, το σύνολο $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ορθοκανονικό και ισχύει

$$\text{span}\{e_i\}_{i=1}^{n} = \text{span}\{x_i\}_{i=1}^{n}, \quad \forall\ n = 1, 2, \cdots.$$

Απόδειξη. Τα e_n ορίζονται για όλα τα n, γιατί ισχύει $\|x_n - y_n\| \neq 0$ για όλα τα n. Για παράδειγμα αν $n = 2$ και $x_2 = y_2$, τότε τα x_1, x_2 θα ήταν γραμμικά εξαρτημένα που είναι άτοπο. Επαγωγικά μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\|x_n - y_n\| \neq 0$ και για κάθε $n > 2$.
Το $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα γιατί για κάθε $m > n$ ισχύει $\langle x_m, e_n \rangle = \langle y_m, e_n \rangle$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\langle e_m, e_n \rangle = 0$ (αποδείξτε το).
Στη συνέχεια θα εργαστούμε με επαγωγή. Έστω ότι ισχύει για $n - 1$. Τότε το $y_n \in \text{span}\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ και $x_n - y_n \neq 0$ αφού τα x_i είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Προφανώς, $\{e_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \text{span}\{x_i\}_{i=1}^{n}$. Επιπλέον, $x_n \in \text{span}\{e_i\}_{i=1}^{n}$, που σημαίνει ότι $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \text{span}\{e_i\}_{i=1}^{n}$. $\square$

Παρατήρηση 1.4.1. Η διαδικασία της ορθοκανονικοποίησης σχεδιάστηκε από τους Gram (1883) και Schmidt (1907). Με απλά λόγια αυτό που κάνουμε σε κάθε βήμα είναι να αφαιρούμε από το x_n τις συνιστώσες του στις κατευθύνσεις των ορθογωνίων διανυσμάτων που έχουν ορισθεί προηγουμένως, δηλαδή το $y_n = \sum_{n=1}^{n-1} \langle x_n, e_i \rangle e_i$. Μια γεωμετρική ερμηνεία στον $\mathbb{R}^3$ θα ήταν ιδιαίτερα κατατοπιστική.

Θεώρημα 1.4.2. Κάθε ορθοκανονικό σύνολο ενός χώρου X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Απόδειξη. Έστω $e_1, e_2, \cdots, e_n$ ένα ορθοκανονικό υποσύνολο του χώρου X και έστω $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = 0$. Θα αποδείξουμε ότι $a_i = 0$. Για το τυχόν στοιχείο e_i έχουμε:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, e_i \right\rangle = 0$$

ή

$$\sum_{i=1}^{n} \langle a_i e_i, e_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \langle e_i, e_i \rangle = 0,$$

οπότε $a_i \langle e_i, e_i \rangle = 0$, από όπου προκύπτει ότι $a_i = 0$. Αυτό αποδεικνύει την γραμμική ανεξαρτησία για κάθε πεπερασμένο ορθοκανονικό σύνολο και συνεπάγεται την γραμμική ανεξαρτησία του ορθοκανονικού συνόλου αν αυτό είναι απειροσύνολο (βλ. Ορισμός 1.4.2). □

Ορισμός 1.4.4. Ένας διανυσματικός χώρος X είναι **πεπερασμένης διάστασης** αν υπάρχει ένας θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε ο X να περιέχει ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο n διανυσμάτων ενώ κάθε σύνολο αποτελούμενο από $n+1$ διανύσματα ή και περισσότερα είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Το n λέγεται **διάσταση** του χώρου και συμβολίζεται με $n = \mathrm{dimX}$.

Αν $X = \{0\}$, τότε $\mathrm{dimX} = 0$.

Αν ο X δεν είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης, τότε λέμε ότι είναι **άπειρης διάστασης** (ή **απειροδιάστατος**). □

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης.

Ορισμός 1.4.5. ~~Αν~~ ο διανυσματικός χώρος X είναι πεπερασμένης διάστασης n, ένα σύνολο n γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων $x_1, x_2, \cdots, x_n$ είναι μια **βάση** για τον χώρο X (ή μια βάση στον X).

Αν $x_i \perp x_j$ γιά κάθε $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ με $i \neq j$, τότε η βάση λέγεται **ορθογώνια**, και αν επι πλέον $\|x_i\| = 1$ γιά κάθε $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, η βάση λέγεται **ορθοκανονική**.

Σε κάθε περίπτωση, κάθε $x \in X$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων της βάσης, δηλαδή υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \cdots, a_n$, τέτοιοι ώστε

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

□

Θεώρημα 1.4.3. Αν X είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ διάστασης n και $B = \{e_1, ..., e_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του X, τότε

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, \ \forall \ x \in X.}$$

Απόδειξη. Αφού το σύνολο B είναι ορθοκανονική βάση του X, γιά κάθε $x \in X$ θα υπάρχουν $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.
Εξάλλου είναι

$$\langle x, e_i \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, e_i \rangle = x_1 \langle e_1, e_i \rangle + \cdots + x_n \langle e_n, e_i \rangle = x_i.$$

□

Πρόταση 1.4.1. Αν $\{e_1, \cdots, e_n\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(X, \langle , \rangle)$ διάστασης n, τότε για κάθε $x \in X$ ισχύει η ισότητα

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \left| \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \right|^2 .$$

$x \in \mathbb{R}^2$

$x \in \mathbb{R}^3$

Απόδειξη. Έστω $a_1, a_2, \cdots, a_n$ τυχόντες πραγματικοί (ή μιγαδικοί) αριθμοί. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (βλ. Θεώρημα 1.3.1) έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|a_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2.$$

$\|x\|^2 \geq$

Επίσης, είναι

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2 &= \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \ x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{\langle x, e_i \rangle} - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \overline{a_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a_i}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $a_i = \langle x, e_i \rangle$ παίρνουμε

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle x, e_i \rangle} = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

□

Θεώρημα 1.4.4. (**Ανισότητα του Bessel**) Αν $\{e_1, \cdots, e_n\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα σε ένα χώρο με με εσωτερικό γινόμενο $(X, \langle , \rangle)$ διάστασης n, τότε για κάθε $x \in X$ ισχύει η ανισότητα

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1.4.1.

Παρατήρηση 1.4.2. Στην ανισότητα του Bessel μπορεί να δοθεί η εξής γεωμετρική ερμηνεία:

Το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των συνιστωσών ενός διανύσματος κατά τη διεύθυνση οποιοδήποτε πλήθους διευθύνσεων, καθέτων μεταξύ τους, δεν υπερβαίνει το τετράγωνο του μήκους του διανύσματος.

Μια διαισθητική ερμηνεία μπορεί να δοθεί στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο.

Παρατήρηση 1.4.3. Παρατηρούμε ότι η ισότητα (1) γράφεται διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\left\|x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|^2 &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{\langle x, e_i\rangle} - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \bar{a}_i + \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{a}_i \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle x, e_i\rangle} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \left[\langle x, e_i\rangle \overline{\langle x, e_i\rangle} - a_i \overline{\langle x, e_i\rangle} - \langle x, e_i\rangle \bar{a} + a_i \bar{a}\right] \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle x, e_i\rangle} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \langle x, e_i\rangle - a_i, \overline{\langle x, e_i\rangle - a_i} \right\rangle \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle - a_i|^2.
\end{aligned}$$

Επομένως, η επιλογή του $a_i = \langle x, e_i\rangle$ ελαχιστοποιεί τη norm $\left\|x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|$, το οποίο σημαίνει ότι παρέχει την καλύτερη δυνατή προσέγγιση του x με ένα γραμμικό συνδιασμό των διανυσμάτων $\{e_1, \cdots, e_n\}$.

Αν $\left\|x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| = 0$, τότε τα διανύσματα $\{e_1, \cdots, e_n\}$ αποτελούν βάση του χώρου.

