Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση
Μια Εισαγωγή

Νίκος Λαμπρόπουλος

14 Νοεμβρίου 2024

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Χώροι L^p - Χώροι ℓ^p

Είναι γνωστό ότι ένας μεγάλος αριθμός συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε σε διάφορους κλάδους τον μαθηματικών δεν είναι λείες (δηλαδή, C^k, $k \geq 1$), πολλές φορές δεν είναι ούτε καν συνεχείς. Το γεγονός αυτό επιβάλει την ανάπτυξη της θεωρίας των L^p χώρων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα θεωρήσουμε τους L^p χώρους, δηλαδή τους χώρους συναρτήσεων των οποίων οι p ($p \geq 1$) δυνάμεις των απολύτων τιμών τους είναι Lebesgue ολοκληρώσιμες, ωστόσο κάποια στοιχειώδης εξοικείωση με τη βασική θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης είναι απαραίτητη. Οι πιό συμαντικοί είναι ίσως οι L^1 και L^2 οι οποίοι είναι απαραίτητοι στον ορισμό και στις ιδιότητες των σειρών Fourier, αλλά και οι υπόλοιποι είναι πολύ σημαντικοί χώροι. Οι L^p χώροι είναι πλούσιοι σε καλές ιδιότητες και αυτό είναι ένας σημαντικός λόγος που αναδεικνύει τη σπουδαιότητά τους αλλά και εκείνη του ολοκληρώματος του Lebesgue. Η πυκνότητα, η ανακλαστικότητα, η διαχωρισιμότητα, η δυϊκότητα καθώς και η πληρότητα είναι οι ιδιότητες που κάνουν αυτούς τους χώρους ιδιαίτερα χρήσιμους. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τη βασική θεωρία αυτών των χώρων καθώς και κάποιες από τις ιδιότητες που σχετίζονται με τη θεωρία ολοκλήρωσης.

1.1 Χώροι L^p

Ορισμός και Ιδιότητες των Χώρων L^p, $1 \leq p < \infty$

Συμβολίζουμε με Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με το μέτρο Lebesgue dx και με $L^1(\Omega)$ το χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων πάνω στο Ω με τιμές στο $\mathbb{R}$.

Αν $f : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση θέτουμε

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

Αν δεν υπάρχει ενδεχόμενο σύγχισης συχνά γραφουμε αντί L^1 αντί $L^1(\Omega)$ και $\int_\Omega f$ (ή και $\int f$) αντί $\int_\Omega f(x)dx$.

Παρόλο που στο εξής σε πολλές περιπτώσεις θα εργαζόμαστε με L^p συναρτήσεις ορισμένες σε ένα ανοικτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^n$, θα ορίσουμε τους L^p χώρους και θα μελετήσουμε τις βασικές τους ιδιότητες σε ένα ευρύτερο θεωρητικό πλαίσιο, δηλαδή σε ένα γενικό χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και στη συνέχεια θα παραμείνουμε σε ένα $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $p \in \mathbb{R}$ με $0 \leq p < \infty$ και $f : X \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, θέτουμε

$$\|f\|_{L^p(X)} = \left(\int_X |f|^p dx\right)^{1/p}.$$

- Η συνάρτηση f λέγεται L^p **ολοκληρώσιμη** (ή λέμε ότι είναι μια L^p **συνάρτηση** ή απλά ότι είναι L^p) αν $\|f\|_{L^p(X)} < +\infty$.
- Ο **χώρος** $L^p(X)$ ορίζεται ως ο χώρος των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ για τις οποίες $\|f\|_{L^p(X)} < \infty$ ή ισοδύναμα, $|f|^p \in L^1(X)$.