Θεώρημα 1.4.5. Αν $\{e_1, \cdots, e_n\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα σε ένα χώρο με με εσωτερικό γινόμενο $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ διάστασης n, και $x \in X$ τέτοιο ώστε

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2,$$

τότε

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $y = x - \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$, οπότε από την υπόθεση και την Πρόταση 1.4.1 προκύπτει ότι

$$\|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 = 0,$$

οπότε για $y = 0$ παίρνουμε

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

□

Θεώρημα 1.4.6. (**Ταυτότητα του Parseval**) Αν X είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ διάστασης n και $\mathrm{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ ένα πεπερασμένο ορθοκανονικό σύστημα του X, τότε το B είναι ορθοκανονική βάση του X, αν και μόνο αν

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Απόδειξη. Αν το σύνολο $\mathrm{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του X, από την Πρόταση 1.4.1 είναι γνωστό ότι

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, \ \forall \ x \in X,$$

και επειδή το σύνολο $\{\langle x, e_i\rangle e_i, \ i = 1, 2, \cdots, n\}$ είναι ορθογώνιο από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι γιά κάθε $x \in X$,

$$\|x\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Το αντίστροφο προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 1.4.5. □

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την γενίκευση των παραπάνω αποτελεσμάτων σε χώρους με άπειρη διάσταση. Όμως, υπάρχουν μερικά πολύ δύσκολα προβλήματα όταν η διάσταση του χώρου είναι άπειρη. Γνωρίζουμε, για παράδειγμα, ότι όταν η διάσταση του χώρου είναι πεπερασμένη κάθε στοιχείο του χώρου γράφεται σαν γραμμικός συνδιασμός πεπερσμένου πλήθους γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων του, τα αποία αποτελούν μια βάση του. Σε ένα απειροδιάστατο χώρο πως θα μπορούσε να οριστεί μια <βάση> του και πως θα μπορούσε να αναπαρασταθεί ένα στοιχείο του μέσω των στοιχείων αυτής της βάσης; Ένα άλλο πρόβλημα είναι ότι στην πεπερασμένη διάσταση το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης είναι πεπερασμένο, οπότε τίθεται το ερώτημα τι ισχύει στην άπειρη διάσταση. Είναι επίσης γνωστό ότι σε ένα χώρο με πεπερασμένη διάσταση όλες οι norms είναι ισοδύναμες ενώ σε ένα χώρο με άπειρη διάσταση αυτό δεν συμβαίνει, οπότε διαφορετικές norms σε ένα χώρο παράγουν διαφορετικές τοπολογίες στον ίδιο χώρο και αυτό το γεγονός δημιουργεί νέα σειρά προβλημάτων. Επομένως, στους απειροδιάστατους χώρους υπάρχουν πάρα πολλά προβλήματα και η αναζήτηση ενός αριθμήσιμου υποσυνόλου ενός χώρου X το οποίο είναι πυκνό στον X είναι χρήσιμη, οπότε, θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στους διαχωρίσιμους χώρους με εσωτερικό γινόμενο. Όπως θα αποδείξουμε παρακάτω (βλ. Θεώρημα 1.4.7) κάθε ορθοκανονικό σύνολο σε ένα διαχωρίσιμο χώρο με εσωτερικό γινόμενο είναι αριθμήσιμο, το οποίο, ωστόσο, όπως θα δούμε (βλ. Πρόταση **??**) δεν μπορεί να είναι βάση για το χώρο.

Μπορούμε σε αυτό το σημείο να γενικεύσουμε την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας και σε απειροσύνολα. Γνωρίζουμε ότι ένα ορθογώνιο σύνολο σε ένα χώρο $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο είναι ένα υποσύνολο S του X με πεπερασμένο ή απειρο πλήθος στοιχείων του οποίου τα στοιχεία είναι ανά δυο κάθετα μεταξύ τους και ορθοκανονικό αν είναι ορθογώνιο και όλα του τα στοιχεία έχουν norm ίση με 1.
Αν ένα σύνολο $S \subset X$ είναι ορθοκανινικό, τότε για κάθε $x, y \in S$ έχουμε

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0, & x \neq y \\ 1, & x = y \end{cases}.$$

Ένα ορθογώνιο σύνολο ή ένα ορθοκανονικό σύνολο λέγεται και **ορθογώνιο σύστημα** ή **ορθοκανονικό σύστημα**, αντίστοιχα.

Αν ένα ορθογώνιο ή ορθοκανονικό σύνολο S είναι αριθμήσιμο, μπορούμε να το διατάξουμε σε μια ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ την οποία ονομάζουμε **ορθογώνια** ή **ορθοκανονική ακολουθία**.

Γενικότερα, μια οικογένεια $\{x_a\}_{a\in\Lambda}$, όπου το σύνολο Λ μπορεί να είναι και μη αριθμήσιμο λέγεται **ορθοκανονική** αν είναι ορθογώνια και όλα τα στοιχεία της x_a, $a \in \Lambda$ έχουν norm ίση με 1, δηλαδή είναι

$$\langle x_a, x_b \rangle = \delta_{ab},$$

όπου $\delta_{ab} = \begin{cases} 0, & a \neq b \\ 1, & a = b \end{cases}$ είναι το **δέλτα του Kronecker**.
Αν ένας χώρος X αποτελείται μόνο από το μηδενικό διάνυσμα τότε δεν περιλαμβάνει κανένα ορθοκανονικό σύστημα.

Στο σημείο αυτό θα ασχοληθούμε με τα ορθοκανονικά σύνολα στους διαχωρίσιμους χώρους με εσωτερικό γινόμενο γιατί όπως θα διαπιστώσουμε παίζουν σημαντικό ρόλο στουςναπειροδιάστατιυς χώρους. Θα αποδείξουμε πρώτα το ακόλουθο πολύ σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 1.4.7. Κάθε ορθοκανονικό σύνολο $A = \{x_i : i \in I\}$ ενός διαχωρίσιμου χώρου με εσωτερικό γνόμενο $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη. Επειδή, για κάθε $i, j \in I$ με $i \neq j$, είναι

$$\|x_i - x_j\| = \sqrt{\langle x_i - x_j, x_i - x_j \rangle} = \sqrt{\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2} = \sqrt{2},$$

αν θεωρήσουμε την οικογένεια των σφαιρικών περιοχών $\mathcal{B} = \left\{B\left(x_i, \frac{1}{2}\right), i \in I\right\}$, αυτές είναι ξένες ανά δύο μεταξύ τους.
Εξάλλου, επειδή ο X είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $D \subset X$ τέτοιο ώστε $\overline{D} = X$, και επομένως για κάθε $i \in I$ υπάρχει $a_i \in D$ με $a_i \in B\left(x_i, \frac{1}{2}\right)$, που σημαίνει ότι το σύνολο Β είναι αριθμήσιμο, άρα και το σύνολο Α είναι αριθμήσιμο. □

Ορισμός 1.4.6. Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\mathrm{B} = \{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο. Το σύνολο Β λέγεται **ορθοκανονική βάση** του X, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχουν πραγματικοί (ή μιγαδικοί) αριθμοί x_i, $i \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$. □

Παρατήρηση 1.4.4. Σημειώνουμε ότι η έννοια της βάσης στην περίπτωση των απειροδιάστατων χώρων δεν είναι η συνήθης αλγεβρική έννοια, αλλά μας επιτρέπει να θεωρούμε απειραριθμήσιμους γραμμικούς συνδιασμούς στοιχείων ενός απειροδιάστατου χώρου με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο θεωρούμε πεπερασμένους γραμμικούς συνδιασμούς στοιχείων σε χώρους με πεπερασμένη διάσταση. Προφανώς, αν η διάσταση του χώρου είναι πεπερασμένη, τότε μια ορθοκανονική βάση του $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι μια βάση Hamel (βλ. Ορισμός **??** ή **??**).

Το θεώρημα που ακολουθεί αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 1.4.3 στους απειροδιάστατους χώρους.

Θεώρημα 1.4.8. Αν $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $B = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια ορθοκανονική βάση του X, τότε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \ \ \forall \ x \in X.$$

Απόδειξη. Αφού το σύνολο B είναι ορθοκανονική βάση του X, για κάθε $x \in X$, υπάρχουν x_n, $n = 1, 2, \cdots$, τέτοιοι ώστε $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$.
Εξάλλου, για κάθε $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$ είναι $\left\langle \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, e_k \right\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \langle e_i, e_k \rangle = x_k$, οπότε λόγω της συνέχειας του $\langle\cdot,\cdot\rangle$, για $n \to \infty$ προκύπτει ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ είναι $\langle x, e_k \rangle = \left\langle \sum\limits_{i=1}^{n} x_n e_n, e_k \right\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \langle e_n, e_k \rangle = x_k$.

Για κάθε $x \in X$, οι πραγματικοί (ή μιγαδικοί) αριθμοί $x_n = \langle x, e_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$ λέγονται **συντελεστές** Fourier του x ως προς το ορθοκανονικό σύνολο $B = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ λέγεται **σειρά** Fourier του x ως προς το B.

Παράδειγμα 1.4.5. Θεωρούμε το χώρο $L^2[0, 2\pi]$, δηλαδή το χώρο που αποτελείται από όλες τις Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις f που είναι ορισμένες στο κλειστό διάστημα $[0, 2\pi]$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$ και ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο με τη σχέση

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} dx.$$

Τότε, το σύνολο $B = \{e^{inx}/\sqrt{2\pi}, \ n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονικό και οι συντελεστές Fourier της f δίδονται από τη σχέση

$$c_n = \langle f, e_n \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \langle e^{inx}, e^{imx} \rangle &= \int_0^{2\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx \\ &= \frac{1}{i(n-m)} [e^{i(n-m)x}]_0^{2\pi} = \frac{1}{i(n-m)} [e^{i(n-m)2\pi} - 1] = 0. \end{aligned}$$

Άρα το B είναι ορθογώνιο.
Εξάλλου, είναι

$$\|e^{inx}\|_{L^2} = \left(\int_0^{2\pi} |e^{inx}|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_0^{2\pi} dx\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi},$$

οπότε,

$$\left\|\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\|_{L^2} = 1, \ \forall\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Επομένως, το σύνολο $B = \{e^{inx}/\sqrt{2\pi},\ n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονικό.
Τέλος, λόγω του Θεωρήματος 1.4.8, είναι $c_n = \langle f, e_n\rangle$.