Αν $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τότε τότε

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 dx}$$

και αν $\|f\|_{L^2(\Omega)} < \infty$, η συνάρτηση f λέγεται **τετραγωνικώς ολοκληρώσιμη** στο Ω και ο $L^2(\Omega)$ λέγεται χώρος των τετραγωνικώς ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Ο L^2 είναι ο μόνος από τους L^p χώρους στον οποίο ορίζεται εσωτερικό γινόμενο. Αν $f, g \in L^2(\Omega)$, τότε το εσωτερικό τους γινόμενο ορίζεται με την

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Αν $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, τότε

$$\|f\|_{L^2(U)} = \sqrt{\int_U f(x)\overline{f(x)}dx}$$

και αν $\|f\|_{L^2(U)} < \infty$, η συνάρτηση f λέγεται **τετραγωνικώς ολοκληρώσιμη** στο U.
Αν $f, g \in L^2(U)$, τότε το εσωτερικό τους γινόμενο ορίζεται με την

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx.$$

$\square$

Παρατήρηση 1.1.1. Η $\|f\|_{L^p(X)}$ είναι μια norm για κάθε $p \in \mathbb{R}$ με $1 \leq p < \infty$ (βλ. Θεώρημα 1.1.4), ενώ δεν είναι norm αν $0 < p < 1$ (βλ. Παράδειγμα 1.1.1).

Παρατήρηση 1.1.2. Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.1, ο $L^p(X)$ χώρος, $1 \leq p < \infty$, περιέχει όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$ για τις οποίες οι $|f|^p$ είναι ολοκληρώσιμες, δηλαδή, $\int_X |f|^p < \infty$. Αν για δύο συναρτήσεις f, $g : X \to \mathbb{R}$ έχουμε $\|f - g\|_{L^p(X)} = 0$ ή ισοδύναμα $\int_X |f - g|^p = 0$, τότε αυτές παριστάνουν το ίδιο στοιχείο του χώρου $L^p(X)$ και γράφουμε $f = g$ $\sigma.\pi.$ (ή $f \sim g$). Για παράδειγμα, η χαρακτηριστική συνάρτηση $\mathcal{X}_\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών ταυτίζεται με την μηδενική συνάρτηση στον $L^p(\mathbb{R})$, αφού $\int_\mathbb{R} |\mathcal{X}_\mathbb{Q} - 0|^p = 0$. Επομένως, τα στοιχεία του $L^p(X)$ είναι στην πραγματικότητα κλάσεις ισοδυναμίας (είναι προφανές ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας) όπου οι συναρτήσεις που ανήκουν στην ίδια κλάση διαφέρουν σε ένα σύνολο μέτρου 0.

Σημείωση 1.1.1. Στο εξής θα θεωρούμε μόνο τους L^p χώρους όπου $p \geq 1$. Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια οι L^p χώροι, όπου $p \geq 1$, εφοδιασμένοι με την L^p νόρμα είναι διανυσματικοί χώροι κάτι που δεν συμβαίνει αν $0 < p < 1$ (βλ. Θεώρημα 1.1.4 και Παράδειγμα 1.1.1, αντίστοιχα). Θα μελετήσουμε επίσης και την περίπτωση $p = \infty$.

Σημείωση 1.1.2. Στο εξής, αν δεν υπάρχει προβλημα σύγχυσης, θα συμβολίζουμε για λόγους απλότητας την $\| \cdot \|_{L^p(X)}$ με $\| \cdot \|_{L^p}$ ή και $\| \cdot \|_p$.

Παρατήρηση 1.1.3. Όπως αναφέραμε παραπάνω οι πιό σημαντικοί ίσως L^p χώροι είναι οι L^1 και L^2, επειδή είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στις σειρές Fourier. Ειδικά, ο L^2 είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και μάλιστα πλήρης (δηλαδή, χώρος Hilbert) είναι δε ο μόνος L^p χώρος με εσωτερικό γινόμενο και αυτός είναι ένας ακόμα λόγος που τον κάνει πολύ σημαντικό χώρο. Στην μονοδιάσταση περίπτωση όπου συνήθως χρησιμποποιούμε τον ακόλουθο ορισμό για τους L^p χώρους, ο οποίος είναι προσαρμοσμένος στη θεωρία των σειρών Fourier.

Ορισμός 1.1.2. Έστω $1 \leq \pi < \infty$. Μια συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$) ανήκει στον $L^P[-\pi, \pi]$, αν

$$\|f\|_{L^p[-\pi,\pi]} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty.$$

$\square$

Σημείωση 1.1.3. Επειδή, αν $f \in L^p[-\pi, \pi]$ τότε $\|f\|_{L^p[-\pi,\pi]} < \infty$ και αντίστροφα, ο παράγοντας $1/2\pi$ καθώς και η δύναμη $1/p$ δεν είναι τίποτα περισσότερο από δυο παράμετροι κανοπνικοποίησης. Για παράδειγμα, αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$, τότε $\|f\|_{L^p[-\pi,\pi]} = 1$ και $\|\lambda f\|_{L^p[-\pi,\pi]} = |\lambda|,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση 1.1.4. Ισχύουν οι ακόλουθες ισοδυναμίες:
$\|f\|_{L^p} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0\ \sigma.\pi.$ και $\|f - g\|_{L^p} = 0 \Leftrightarrow f \equiv g\ \sigma.\pi.$

Θεώρημα 1.1.1. Ο χώρος $L^p(X)$ με $1 \leq p < \infty$ είναι ένας γραμμικός χώρος, δηλαδή, ισχύουν οι ιδιότητες:

(i) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ αν $f \in L^p(X)$ τότε $af \in L^p(X)$.

(ii) Αν $f, g \in L^p(X)$ τότε $(f + g) \in L^p(X)$.

Απόδειξη. Το (i) είναι προφανές, οπότε θα αποδείξουμε το (ii). Είναι

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leqslant (|f(x)| + |g(x)|)^p \\ &\leqslant [2\max\{|f(x)|, |g(x)|\}]^p \\ &\leqslant 2^p \max\left\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\right\} \\ &\leqslant 2^p\left[|f(x)|^p + |g(x)|^p\right], \end{aligned}$$

οπότε με ολοκλήρωση κατά μέλη στον X παίρνουμε το αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.1.1. (Ανισότητα του Hölder) Έστω p, q πραγματικοί αριθμοί τέτοια ώστε $1 < p < +\infty$ και $1/p + 1/q = 1$. Έστω, επίσης, ότι $f \in L^p(X)$ και $g \in L^q(X)$. Τότε $(fg) \in L^1(X)$ και ισχύει η ανισότητα

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Οι θετικοί εκθέτες p και q ονομάζονται **συζυγείς εκθέτες** αν $1/p + 1/q = 1$ ή ισοδύναμα $p + q = pq$.

Από την ανισότητα του Hölder προκύπτει άμεσα το ακόλουθο συμπέρασμα:

Πόρισμα 1.1.1. Αν $f, g \in L^2$ τότε η $(fg) \in L^1$.

Για την απόδειξη της ανισότητα του Hölder θα χρειαστούμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.1.2. Έστω p, q τέτοια ώστε $1 < p < +\infty$ και $1/p + 1/q = 1$. Τότε για κάθε $x,\ y \geqslant 0$ ισχύει

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $x = 0$ ή $y = 0$ η ανισότητα ισχύει, οπότε υποθέτουμε ότι $x > 0$ και $y > 0$.
Διαιρώντας την ανισότητα κατά μέλη με y^q παίρνουμε

$$\frac{x}{y^{q-1}} \leqslant \frac{x^p}{py^q} + \frac{1}{q}$$

και αν θέσουμε στην τελευταία $t = x^p/y^q$, λόγω της $1/p + 1/q = 1$ παίρνουμε $pq - p = q$, οπότε προκύπτει ότι

$$\frac{x}{y^{q-1}} = \left(\frac{x^p}{y^{(q-1)p}}\right)^{1/p} = \left(\frac{x^p}{y^{pq-p}}\right)^{1/p} = \left(\frac{x^p}{y^q}\right)^{1/p} = t^{1/p}$$

και παίρνουμε την ανισότητα

$$t^{1/p} \leqslant \frac{1}{p}t + \frac{1}{q},\ t > 0.$$

Η συνάρτηση $f\left(t\right) = t^{1/p} - \frac{1}{p}t - \frac{1}{q},\ t > 0$ είναι διαφορίσιμη με

$$f'\left(t\right) = \frac{1}{p}\left(t^{-1/q} - 1\right),\ t > 0.$$

Παρατηρούμε ότι $f'\left(1\right) = 0$, $f'\left(t\right) < 0\ \forall\ t > 1$ και $f'\left(t\right) > 0\ \forall\ t \in (0, 1)$ οπότε