Αναφορικά με τη σειρά Fourier ενός στοιχείου x ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο τίθενται τα εξής δυο ερωτήματα:

(i) Πότε η σειρά Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ του x ως προς ένα ορθοκανονικό σύνολο B συγκλίνει;

(ii) Αν η σειρά συγκλίνει, πότε το άθροισμά της ισούται με το x;

Απάντηση στα ερωτήματα αυτά δίνουν τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 1.4.9. (**Γενικευμένη Ανισότητα του Bessel**) Αν $\mathrm{A} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ και $x \in X$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 < \infty$ και μάλιστα

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2. \qquad (1)$$

Απόδειξη. Το σύνολο $\mathrm{A}_n = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ είναι ορθοκανονικό για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε από το Θεώρημα 1.4.4 έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2, \ \forall\ n \in \mathbb{N} \qquad (2)$$

και συνεπώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$ συγκλίνει.
Αν πάρουμε στην (2) τα όρια όταν το $n \to \infty$ προκύπτει η (1). □

Θεώρημα 1.4.10. Αν $\mathrm{A} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ και x ένα στοιχείο του X τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2, \qquad (3)$$

τότε η σειρά Fourier $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$ του x ως προς το Α συγκλίνει και μάλιστα

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n.$$

Απόδειξη. Επειδή το σύνολο $\mathrm{A}_n = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ είναι ορθοκανονικό για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε από το Θεώρημα 1.4.4 έχουμε

$$\left\|x - \sum_{n=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \|x\right\|^2 - \sum_{n=1}^{n}|\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Αν πάρουμε τα όρια όταν το $n \to \infty$ από την συνέχεια της norms προκύπτει ότι η $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$ συγκλίνει και μάλιστα

$$\left\|x - \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n\right\|^2 = 0,$$

οπότε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n.$$

□

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι πολύ σημαντικό γιατί μας δίνει ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα ορθοκανονικό σύνολο να είναι ορθοκανονική βάση.

Θεώρημα 1.4.11. (Γενικευμένη Ταυτότητα του Parseval) Αν $\mathrm{A} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, τότε το Α είναι ορθοκανονική βάση του X τότε και μόνο τότε όταν για κάθε στοιχείο x του X ισχύει η ταυτότητα

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2. \qquad (4)$$

Απόδειξη. Αν το σύνολο $\mathrm{A} = \{e_n; n \in N\}$ είναι ορθοκανονική βάση του X, τότε για κάθε $n \in N\}$ το σύνολο $\mathrm{A}_n = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ είναι ορθοκανονικό, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\langle x, e_i\rangle|^2, \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Αν πάρουμε τα όρια όταν το $n \to \infty$ και λάβουμε υπόψη μας ότι

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$$

προκύπτει ότι

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2, \ \forall \ x \in X.$$

Το αντίστροφο του θεωρήματος είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.4.10.
□

Παρατήρηση 1.4.5. Ένας απειροδιάστατος χώρος με εσωτερικό γινόμενο δεν έχει πάντοτε αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση. Θα δούμε όμως στη συνέχεια ότι όταν ο χώρος είναι διαχωρίσιμος υπάρχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση. Δεδομένου ότι κάθε χώρος με πεπερασμένη διάσταση είναι διαχωρίσιμος, κάθε τέτοιος χώρος έχει πάντοτε ορθοκανονική βάση (με τη γνωστή αλγεβρική έννοια).

Παράδειγμα 1.4.6. Το σύνολο $A = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, όπου για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, είναι ορθοκανονική βάση στον $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Απόδειξη. Το σύνολο A είναι ορθοκανονικό (βλ. Παράδειγμα 1.4.1) και επί πλέον κάθε στοιχείο $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ του $\mathbb{R}^n$ γράφεται $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, οπότε το A είναι και βάση.

Παράδειγμα 1.4.7. Το σύνολο $A = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots\}$, όπου για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ είναι ορθοκανονική βάση στον $(\ell^2, \langle , \rangle)$ του Παραδείγματος 1.4.2.

Απόδειξη. Η ορθοκανονικότητα είναι προφανής, οπότε θα αποδείξουμε ότι το A είναι βάση.
Έστω $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ και $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία στοιχείων του ℓ^2 με

$$x^{(n)} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots), \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Τότε,

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \ \forall \ n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Επίσης, είναι

$$\|x^{(n)} - x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2}, \ \forall \ n \in \mathbb{N},$$

οπότε
$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\|_{\ell^2} = 0$$
και επομένως
$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x.$$
Αν τώρα στην (1) πάρουμε τα όρια όταν το $n \to \infty$, προκύπτει ότι
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

1.5 Πλήρη Ορθοκανονικά Σύνολα

Τα ορθοκανονικά σύνολα σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο και σε χώρους Hilbert τα οποία παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι εκείνα τα οποία έχουν *επαρκώς πολλά* στοιχεία έτσι ώστε κάθε στοιχείο του χώρου να μπορεί να παρασταθεί ή να προσεγγισθεί με ικανοποιητηκή ακρίβεια με τη χρήση αυτών των ορθοκανονικών συνόλων. Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης η κατάστας είναι απλή αφού το μόνο που χρεαζομαστε είναι ένα ορθογώνιο σύνολο με πλήθος στοιχείων ίσο με τη διάσταση του χώρου. Το ερώτημα που τίθεται είναι το τι συμβαίνει στους απειροδιάστατους χώρους.

Ορισμός 1.5.1. Ένα ορθοκανονικό σύστημα S σε ένα χώρο X με εσωτερικό γινόμενο λέγεται **πλήρες** τότε και μόνο τότε όταν το span$S$ είναι πυκνό στον X, δηλαδή
$$\overline{\text{span}S} = X.$$

Αν συμβολίσουμε με $\{x_i\}_{i\geq 1}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύστημα το οποίο είναι της μορφής $\{x_i\}_{i=1}^n$ αν η διάσταση του χώρου είναι πεπερασμένη είτε της μορφής $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ αν η δισταση του χώρου είναι άπειρη, εναλλακτικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:
Ένα ορθοκανονικό σύστημα $\{x_i\}_{i\geq 1}$ σε ένα χώρο X με εσωτερικό γινόμενο λέγεται **πλήρες** αν το σύνολο των γραμμικών συνδιασμών $\sum_{i=1}^n a_i x_i$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για όλα τα βαθμωτά a_i είναι πυκνό σύνολο στον X.

Αν ένα ορθοκανονικό σύστημα S σε ένα χώρο X με εσωτερικό γινόμενο είναι πλήρες, τότε δεν υπάρχει ορθοκανονικό σύστημα του οποίου το S να είναι γνήσιο υποσύνολο ή ισοδύναμα όταν η συνθήκη $x \perp S$, $x \in X$ συνεπάγεται $x = 0$. $\square$

Ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα S σε ένα χώρο X κάποιες φορές λέγεται **ορθοκανονική βάση** γισ τον X, ωστόσο, είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι δεν είναι μια βάση με την έννοια της βάσης για τον X σαν διανυσματικό χώρο εκτός και αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση.

Σε κάθε χώρο Hilbert $\mathrm{H} \neq \{0\}$ *υπάρχει ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο.*

Για ένα πεπερασμένης διάστασης χώρο αυτό είναι προφανές. Αν ο χώρος είναι απειροδιάστατος και διαχωρίσιμος τότε αυτό προκύπτει από την διαδικασία Gram-Schmidt με επαγωγή. Για ένα μη διαχωρίσιμο χώρο μια μη (κατασκεαστική) απόδειξη προκύπτει από το λήμμα του Zorn (βλ.$Sec4.1Kreysig$)

Όλα τα πλήρη ορθοκανονικά συστήματα σε ένα χώρο Hilbert $\mathrm{H} \neq \{0\}$ έχουν τον ίδιο πληθάριθμο που λέγεται **διάσταση** (ή **διάσταση** Hilbert) του χώρου H. (Αν $\mathrm{H} = \{0\}$, τότε η διάστασή του είναι 0). Για χώρους Hilbert με πεπερασμένη διάσταση η κατάσταση είναι απλή αφού η διάσταση του χώρου είναι η διάστασή του με την ίδια έννοια όπως και στην άλγεβρα. Για τους διαχωρίσιμους χώρους ισχύει το Πόρισμα 1.5.1. Για πιο γενικούς χώρους η κατάσταση είναι πολύ πιό δύσκολη (βλ. E. Hewitt and Stromberg (1969), p.246).[Krayszig]

Παράδειγμα 1.5.1. Το σύστημα των πολυωνύμων $\{t^n\}_{n\geq 0}$ είναι πλήρες στον $C[0,1]$ καθώς και στον $L^2[0,1]$.