$$f\left(t\right) \leqslant f(1)\ = 0\ \forall\ t > 0$$

και επομένως

$$t^{1/p} - \frac{1}{p}t - \frac{1}{q} \leqslant 0,\ \forall\ t > 0,$$

όπου η ισότητα ισχύει μόνο όταν $t = 1 \Leftrightarrow x^p = y^q$. □

Απόδειξη της ανισότητας του Hölder. Θέτουμε

$$A = \|f\|_{L^p} \quad B = A = \|g\|_{L^q},$$

οπότε από την παραπάνω πρόταση για τους αριθμούς $|f|/A$ και $|g|/B$ παίρνουμε

$$\frac{|f|}{A}\frac{|g|}{B} \leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{|f|}{A}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g|}{B}\right)^q = \frac{|f|^p}{pA^p} + \frac{|g|^q}{qB^q}$$

Η τελευταία με ολοκλήρωση κατά μέλη δίνει

$$\frac{1}{AB}\int_X |fg| \leqslant \frac{1}{pA^p}\int_X |f|^p + \frac{1}{qB^q}\int_X |g|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

οπότε

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant AB = \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

□

Πόρισμα 1.1.2. (Γενίκευση της ανισότητας του Hölder) Έστω $f_1, f_2, \cdots, f_k$ συναρτήσεις και p_j , $j = 1, 2, \cdots, k$ πραγματικοί αριθμοί. Αν $f_j \in L^{p_j}(X)$ για κάθε $j = 1, 2, \cdots, k$ και

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k},$$

τότε, το γινόμενο $f_1 f_2 \cdots f_k \in L^p(X)$ και

$$\|f_1, f_2, \cdots, f_k\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}}\|f_2\|_{L^{p_2}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

Ειδικά:
Αν $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$ με $1 \leq p \leq q \leq \infty$, τότε $f \in L^r(X)$, για κάθε $p \leq r \leq q$ και ισχύει η ακόλουθη ανισότητα της παρεμβολής

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f_1\|_{L^p}^{\alpha}\|f_1\|_{L^q}^{1-\alpha}$$

όπου

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \ 0 \leq \alpha \leq 1.$$

□

Πρόταση 1.1.3. (**Ανισότητα του Hölder για πεπερασμένα αθροίσματα**) Έστω p, q τέτοια ώστε $1 < p < +\infty$ και $1/p + 1/q = 1$. Αν $a_1, a_2, ..., a_n$ και $b_1, b_2, ..., b_n$ τυχόντες πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί, τότε

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{1/q}.$$

Απόδειξη. (Άσκηση)

Πρόταση 1.1.4. (**Ανισότητα του Minkowski**) Έστω p τέτοιος ώστε $1 \leq p < +\infty$ και έστω $f, g \in L^p(X)$. Τότε $(f+g) \in L^p(X)$ και

$$\|f+g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Απόδειξη. Επειδή είναι (βλ. Θεώρημα 1.1.1)

$$|f+g|^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p).$$

με ολοκλήρωση κατά μέλη της ανισότητας αυτής παίρνουμε

$$\int_X |f+g|^p \leqslant 2^p \left(\int_X |f|^p + \int_X |g|^p\right)$$

και επειδή $f \in L^p$, $g \in L^p$ έπεται ότι $(f+g) \in L^p$.
Έστω ο συζυγής εκθέτης q του p. Τότε $1/p + 1/q = 1$ ή $(p-1)\,q = p$, οπότε από την ανισότητα του Hölder παίρνουμε

$$\int_X |f||f+g|^{p-1} \leqslant \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_X |f+g|^p\right)^{1/q}$$

και

$$\int_X |g||f+g|^{p-1} \leqslant \left(\int_X |g|^p\right)^{1/p} \left(\int_X |f+g|^p\right)^{1/q}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε την ανισότητα

$$\int_X |f+g|^p \leqslant \left[\left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p\right)^{1/p}\right] \left(\int_X |f+g|^p\right)^{1/q}$$

οπότε

$$\left(\int_X |f+g|^p\right)^{1-1/q} \leqslant \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p\right)^{1/p}$$

Από την τελευταία επειδή $1 - 1/q = 1/p$ παίρνουμε τελικά την ανισότητα

$$\left(\int_X |f+g|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p\right)^{1/p}$$

ή

$$\|f+g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

□

Παράδειγμα 1.1.1. Αν $0 < p < 1$, τότε η $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p dx\right)^{1/p}$ δεν είναι νόρμα στον X.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι δεν ισχύει η τριγωνική ανισότητα. Έστω $X = [0,1]$ εφοδιασμένο με το μέτρο του Lebesgue, Έστω, επίσης, $f = \mathcal{X}_{[0,\frac{1}{2})}$ και $g = \mathcal{X}_{[\frac{1}{2},1)}$. Τότε,

$$\|f+g\|_p = 1$$

και

$$\|f\|_p + \|g\|_p = \left(\int_{[0,1]} |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_{[0,1]} |g|^p\right)^{1/p} = 2^{1-1/p} < 1.$$

'Αρα

$$\|f+g\|_p > \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Πρόταση 1.1.5. **(Ανισότητα του Minkowski για πεπερασμένα αθροίσματα)** Έστω p τέτοιος ώστε $1 \leq p < +\infty$. Αν $a_1, a_2, ..., a_n$ και $b_1, b_2, ..., b_n$ τυχόντες πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί, τότε

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{1/p}.$$

Απόδειξη. (Άσκηση).

Παράδειγμα 1.1.2. Κάθε φραγμένη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι L^p για κάθε $p > 0$.

Παρατήρηση 1.1.5. Ο χώρος $C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ περιέχεται στον $L^p(\Omega)$, δηλαδή, $C(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, για κάθε $p \geq 1$.Πραγματικά, είναι

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx \leq \mathrm{m}(\Omega) \max_{x\in\Omega} |f(x)|^p < \infty.$$

Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει, δηλαδή, $L^p(\Omega) \not\subset C(\Omega)$, αφού μια L^p συνάρτηση δεν οφείλει να είναι συνεχής ούτε και φραγμένη (βλ. Παραδείγματα 1.1.3 και 1.1.4).

Παράδειγμα 1.1.3. Η συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) = \begin{cases} 0, \ t \in [-\pi, 0), \\ 1, \ x \in [0, \pi] \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής, αλλά ανήκει στον $L^2[-\pi, \pi]$.

Παράδειγμα 1.1.4. Η συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) = \begin{cases} |t|^{-1/4}, \ t \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi], \\ 0, \ x \in [0, \pi] \end{cases}$$

ανήκει στον $L^2[-\pi, \pi]$, αφού

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{t} dt = 4\sqrt{t}|_0^{\pi} = 4\sqrt{\pi} < \infty.$$

Όμως, η f δεν είναι συνεχής (ούτε καν φραγμένη) στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

Παράδειγμα 1.1.5. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1/x$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και $f(0)$ οτιδήποτε δεν είναι L^p, για κάθε $p \geq 1$.

Απόδειξη. Για $p = 1$ έχουμε

$$\int_{[0,1]} |f(x)| dx = \lim_{a \to 0^+} \int_{[0,1]} \frac{1}{x} dx = \lim_{a \to 0^+} [\ln x]_a^1 = \lim_{a \to 0^+} [-\ln a] = +\infty,$$

και για $p > 1$

$$\int_{[0,1]} |f(x)|^p dx = \lim_{a \to 0^+} \int_{[0,1]} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{a \to 0^+} \left[-\frac{1}{(p-1)\, x^{p-1}} \right]_a^1 = +\infty.$$

Παράδειγμα 1.1.6. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1/x^r$, $r > 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και $f(0)$ οτιδήποτε είναι L^p, για κάθε $pr \leq 1$ και δεν είναι L^p, για κάθε $pr > 1$. Για παράδειγμα, αν $f(x) = 1/\sqrt{x}$, τότε $f \in L^p[0, 1]$ για κάθε $p \in [1, 2)$ και $f \notin L^p[0, 1]$, για κάθε $p > 2$.

Πρόταση 1.1.6. Μία συνάρτηση $f \in L^1$ τότε και μόνο τότε όταν η $|f| \in L^1$.