Απόδειξη. Πραγματικά, σύμφωνα με το Προσεγγιστικό Θεώρημα του Weierstrass τα πολυώνυμα αυτά είναι πυκνά στον $C[0,1]$, οπότε το σύστημα $\{t^n\}_{n\geq 0}$ είναι πλήρες στον $C[0,1]$.
Εξάλλου, εξ ορισμού ο $C[0,1]$ είναι πυκνός στον $L^2[0,1]$ και η σύγκλιση $f_n \to f$ στον $C[0,1]$ συνεπάγεται $f_n \to f$ στον $L^2[0,1]$. Ο ισχυρισμός αυτός προκύπτει την ανισότητα

$$\|f\|_{L^2[0,1]} \leq \|f\|_{C[0,1]}, \ \ \forall f \in C[0,1],$$

δηλαδή, από το γεγονός ότι η norm στον $C[0,1]$ είναι ισχυρότερη από τη norm στον $L^2[0,1]$.
Επομένως, τα πολυώνυμα $\{t^n\}_{n\geq 0}$ ειναι πυκνά στον $L^2[0,1]$.

Παράδειγμα 1.5.2. Το σύστημα $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι πλήρες στον $L^2[-\pi,\pi]$.

Απόδειξη. Πραγματικά, πάλι σύμφωνα με το Προσεγγιστικό Θεώρημα του Weierstrass τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στο χώρο των συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων στο $[-\pi,\pi]$, ως προς την $C[-\pi,\pi]$-norm, οπότε το σύστημα $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ είναι πλήρες στον $L^2[-\pi,\pi]$.

Παράδειγμα 1.5.3. Το σύνολο $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ είναι πλήρες σύστημα στον $L^2[-\pi,\pi]$, για τον ίδιο λόγο με τα προηγούμενα παραδείγματα.

Θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.5.1. Ένα ορθοκανονικό σύστημα S σε ένα χώρο X με εσωτερικό γινόμενο είναι πλήρες τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $x \in X - S$ με $x \perp S$ έπεται ότι $x = 0$.

Απόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι το S είναι πλήρες και ότι υπάρχει $x \in X - S$ τέτοιο ώστε $x \perp S$. Αν $x \neq 0$, τότε το $S \cup \{x/\|x\|\}$ θα ήταν ένα ορθοκανονικό σύστημα του οποίου το S θα ήταν γνήσιο υποσύνολο, το οποίο είναι άτοπο γιατί το S έχει υποτεθεί πλήρες. Άρα, $x = 0$.
Αντίστροφα, αν η υπόθεση $x \perp S$ έπεται ότι $x = 0$, τότε το S θα ήταν πλήρες, γιατί αν δεν ήταν θα υπήρχε ένα ορθοκανονικό σύστημα A του οποίου το S θα ήταν γνήσιο υποσύνολο. Τότε, για $x \in \mathrm{A} - S$ θα ήταν $x \perp S$ και $\|x\| = 1$, το οποίο είναι άτοπο γιατί, λόγω της υπόθεσης, είναι $x = 0$. □

Παρατήρηση 1.5.1. Από την Πρόταση 1.5.1 προκύπτει ότι σε ένα χώρο X με εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να διευρύνουμε ένα όρθοκανονικό σύστημα S έτσι ώστε να συμπεριλάβει όλα τα σημεία του $x \neq 0$ που είναι κάθετα στο S και μάλιστα μέχρι να γίνει πλήρες (βλ. Πρόταση 16, Κεφ. 9, [Αρτεμιάδης]).

Επομένως:

Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο περιλαμβάνει ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα.

Θεώρημα 1.5.1. Ένας χώρος Hilbert H είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν υπάρχει ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα $\{e_i\}_{i \geq 1}$.

Μπορούμε να δώσουμε ακόμα ένα πολύ χρήσιμο ορισμό της βάσης ενός χώρου με norm.

Ορισμός 1.5.2. Μια ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ λέγεται βάση ενός χώρου X με norm αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδική σειρά $\sum_{i \geq 1} a_i x_i$ η οποία συγκλίνει στο x. □

Θεώρημα 1.5.2. Ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ενός χώρου Hilbert H είναι μια βάση στον H.

Απόδειξη. Από την ανισότητα του Bessel έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathrm{H}$ το $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 < \infty$. Εξάλλου, για κάθε $x \in \mathrm{H}$ υπάρχει ένα στοιχείο $y = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i \in H$ (βλ. Πόρισμα 2.1.3 Μιλμαν). Αυτό συνεπάγεται ότι $(y - x) \perp e_i$ για όλα τα i. Από το Λήμμα 2.1.6, έπεται ότι $y = x$, οπότε, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$. Τέλος, αν $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$, τότε $\langle x, e_i \rangle = a_i$, οπότε η μοναδικότητα είναι προφανής. □

Πόρισμα 1.5.1. Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert έχει μια ορθοκανονική βάση.

Θεώρημα 1.5.3. (**Ανισότητα του** Parseval) Έστω $\{e_i\}_{i\geq 1}$ ένα ορθοκανονικό σύστημα σε ένα χώρο Hilbert H. Τότε, το $\{e_i\}_{i\geq 1}$ είναι μια βάση στον H αν και μόνο αν για κάθε $x \in H$,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Απόδειξη. Αν $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$, τότε

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Για το αντίστροφο, έχουμε

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 \to 0,$$

καθώς το $n \to \infty$, οπότε $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Ας επιτρέψουμε στους διαχωρίσιμους χώρους Hilbert. Υπενθυμίζουμε ότι ένας τέτοιος χώρος περιέχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο το οποίο είναι πυκνό στο χώρο. Οι διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert εκτός του ότι είναι απλούστεροι από τους μη διαχωρίσιμους, αφού δεν περιέχουν μη αριθμήσιμα ορθογώνια σύνολα, είναι και ιδιαίτερα ενδιαφέροντες αφού όπως θα δούμε στη συνέχεια υπάρχουν δύο μόνο τύποι διαχωρίσιμων χώρων Hilbert ένας πεπερασμένης διάστασης ο οποίος είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{C}^n$ και ένας άπειρης διάστασης ο οποίος είναι ισόμορφος με τον ℓ^2 (βλ. Θεώρημα 1.6.3).

Θεώρημα 1.5.4. Έστω H ένας χώρος Hilbert. Τότε:

(i) Αν ο H είναι διαχωρίσιμος, κάθε ορθοκανονικό σύνολο στον H είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν ο H περιέχει μια ορθοκανονική ακολουθία η οποία είναι πλήρες σύνολο, τότε ο H είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη. (βλ. Θεώρημα 3.6-4 Kreyszing)

1.6 Ισόμορφοι Χώροι Hilbert

Για μα χρησιμοποιήσουμε τους χώρους Hilbert σε εφαρμογές πρέπει να γνωρίζουμε ποό από τα πλήρη ορθοκανονικά σύνολα του χώρου πρέπει να επιλέξουμε σε μια συγκεκριμένη περίπτωση και ποιές ιδιότητες έχουν τα στοιχεία του. Προς αυτή την κατεύθυνση χρειάζεται λεπτομερής μελέτη και σε ορισμένες περιπτώσεις συναρτησιακών χώρων με ιδιαίτερο ενδιαφέρον το πρόβλημα αυτό έχει επιλυθεί (βλ. Παραδείγματα ....$Legendre$, $Hermite$, $Laguerre$) Ωστόσο, είναι μεγάλης σημασίας και έχει μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον η αναζήτηση μιας βάσης πάνω στην οποία θα μπορούσε να στηριχθεί μια ταξινόμιση των χώρων Hilbert. Γενικά μιλώντας τίθενται πάλι τα ερωτήματα, που παραπάνω θέσαμε για τους διαχωρίσιμους χώρους, δηλαδή, πόσοι είναι οι χώροι Hilbert και αν μπορούν να ταξινομηθούν με κάποιο κριτήριο.

Θα χρειαστεί να μελετήσουμε πρώτα τους ισομορφισμούς των χώρων Hilbert. Εδώ, ο ορισμός του ισομορφισμού μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Ορισμός 1.6.1. Ένας **ισομορφισμός** ενός χώρου Hilbert Η επί ενός άλλου χώρου Hilbert $\tilde{H}$, πάνω στο ίδιο σώμα βαθμωτών, είναι μια 1-1 και επί γραμμική απεικόνιση T : Η $\to \tilde{H}$ (δηλαδή ένας 1-1 και επί γραμμικός τελεστής, βλ. Ορισμός **??**) η οποία διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή

$$\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad (1)$$

για όλα τα $x, y \in$ Η.
Τότε, ο $\tilde{H}$ λέγεται **ισομορφικός** (ή **ισόμορφος**) με τον H, και οι Η, $\tilde{H}$ λέγονται **ισομορφικοί χώροι**.
Επιπλέον, η Τ είναι μια **ισομετρία**, γιατί οι αποστάσεις στους Η και $\tilde{H}$ ορίζονται από τις αντίστοιχες norms και αυτές από τα εσωτερικά γινόμενα των H και $\tilde{H}$.