Απόδειξη. Είναι

$$\int f = \int f^+ - \int f^-, \quad \int |f| = \int f^+ - \int f^-$$

οπότε αν $f \in L^1$ τότε $f^+, f^- \in L^1$ και επομένως $f^+ + f^- = |f| \in L^1$.
Όμοια, αν $|f| \in L^1$ τότε $f \in L^1$. $\square$

Παρατήρηση 1.1.6. Από την Πρόταση 1.1.6 προκύπτει ότι αν οι συναρτήσεις $f, g \in L^1$ τότε και συνάρτηση $(f+g) \in L^1$, όμως μπορεί οι συναρτήσεις $f, g \in L^1$ και η συνάρτηση $(fg) \notin L^1$ (βλ. Παράδειγμα 1.1.7).

Παράδειγμα 1.1.7. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Είναι

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2 < +\infty$$

και επομένως $f \in L^1$.
Αλλά

$$\int_0^1 |f(x)|^2\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_0^1 = 0 + \infty = +\infty,$$

οπότε $f^2 \notin L^1$ και συνεπώς $f \notin L^2$.

Σχέσεις μεταξύ των χώρων L^p

Στο Παράδειγμα 1.1.7 αποδείχτηκε ότι μπορεί μία συνάρτηση να ανήκει στο L^1 και να μην ανήκει στον L^2, ωστόσο το ερώτημα που τίθεται ένα γενικότερο και αφορά την ύπαρξη ή όχι μιας σχέσης μεταξύ των χώρων L^p. Στο παράδειγμα που αμέσως ακολουθεί αποδεικνύεται ότι γενικά δεν υπάρχει σχέση μεταξύ των L^p χώρων, στη συνέχεια όμως θα αποδείξουμε ότι αν $\mu(X) < \infty$ και αν $1 \leq p < q < \infty$, τότε $L^q \subset L^p$ (βλ. Θεώρημα 1.1.2).

Παράδειγμα 1.1.8. Θεωρούμε το μέτρο του Lebesgue στο διάστημα $(0, \infty)$ και τη συνάρτηση $f(x) = x^a$. Τότε, έχουμε

$$\int_0^1 x^a dx \Leftrightarrow a < -1, \quad \int_1^\infty x^a dx \Leftrightarrow a > -1.$$

Έστω τώρα $1 \leq p < q < \infty$ και b τέτοιο ώστε $(1/q) < b < (1/p)$. Τότε, σύμφωνα με τις παραπάνω ισοδυναμίες η συνάρτηση $x^{-b}\mathcal{X}_{(0,1)}$ ανήκει στον L^p αλλα δεν ανήκει στον L^q, το οποίο σημαίνει ότι $L^p \not\subset L^q$. Εξάλλου, η συνάρτηση $x^{-b}\mathcal{X}_{(1,\infty)}$ ανήκει στον L^q αλλα δεν ανήκει στον L^p, το οποίο σημαίνει ότι $L^q \not\subset L^p$. Επομένως, δεν υπάρχει σχέση εγκλεισμού μεταξύ δύο L^p χώρων.

Θεώρημα 1.1.2. Αν $0 < \mathrm{m}(X) < \infty$ και $1 \leq p < q < \infty$, τότε $L^q \subset L^p$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την ανισότητα του Hölder για τις συναρτήσεις $|f|^p$ και 1, οπότε παίρνουμε

$$\int_X |f|^p \leq \left(\int_X 1\right)^{1-p/q} \left(\int_X |f|^{p\frac{q}{p}}\right)^{p/q} = \mathrm{m}(X)^{1-p/q} \left(\int_X |f|^q\right)^{p/q}.$$

Άρα, αν $f \in L^q$, τότε $f \in L^p$, οπότε $L^q \subset L^p$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι τοπικά L^p-ολοκληρώσιμες συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι αναγκαστικά ολοκληρώσιμες σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού τους έχουν όμως πολύ χρήσιμες ιδιότητες.

Ορισμός 1.1.3. Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Λέμε ότι η συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι **τοπικά L^p-ολοκληρώσιμη** ή ανήκει στον $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ αν είναι L^p-ολοκληρώσιμη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο K του Ω ή ισοδύναμα αν $f\mathcal{X}_K \in L^p(\Omega)$ για κάθε συμπαγές $\mathrm{K} \subset \Omega$.