Έχουμε συμβολίσει τα εσωτερικά γινόμενα στους χώρους Η και $\tilde{\mathrm{H}}$ με το ίδιο σύμβολο όχι μόνο για λόγους απλότητας αλλά για ουσιαστικότερους λόγους αφού θα δούμε στη συνέχεια ότι όταν αναφερόμαστε σε ισομορφικούς χώρους στην πραγματικότητα μιλάμε για τον ίδιο χώρο. Ωστόσο, στη συνέχεια θα συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο δυο στοιχείων x, y ενός χώρου Hilbert με $\langle x, y\rangle_H$.
□

Παρατήρηση 1.6.1. Το γεγονός ότι η απεικόνιση Τ είναι 1-1 και επί εξασφαλίζει ότι η Τ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των διανυσματικών χώρων X και $\tilde{X}$ με εσωτερικό γινόμενο, που σημαίνει ότι διατηρεί ολόκληρη τη δομή ενός χώρου. Επίσης, επειδή η Τ είναι ισομετρία, δυο ισομετρικά ισόμορφοι χώροι Hilbert έχουν ταυτόχρονα κάθε ιδιότητα που οίζεται μέσω της norms, οπότε αλγεβρικά και μετρικά οι χώροι αυτοί δεν είναι διακριτοί. Είναι δηλαδή *ίδιοι* εκτός από τη φύση των στοιχείων τους, οπότε μπορούμε να λέμε ότι είναι δυο αντίγραφα του ίδιου χώρου. Γιαυτό πολλές φορές λέμε ότι **ταυτίζονται** ή ακόμα και ότι είναι **ίσοι**. Για παράδειγμα αν ένας χώρος είναι ισομορφικός με τον Ευκλείδειο χώρο μπορούμε να φανταζόμαστε ότι είναι ο ίδιος ο Ευκλείδειος χώρος με στοιχεία ίσως μιας άλλλης φύσης αλλά συμπεριφερόμενα σαν διανύσματα. Το πιο συναρπαστικό στη συζήτηση αυτή και σε συνδιασμό με τα ερωτήματα που θέσαμε παραπάνω, δηλαδή την αναζήτηση κριτηρίων με βάση τα οποία θα μπορούσαμε να ταξινομήσουμε τους χώρους Hilbert, τα κριτήρια είναι μόνο δυο, η διάσταση του χώρου και το αν ο χώρος είναι πραγματικός ή μιγαδικός. Συγκεκριμένα, για κάθε διάσταση Hilbert υπάρχει ακριβώς ένας αφηρημένος πραγματικός και ένας αφηρημένος μιγαδικός χώρος ή με άλλα λόγια δυο αφηρημένοι χώροι Hilbert πάνω στο ίδιο σώμα διακρίνονται μόνο από την διάστασή τους. Συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.6.1. Δύο χώροι Hilbert H και $\tilde{H}$ είναι ισομορφικοί αν και μόνο αν υπάρχει ένας ισομορφισμός $T : H \to \tilde{H}$ ο οποίος διατηρεί τις norms, δηλαδή τέτοιος ώστε

$$\|\mathrm{T}(x)\|_{\tilde{H}} = \|x\|_H, \ \forall\ x \in H.$$

Απόδειξη. Αν ο T είναι ισομορφισμός, τότε είναι ισομετρία, οπότε, για κάθε $x \in H$, έχουμε

$$\|\mathrm{T}(x)\|_{\tilde{H}} = \|\mathrm{T}(x) - T(0)\|_{\tilde{H}} = \|x - 0\|_H = \|x\|_H.$$

Αντίστροφα, αν $T : H \to \tilde{H}$ είναι ένας ισομορφισμός που διατηρεί τις norms, λόγω της γραμμικότητας, για κάθε $x, y \in H$, έχουμε

$$\|\mathrm{T}(x) - T(y)\|_{\tilde{H}} = \|\mathrm{T}(x - y)\|_{\tilde{H}} = \|x - y\|_H,$$

δηλαδή ο T είναι ισομετρία. □

Παρατήρηση 1.6.2. Δεν είναι απαραίτητο δυο χώροι με εσωτερικό γινόμενο να είναι πλήρεις για να είναι ισομορφικοί.

Το θεώρημα που ακολουθεί μας λέει ότι, ουσιαστικά, υπάρχει ένας μόνο τύπος απειροδιάστατων διαχωρίσιμων χώρων Hilbert.

Θεώρημα 1.6.2. Δύο οποιδήποτε απειροδιάστατοι διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert H και $\tilde{H}$ και οι δυο πραγματικοί (ή και οι δυο μιγαδικοί), είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος με εσωτερικό γινόμενο έχει αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση. Ας υποθέσουμε ότι $\mathrm{B} = \{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ και $\widetilde{B} = \{\tilde{e}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονικές βάσεις των απειροδιάστατων διαχωρίσιμων χώρων Hilbert H και $\tilde{H}$ οι οποίοι είναι ταυτόχρονα και οι δύο πραγματικοί (ή και οι δύο μιγαδικοί). Τότε, για το τυχόν $x \in H$ υπάρχουν $c_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ τέτοιοι ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, όπου $c_n = \langle x, e_n\rangle_H$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα 1.5.3 είναι επίσης γνωστό ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2 < \infty,$$

οπότε αν εφαρμόσουμε το Θεωρ. 1 παρ. 3 Καρυοφ. στον $\tilde{H}$ έχουμε $\tilde{x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \tilde{e}_n$.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : H \to \tilde{H}$, όπου σε κάθε $x \in H$ αντιστοιχεί το $\tilde{x} \in \tilde{H}$ για το οποίο ισχύει

$$\langle \tilde{x}, \tilde{e}_n\rangle_{\tilde{H}} = \langle x, e_n\rangle_H,\ \forall\ n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή σε κάθε $x \in H$ αντιστοιχεί το $\tilde{x} \in \tilde{H}$ το οποίο έχει τους ίδιους συντελεστές Fourier με το x.
Φαίνεται εύκολα ότι η f είναι 1-1. Επίσης, για κάθε $x_1, x_2 \in H$ και κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(ax_1 + bx_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle ax_1 + bx_2, e_n\rangle_H \tilde{e}_n \\ &= a\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_1, e_n\rangle_H \tilde{e}_n + b\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_2, e_n\rangle_H \tilde{e}_n \\ &= af(x_1) + bf(x_2), \end{aligned}$$

οπότε η f είναι ισομορφισμός.
Το γεγονός ότι $\|x\|_H = \|f(x)\|_{\tilde{H}}$, προκύπτει άμεσα και από το Θεώρημα 1.6.1.

Το θεώρημα που ακολουθεί μας λέει ότι, ουσιαστικά, υπάρχουν δύο μόνο τύποι διαχωρίσιμων χώρων Hilbert.

Θεώρημα 1.6.3. Έστω H ένας διαχωρίσμος χώρος Hilbert. Τότε:

(i) Αν ο H είναι πεπερασμένης διάστασης είναι ισομορφικός με τον χώρο C^n.

(ii) Αν ο H είναι απειροδιάστατος είναι ισομορφικός με τον χώρο ℓ^2.

Απόδειξη.(i) προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 1.6.2 αν επαναλάβουμε την απόδειξη αντικαθιστώντας τις εμφανιζόμενες άπειρες σειρές με πεπερασμένα αθροίσματα.
(ii) Γνωρίζουμε ότι ο χώρος ℓ^2 είναι είναι ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, οπότε το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 1.5.1. □

Θεώρημα 1.6.4. Δύο χώροι Hilbert H και $\tilde{H}$, και οι δυο πραγματικοί ή και οι δυο μιγαδικοί, είναι ισομορφικοί αν και μόνο αν έχουν την ίδια διάσταση.
Απόδειξη. (βλ. Θεώρ. Kreyszig 3.6-5)

Μια πρώτη εφαρμογή του Θεωρήματος 1.6.3 είναι να αποδείξουμε ότι κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο μπορεί να γίνει πλήρης, δηλαδή χώρος Hilbert, κατά μοναδικό τρόπο εκτός από τους ισομορφισμούς. Σχετικά με την πλήρωση ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.6.5. Για κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο X υπάρχει ένας χώρος Hilbert H και ένας ισομορφισμός A από τον X σε ένα πυκνό υπόχωρο $W \subset$ H. O χώρος H είναι μοναδικός εκτός από τις ισομετρίες.
Απόδειξη. (βλ. Θεώρημα 3.2-3 Kreyszig).

Ορισμός 1.6.2. Ένας **υπόχωρος** Y ενός χώρου Hilbert H είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του H θεωρούμενος ως ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο.
Δεν είναι απαραίτητο ο Y να είναι χώρος Hilbert γιατί μπορεί να μην είναι πλήρης.
□

Σχετικά με τους υπόχωρους χώρων Hilbert ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.6.6. Έστω Y ένας **υπόχωρος** ενός χώρου Hilbert H. Τότε:

(i) O Y είναι πλήρης αν και μόνο αν το Y είναι κλειστό στο H.

(ii) Αν το Y είναι πεπεραμένης διάστασης τότε ο Y είναι πλήρης.

(iii) Αν ο H είναι διαχωρίσιμος, τότε είναι και ο Y. Γενικότερα, κάθε υποσύνολο ενός διαχωρίσιμου χώρου με εσωτερικό γινόμενο είναι διαχωρίσιμο.