Παράδειγμα 1.1.9. Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, όμως όταν ορίζεται σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη καθώς το μέτρο του $\mathbb{R}$ είναι άπειρο.
Γενικά:

Οι σταθερές συναρτήσεις είναι τοπικά ολοκληρώσιμες.

Παράδειγμα 1.1.10. Η συνάρτηση $f(x) = 1/x$, $x \in (0,1)$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη αλλά δεν είναι *ολικά* ολοκληρώσιμη στο $(0,1)$. Πραγματικά, για κάθε κλειστό διάστημα $[a,b] \subset (0,1)$ είναι

$$\int_{[a,b]} |f(x)|dx = \int_{[a,b]} \frac{1}{x}dx = \ln b - \ln a,$$

ενώ

$$\int_{(0,1)} |f(x)|dx = \lim_{a\to 0^+} \int_{(a,1]} \frac{1}{x}dx = -\lim_{a\to 0^+} \ln a = +\infty.$$

Παράδειγμα 1.1.11. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$$

δεν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη σε κανένα διαστήματα που περιέχει το 0, ωστόσο, είναι τοπικά ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα που δεν το περιέχει. Δηλαδή, η $1/x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$.

Ο χώρος L^∞

Μπορούμε να επεκτείνουμε τις L^p norms στην περίπτωση όπου $p = \infty$. Θα χρειαστούμε πρώτα τον ορισμό της ουσιαστικά φραγμένης συνάρτησης.

Ορισμός 1.1.4. Μία μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ λέγεται **ουσιαστικά φραγμένη** όταν υπάρχει $M \geq 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$ σχεδόν παντού στο X ή ισοδύναμα όταν m $\{x : |f(x)| \geqslant M\} = 0$. □

Ορισμός 1.1.5. Έστω (X, μ) ένας μετρήσιμος χώρος, και $f : X \to \mathbb{R}$ μία μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε

$$\|f\|_{L^\infty(X)} = \inf\{M : \mathrm{m}\{\mathrm{x} \in \mathrm{X} : |\mathrm{f(x)}| \geqslant \mathrm{M}\} = 0\}$$

ή (λόγω του Ορισμού 1.1.4)

$$\|f\|_{L^\infty(X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{x}\in\mathrm{X}} |\mathrm{f(x)}|.$$

Ο χώρος $L^\infty(X)$ ορίζεται ως ο χώρος των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ για τις οποίες $\|f\|_{L^\infty(X)} < \infty$.

Η $\|f\|_{L^\infty(X)}$ είναι μια νόρμα (βλ. Θεώρημα 1.1.4). □

Στο εξής αν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης γιά λόγους απλότητας θα συμβολίζουμε την $\|\cdot\|_{L^\infty(X)}$ με $\|\cdot\|_{L^\infty}$ ή και $\|\cdot\|_\infty$.

Παρατήρηση 1.1.7. Η $L^\infty -$ **norm** λέγεται και **ουσιώδες** supremum της $|f|$ και ο L^∞ λέγεται **χώρος των ουσιωδώς ή** $\sigma.\pi.$ **φραγμένων συναρτήσεων**.

Παρατήρηση 1.1.8. Ισχύει η ισοδυμαμία: $\|f\|_{L^\infty} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0 \; \sigma.\pi.$.

Παρατήρηση 1.1.9. Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι στον L^∞ ισχύουν το Θεώρημα 1.1.1 καθώς οι ανισότητες του Hölder και του Minkowski:

(1) Ο L^∞ είναι γραμμικός.

(2) (Ανισότητα του Hölder) Αν $f \in L^1$ και $g \in L^\infty$, τότε

$$\int_X |fg| \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^\infty}.$$

(3) (Ανισότητα του Minkowski) Αν $f, g \in L^\infty$, τότε

$$\|f+g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}.$$

Θεώρημα 1.1.3. Αν $0 < \mathrm{m}(X) < \infty$ και $1 \leq p < \infty$, τότε $L^\infty \subset L^p$.