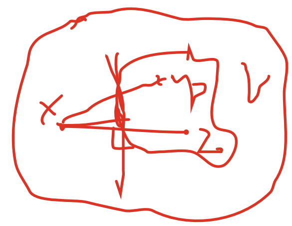
Απόδειξη. Για τα (i) και (ii) βλ. Θεωρήματα **??** και **??**. Το (iii) αφίνεται ως άσκηση.

1.7 Κυρτότητα - Προβολές σε Χώρους Hilbert

Ορισμός 1.7.1. Σε ένα μετρικό χώρο X η **απόσταση** ενός στοιχείου $x \in X$ από ένα μη κενό υποσύνολο $V \subset X$ συμβολίζεται με $d(x, V)$ και ορίζεται να είναι

$$d(x, V) = \inf_{y \in V} d(x, y).$$

X



Σε ένα χώρο με norm η σχέση αυτή γράφεται

$$d(x, V) = \inf_{y \in V} \|x - y\|.$$

Αν το $x \in V$, τότε $d(x, V) = 0$, ωστόσο αν το $x \notin V$, τότε $d(x, V) > 0$. □

Ένα πολύ ενδιαφέρον ερώτημα που τίθεται είναι το αν υπάρχει και πότε ένα $y_0 \in V$ τέτοιο ώστε

$$d(x, V) = \inf_{y \in V} d(x, y_0),$$

$\Longleftrightarrow x = y_0$ μον

δηλαδή, διαισθητικά μιλώντας, ενδιαφερόμαστε για το αν και πότε υπάρχει ένα σημείο y_0 του V το οποίο βρίσκεται πλησιέστερα σε ένα δοσμένο x από όλα τα σημεία του και αν είναι μοναδικό. Τίθεται, δηλαδή, ένα *πρόβλημα ύπαρξης και μοναδκότητας* το οποίο είναι θεμελιώδους σημασίας τόσο από θεωρητικής πλευράς όσο από την πλευρά των εφαρμογών. Ωστόσο, το πρόβλημα αυτό δεν είναι εύκολο ακόμα και σε πολύ απλές περιπτώσεις, αλλά και σε κάποιες άλλες που είναι εύκολο δεν μπορεί να εξασφαλιστεί η μοναδικότητα. Το παράδειγμα που ακολουθεί αποτελεί μια επιβεβαίωση των παραπάνω.

Παράδειγμα 1.7.1. Έστω $V \subset \mathbb{R}^2$ και δοθέν $x \in \mathbb{R}^2$.

(i) Αν το V είναι ένα ανοικτό διάστημα (a, b) και η κάθετος από το x στο (a, b) τέμνει το (a, b), τότε το σημείο αυτό της τομής είναι το μοναδικό σημείο $y_0 \in (a, b)$ το οποίο βρίσκεται πλησιέστερα στο x. Αν η κάθετος από το x στο (a, b) δεν τέμνει το (a, b) τότε δεν υπάρχει y_0.

(ii) Αν το V είναι ένα τόξο κάποιου κύκλου και το δοθέν $x \in \mathbb{R}^2$ είναι το κέντρο του κύκλου, τότε υπάρχουν άπειρα σημεία y_0, ενώ αν το x είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου μπορεί να υπάρχει μοναδικό y_0 μπορεί και να μην υπάρχει.

Από το παραπάνω παράδειγμα δημιουργείται η εντύπωση ότι σε άλλους χώρους πιό γενικούς, ιδιαίτερα σε χώρους άπειρης διάστασης, η κατάσταση γίνεται πιό περίπλοκη και το πρόβλημα προφανώς πιό δύσκολο και αυτή είναι η πραγματικότητα. Ωστόσο, οι χώροι Hilbert μας εκπλήσσουν ευχάριστα και σε αυτή την περίπτωση όπως θα δούμε στη συνέχεια η κατάσταση παραμένει σχετικά απλή. Θα χρειαστούμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 1.7.2. Έστω X γραμμικός χώρος. Ένα υποσύνολο $\mathrm{E} \subset X$ λέγεται **κυρτό** τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $x, y \in \mathrm{E}$ και $t \in [0,1]$ το $z = tx + (1-t)y \in E$.

- Αν X είναι ένας διανυσματικός χώρος, τότε κάθε γραμμικός υπόχωρός του είναι ένα κυρτό σύνολο.
- Η τομή μιας οποιασδήποτε συλλογής κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο.
- Αν H είναι ένας χώρος Hilbert, τότε κάθε ανοικτή μπάλα και κάθε κλειστή μπάλα του είναι κυρτό σύνολο (βλ. Παράδειγμα 1.7.2). □

Παράδειγμα 1.7.2. Οι μπάλες ενός χώρου X με norm είναι κυρτά σύνολα.
Απόδειξη. Έστω $B(x_0, r)$ μία μπάλα κέντρου $x_0 \in X$ και ακτίνας r, και $x, y \in B(x_0, r)$. Τότε

$$\|x - x_0\| < r, \ \|y - y_0\| < r.$$

Γιά κάθε $a \in [0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|ax + (1-a)\,y - x_0\| &= \|(x - x_0)\,a + (1-a)\,(y - x_0)\| \\ &\leqslant a\,\|x - x_0\| + (1-a)\,\|y - x_0\| \\ &\leqslant ar + (1-a)\,r = r. \end{aligned}$$

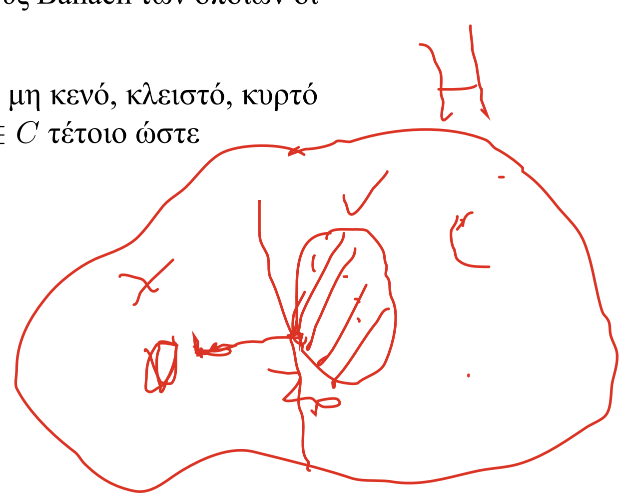
Άρα, $ax + (1-a)y \in B(x_0, r)$.

Ορισμός 1.7.3. Ένας υπόχωρος V ενός γραμμικού χώρου X λέγεται **κυρτός** τότε και μόνο τότε όταν το σύνολο V είναι κυρτό. □

Τα δύο θεωρήματα που ακολουθούν επιβεβαιώνουν με μια γεωμετρική ερμηνεία ότι οι χώροι Hilbert συμπεριφέρονται σαν Ευκλείδειοι χώροι. Το γεγονός αυτό δεν είναι τυχαίο αφού αποτελούν άμεση γενίκευση των Ευκλείδειων χώρων και βρίσκονται πολύ πιό κοντά σε αυτούς από τους χώρους Banach των οποίων οι norms δεν παράγονται από εσωτερικό γινόμενο.

Θεώρημα 1.7.1. Έστω H ένας χώρος Hilbert και C ένα μη κενό, κλειστό, κυρτό υποσύνολο του H. Τότε, υπάρχει μοναδικό στοιχείο $z_0 \in C$ τέτοιο ώστε

$$\|z_0\| \leq \|z\|, \ \forall\ z \in C.$$



Απόδειξη. Θέτουμε $\lambda = \{\inf\|z\| \,:\, z \in C\|$. Τότε, υπάρχει ακολουθία $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ στο C, τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \|z_n\| = \lambda$. Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου (βλ. Θεώρημα 1.1.1) προκύπτει

$$\begin{aligned} \|z_n - z_m\|^2 &= 2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2 - \|z_n + z_m\|^2 \\ &= 2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2 - 4\|\frac{z_n + z_m}{4}\|^2. \end{aligned}$$

Αφού το C είναι κυρτό, το $(z_n + z_m)/2$ ανήκει στο C, οπότε $\|(z_n + z_m)/2\| \geq \lambda$. Άρα,

$$\|z_n - z_m\|^2 \leq 2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2 - 4\lambda^2.$$

Αφού το δεξιό μέλος της ανισότητας αυτής τείνει στο 0 όταν τα $n, m \to \infty$ έπεται ότι η $\{z_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy, οπότε υπάρχει z_0 τέτοιο ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, οπότε $\lim\limits_{n\to\infty} \|z_n\| = \lambda = \|z_0\|$ και επειδή το C είναι κλειστό το $z_0 \in C$.
Για να αποδείξουμε ότι το z_0 είναι το μοναδικό στοιχείο του C που έχει αυτή την ιδιότητα, έστω $z \in C$ τέτοιο ώστε $\|z_0\| = \|z\| = \lambda$. Τότε από τον κανόνα του παραλληλογράμμου θα έχουμε

$$\|z_0 - z\|^2 \leq 2\|z_0\|^2 + \|z\|^2 - 4\lambda^2 = 0,$$

που σημαίνει ότο $z = z_0$. □

Ορισμός 1.7.4. Έστω C ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert H και ένα σημείο $x \in$ H. Η απεικόνιση $\mathrm{P}_C : H \to C$, που ορίζεται από την $\mathrm{P}_C(x) = x_0$, όπου x_0 είναι η μοναδική λύση του προβλήματος $\inf_{z\in C} \|x - z\|$, λέγεται **προβολικός** τελεστής (βλ. Ορισμός **??**) στον C.
Η λύση x_0 του προβλήματος $\inf_{z\in C} \|x - z\|$ (αν υπάρχει, δηλαδή αν το infimum λαμβάνεται) λέγεται **προβολή** του x πάνω στον C.
Είναι προφανές ότι $\mathrm{P}_C(x) = x$, για κάθε $x \in C$. □

Θεώρημα 1.7.2. Έστω H ένας χώρος Hilbert και C ένα μη κενό, κλειστό, κυρτό υποσύνολο του H. Τότε, για κάθε $x \in$ H υπάρχει μοναδικό στοιχείο $x_0 \in C$ τέτοιο ώστε

$$\|x - x_0\| = \min_{z\in C} \|x - z\|. \qquad (1)$$

Επί πλέον, το x_0 καθορίζεται ως η μοναδική λύση της ανισότητας

$$\langle x - x_0,\, z - x_0\rangle \leqslant 0,\ \forall\, z \in C. \qquad (2)$$

στο C.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.6.6 ο υπόχωρος C είναι πλήρης. Έστω $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ελαχιστοποιητική ακολουθία για την (1), δηλαδή, $x_n \in C$ και

$$d_n = \|x - x_n\| \to d = \inf_{z \in C} \|x - z\|.$$

Θα αποδείξουμε ότι η $\{x_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του παραλληγράμμου, παίρνουμε

$$2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2) = \|2x - (x_n + y_m)\|^2 + \|x_n - x_m\|^2.$$

Επειδή, $\frac{x_n + x_m}{2} \in C$ (λόγω της κυρτότητας του C), ισχύει

$$\|2x - (x_n + x_m)\| \geq 2d,$$

οπότε από την τελευταία ισότητα παίρνουμε

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2(d_n^2 + d_m^2) - 4d^2.$$

και

$$\lim_{m,n \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0.$$

Συνεπώς, υπάρχει $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n \in C$ (επειδή το C είναι κλειστό) και $d = \|x - z\|$. Το x_0 είναι μοναδικό γιατί αν υπήρχαν δυο σημεία x_0 και x_0' τέτοια ώστε

$$\|x - x_0\| = \|x - x_0'\| = \min_{z \in C} \|x - z\|,$$

μπορούμε να επιλέξουμε $x_{2n} = y$ και $x_{2n+1} = y$ και τότε η $\{x_n\}$ δεν θα είναι ακολουθία Cauchy, το οποίο είναι άτοπο.

Θα αποδείξουμε την ισοδυναμία των (1) και (2). Έστω $x_0 \in C$ που ικανοποιεί την (1) και τυχόν $w \in C$. Τότε, το $z = (1 - t)x_0 + tw \in C$, για κάθε $t \in (0, 1]$ (λόγω της κυρτότητας του C) και άρα

$$\|x - x_0\| \leq \|x - [(1 - t)x_0 + tw]\| = \|(x - x_0) - t(w - x_0)\|.$$

Επομένως,

$$\|x - x_0\|^2 \leq \|x - x_0\|^2 - 2t\langle x - x_0,\, w - x_0\rangle + t^2\|w - x_0)\|^2,$$

οπότε

$$2\langle x - x_0,\, w - x_0\rangle \leq t\|w - x_0\|^2.$$

Από την τελευταία, για $t \to 0$, παίρνουμε την (2).

Αντίστροφα, αν το x_0 ικανοποιεί την (2) τότε

$$\|x - x_0\|^2 - \|x - z\|^2 = 2\langle x - x_0,\, z - x_0\rangle - \|x - z\|^2 \leq 0,$$

οπότε $\|x - x_0\| \leq \|x - z\|$ και επειδή το z είναι τυχόν ισχύει η (1). □

Παρατήρηση 1.7.1. Η μοναδικότητα του x_0 στο Θεώρημα 1.7.2 προκύπτει και από τη (2) ως εξής:
Έστω ότι υπήρχαν δυο σημεία x_0 και x_0' που ικανοποιούν την (2). Τότε θα έχουμε

$$\langle x - x_0,\, z - x_0\rangle \leqslant 0,\ \forall\, z \in C. \qquad (3)$$

$$\langle x - x_0',\, z - x_0'\rangle \leqslant 0,\ \forall\, z \in C. \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας $z = x_0'$ στην (3) και $z = x_0$ στην (4), παίρνουμε με πρόσθεση κατά μέλη $\|x_0 - x_0'\|^2 \leq 0$, οπότε $x_0 = x_0'$.

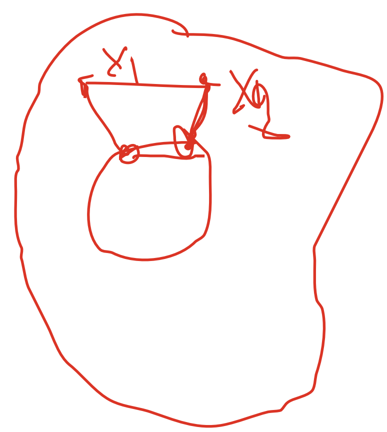
Αποδείξαμε (βλ. Θεώρημα 1.7.2) ότι αν C είναι ένα μη κενό, κλειστό, κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert H τότε η προβολή $x_0 = \mathrm{P}_C(x)$ του τυχόντος σημείου $x \in H$ στον C υπάρχει και είναι μοναδική. Επομένως, ορίζεται μια απεικόνιση $\mathrm{P}_C : \mathrm{H} \to C$, η οποία σε κάθε $x \in X$ αντιστοιχίζει την προβολή του $x_0 \in C$.

Πρόταση 1.7.1. Έστω H ένας χώρος Hilbert και C ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολό του. Τότε, ο προβολικός τελεστής $\mathrm{P}_C : H \to C$ έχει την ιδιότητα

$$\|\mathrm{P}_C(x_1) - \mathrm{P}_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|,\ \ \forall\ x_1, x_2 \in H.$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα 1.7.2 έχουμε

$$\langle x_1 - \mathrm{P}_C(x_1),\, z - \mathrm{P}_C(x_1)\rangle \leq 0,\ \ \forall z \in C,$$



οπότε για $z = \mathrm{P}_C(x_2)$ παίρνουμε

$$\langle x_1 - \mathrm{P}_C(x_1),\, \mathrm{P}_C(x_2) - \mathrm{P}_C(x_1)\rangle \leq 0. \quad (*)$$

Όμοια

$$\langle x_2 - \mathrm{P}_C(x_2),\, z - \mathrm{P}_C(x_2)\rangle \leq 0,\ \ \forall z \in C,$$

οπότε για $z = \mathrm{P}_C(x_1)$ παίρνουμε

$$\langle x_2 - \mathrm{P}_C(x_2),\, \mathrm{P}_C(x_1) - \mathrm{P}_C(x_2)\rangle \leq 0. \quad (**)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (*) και (**) παίρνουμε

$$\langle x_1 - x_2 - (\mathrm{P}_C(x_1) - \mathrm{P}_C(x_2)), \mathrm{P}_C(x_1) - \mathrm{P}_C(x_2)\rangle \leq 0$$

η οποία δίνει την

$$\langle x_1 - x_2, \mathrm{P}_C(x_1) - \mathrm{P}_C(x_2)\rangle \geq \|\mathrm{P}_C(x_1) - \mathrm{P}_C(x_2\|^2.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz στην τελευταία παίρνουμε την ζητούμενη ανισότητα. □

Παρατήρηση 1.7.2. Από την Πρόταση 1.7.1 προκύπτει άμεσα ότι

$$\|\mathrm{P}_L(x)\| \leq \|x\|, \ \forall\ x \in H,$$

το οποίο αποτελεί γενίκευση της γνωστής ανισότητας:
Το μήκος της προβολής ενός ευθυγράμμου τμήματος πάνω σε ένα επίπεδο του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου είναι μικρότερο ή ίσο του μήκους του.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε μερικές βασικές ιδιότητες στην ειδική περίπτωση ενός κλειστού γραμμικού υπόχωρου L του X.

Ορισμός 1.7.5. Έστω L ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Το σύνολο

$$L^{\perp} = \{x \in H : x \perp L\},$$

λέγεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του L. □

Θεώρημα 1.7.3. Έστω L ένας γραμμικός κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert και $x \in X$. Τότε το $x_0 = \mathrm{P}_L(x)$ καθορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\langle x - x_0,\, z\rangle = 0, \ \ \forall\, z \in L$$

στο L.
Δηλαδή, το σημείο $x_0 = \mathrm{P_L(x)}$ είναι το μοναδικό σημείο του L για το οποίο το

$$x - x_0 \perp z, \ \forall\ z \in L.$$

Επί πλέον, ο P_L είναι ένας γραμμικός τελεστής.

Απόδειξη. Αποδείξαμε ότι η προβολή x_0 του x στον L ικανοποιεί την ανισότητα (βλ. Θεώρημα 1.7.2)

$$\langle x - x_0,\, z' - x_0\rangle \leqslant 0, \ \forall z' \in L. \qquad (3)$$

Έστω τυχόν $z \in L$. Αν επιλέξουμε το $z' = x_0 + z$, λόγω της γραμμικότητας του L, το $z' \in L$, οπότε από την (3) παίρνουμε

$$\langle x - x_0,\, z\rangle \leqslant 0. \qquad (4)$$

Αν επιλέξουμε το $z' = x_0 - z$ πάλι λόγω της γραμμικότητας του L, το $z' \in L$, οπότε από την (3) παίρνουμε

$$\langle x - x_0,\, z\rangle \geq 0. \qquad (5)$$

Από τις (4) και (5) παίρνουμε ότι $\langle x - x_0,\, z\rangle = 0$, για όλα τα $z \in L$.

Θεωρούμε το γραμμικό συνδιασμό $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in H$ και την προβολή $x_0 = \mathrm{P}_L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$. Αφού ο L είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H, η προβολή $\mathrm{P}_L(x)$ είναι το μοναδικό στοιχείο του L που ικανοποιεί την ανισότητα

$$\langle x - x_0,\, z\rangle = 0,\ \forall\ z \in C. \qquad (6)$$

Εξάλλου έχουμε

$$\begin{aligned} \langle x - (\lambda_1 \mathrm{P}_L(x_1) + \lambda_2 \mathrm{P}_L(x_2)),\, z\rangle &= \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - (\lambda_1 \mathrm{P}_L(x_1) + \lambda_2 \mathrm{P}_L(x_2)),\, z\rangle \\ &= \lambda_1 \langle x_1 - \mathrm{P}_L(x_1)\rangle + \lambda_2 \langle x_2 - \mathrm{P}_L(x_2)\rangle = 0. \end{aligned}$$

Από την κλειστότητα του L έπεται ότι, $\lambda_1 \mathrm{P}_L(x_1) + \lambda_2 \mathrm{P}_L(x_2) \in L$ και αφού η τελευταία ανισότητα ισχύει για όλα τα $z \in L$ λόγω της μοναδικότητας της προβολής έχουμε ότι $\mathrm{P}_L(x) = \lambda_1 \mathrm{P}_L(x_1) + \lambda_2 \mathrm{P}_L(x_2)$, οπότε ο $\mathrm{P}_L(x)$ είναι γραμμικός τελεστής.

Πρόταση 1.7.2. Έστω L ένας γραμμικός κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert και $x \in X$. Τότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in C$ τέτοιο ώστε

$$\|x\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0\|^2.$$

Απόδειξη. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in L$ τέτοιο ώστε $x - x_0 \perp z$, για κάθε $z \in L$ (βλ. Θεώρημα 1.7.3), οπότε $x - x_0 \perp x_0$ και επειδή $x = (x - x_0) + x_0$, το αποτέλεσμα προκύπτει από το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Θεώρημα 1.7.4. Για κάθε γραμμικό κλειστό υπόχωρο L ενός χώρου Hilbert H, ισχύει

$$L \oplus L^{\perp} = H.$$

Επομένως, κάθε $x \in H$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως αθροισμα δυο στοιχείων $x_0 \in L$ και $z_0 \in L^{\perp}$, όπου $x_0 = \mathrm{P}_L(x)$ και $z_0 = \mathrm{P}_{L^{\perp}}(x)$.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in H$ και κάθε κλειστό υπόχωρο L του H η προβολή $x_0 = \mathrm{P}_L(x)$ ικανοποιεί την

$$\langle x - x_0,\, z\rangle = 0,\ \forall\ z \in L,$$

οπότε το $z_0 = x - x_0 \in L^{\perp}$.

Προφανώς, είναι

$$x = x_0 + z_0,$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι το $z_0 = \mathrm{P}_{L^\perp}(x)$.
Γράφουμε το x_0 στη μορφή $x_0 = -(z_0 - x) \in L$, οπότε

$$\langle x_0,\, z\rangle = 0,\ \forall\ z \in L^\perp.$$

Άρα

$$\langle z_0 - x,\, z\rangle = 0,\ \forall\ z \in L^\perp,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $z_0 = \mathrm{P}_{L^\perp}(x)$.
Επίσης, είναι $L \cap L^\perp = 0$, οπότε αν $x = x_0' + z_0'$, $x_0' \in L$ και $z_0' \in L^\perp$, τότε $x_0' = x_0$ (λόγω της μοναδικότητας της προβολής) και επομένως, $z_0' = z_0$.

Πόρισμα 1.7.1. Αν L ένας γραμμικός κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$(L^\perp)^\perp = L.$$

Πόρισμα 1.7.2. Αν L ένας γραμμικός κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$\mathrm{P}_L \circ \mathrm{P}_L = \mathrm{P}_L.$$

Βιβλιογραφία

[1] R. A. Adams and J. J. J. Fournier, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 2003.

[2] N. K. Αρτεμιάδης, Συναρτήσεις Πραγματικών μεταβλητών, Πάτρα, 1977.

[3] Th. Aubin, *Some non linear problems in Riemannian Geometry*, Springer, Berlin, 1998.

[4] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2011.

[5] D. L. Cohn, Measure theory, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks], Birkhäuser/Springer, New York, second ed., 2013.

[6] John B. Conway, A Course in Functional Analysis, Second Edition, Springer, 1989.

[7] Γ. Δάσιος, Ασκήσεις Γενικής Τοπολογίας, Αθήνα, 1987.

[8] Γ. Δάσιος, Δέκα Διαλέξεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001.

[9] Γ. Δάσιος, K. Κυριάκη, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1994.

[10] K. Δρόσος, Π. Σιαφαρίκας, Βασική Αφηρημένη Ανάλυση, Πάτρα, 1997.

[11] G. de Barra, measure theory and integration, Ellis Horwood Ltd., 1981.

[12] A. Εσκενάζη: Σημειώσεις Θεωρίας Μέτρου, ΕΚΠΑ, Αθήνα 2014.

[13] L. C. Evans and R. F. Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions, CRC Press, 1992.

[14] B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, Counterexamples in Analysis, Dover Publications, Inc., 2003.

[15] J. Jost, Postmodern Analysis, (Third Edition), Springer, 2005.

[16] L. Hörmander. The analysis of linear partial differential operators, Vol. I. Springer-Verlag, second edition, 1990.

[17] Χ. Γ. Καρυοφύλης, Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης, Εκδόσεις Ζήτη, 1995.

[18] Kolmogorov A. N., Fomin, S. V., Elements of the theory of functions and functional analysis 1. Translated by Boron, Leo F. Rochester, N. Y. Graylock Press, (1957), (1954).

[19] D. C. Kravvaritis, A. N. Yannacopoulos, Variational Methods in Nonlinear Analysis, De Gruyter, 2019.

[20] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons Inc., 1978.

[21] S. S. Kutate1adze, Fundamentals of Functional Analysis, (Translated from Russian Edition), 1996 Springer Science+Business Media Dordrecht, 1996.

[22] Y. Eidelman, V. Milman, A, Tsolomitis, Functional Analysis An Introduction, AMS, 2004.

[23] Ι. Σαραντόπουλος, Σημειώσεις θεωρίας Μέτρου και Ολοκλήρωσης, ΕΜΠ ΣΕΜΦΕ, 2008.

[24] Le Dret H. and Lucquin B., Partial Differential Equations: Modeling, Analysis and Numerical Approximation, Birkhäuser, Springer, (2016).

[25] I. M. Guelfand, G. E. Shilov, Space of fundamemtal and Generalized Function, Nauka, Moscov 1958 (in Russian), English edition: Academic Press, New York, 1968.

[26] M. Renardy,R. Rogers, An Introduction to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1992.

[27] Narici, L., Beckenstein, E., Topological Vector Spaces. Pure and applied mathematics (Sec. Ed.) Boca Raton, FL: CRC Press (2011)

[28] G.F. Roach, Green's Functions, Second Edition, Cambridge University Press, 1981 .

[29] W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd edn., McGraw-Hill Book Co., New York,1987.

[30] L. Schwartz, Theórie des Distribution I et II, Herman, Paris, 1950-1951.

[31] S. L. Sobolev, On a theorem in functional analysis Amer. Math. Soc. Translations (2) 34, 39-68 (1963); translated from Mat. Sb. (N.S.) 4 (46), 471-497 (1938).

[32] Ivar Stakgold, Green's Functions and Boundary value problems, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc, 1997.

[33] Σ. Τραχανάς, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001.

[34] Wikipedia, the free encyclopedia, George Green.

[35] S. Willard, General Topology, Dover Publications, (2004).