Απόδειξη. Έστω $f \in L^\infty(X)$. Τότε $\|f\|_\infty < \infty$. Επίσης, εξ ορισμού είναι $|f| \leq \|f\|_\infty$ $\sigma.\pi.$ στον X. 'Αρα, θα έχουμε

$$\int_X |f|^p \leq \int_X \|f\|_\infty^p = \mathrm{m}(X)\|f\|_\infty^p < \infty.$$

Άρα, αν $f \in L^\infty$, τότε $f \in L^p$ για κάθε $p \in [1, \infty)$.

Στα παραδείγματα που αμέσως ακολουθούν φαίνεται η σχέση που έχουν οι $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ με τον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ αλλά και μεταξύ τους.

Παράδειγμα 1.1.12. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$. Τότε,

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 1 < \infty,$$

οπότε, η $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Όμως,

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \infty,$$

οπότε η $f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ με $1 \leq p < \infty$.

Παράδειγμα 1.1.13. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$. Τότε,

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq 1,$$

οπότε, η $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Όμως, για $x \geq 1$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \geq \int_1^\infty \frac{1}{1+|x|}dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{2x}dx = +\infty,$$

οπότε, η $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.
Εξάλλου, είναι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^2} dx \\ &= \int_{|x|\leq 1} \frac{1}{(1+|x|)^2} dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{(1+|x|)^2} dx \\ &\leq \int_{|x|\leq 1} 1 dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{x^2} dx \\ &= 2 + 2 \lim_{b\to\infty} \left.\frac{-1}{x^2}\right|_1^b = 4 < \infty,\end{aligned}$$

οπότε, η $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
Άρα, ο $L^2(\mathbb{R}^n) \not\subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Αυτό το αποτέλεσμα είναι διαφορετικό από την περίπτωση όπου είχαμε $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, με $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ πεπερασμένο.

Παράδειγμα 1.1.14. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x \notin (0,1]. \end{cases}$$

Τότε, η $f \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$, γιατί δεν είναι φραγμένη κοντά στο 0.
Η $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, γιατί

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \infty.$$

Η $f \notin L^2(\mathbb{R}^n)$, γιατί

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty.$$

Παρατήρηση 1.1.10. Τίθεται το ερώτημα, γιατί μια συνάρτηση αποτυγχάνει να ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^n)$. Υπάρχου δυο λόγοι για τους οποίους συμβαίνει αυτό. Ο πρώτος λόγος είναι το πόσο γρήγορα ελαττώνεται η τιμή της κοντά στο άπειρο. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $1/(1+|x|)^2$ ελαττώνεται αρκετα γρήγορα ώστε αυτή να ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$. Αντίθετα, η συνάρτηση $1/(1+|x|)$ δεν ελαττώνεται τόσο γρήγορα όσο χρειάζεται ώστε να ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι η συνάρτηση μπορεί να εκρήγνυται (απειρίζεται) σε κάποιο σημείο. Για παράδειγμα, η συνάρτηση που είναι ίση με $1/|x|$ αν $|x| \leq 1$ και με 0 αλλού, τείνει στο

∞ τόσο γρήγορα ώστε να αποτυγχάνει να ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^n)$. Ωστόσο, η συνάρτηση που είναι ίση με $1/\sqrt{|x|}$ αν $|x| \leq 1$ και με 0 αλλού, τείνει στο ∞ τόσο αργά ώστε να ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^n)$. Η συνάρτηση $1/|x|$ δεν ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^n)$ γιατί συντρέχουν και οι δύο παραπάνω λόγοι.

Θεώρημα 1.1.4. Ο L^p είναι ένας γραμμικός χώρος και η $\|\cdot\|_{L^p}$ είναι μια norm για κάθε $1 \leq p \leq \infty$.

Απόδειξη. Η γραμμικότητα του L^p προκύπτει από το Θεώρημα 1.1.1 και την Παρατήρηση 1.1.9(1). Το ότι η $\|\cdot\|_{L^p}$ είναι μία νόρμα προκύπτει από τις Παρατηρήσεις 1.1.4 και 1.1.8, τη γραμμικότητα του L^p την Πρόταση 1.1.4 και την Παρατήρηση 1.1.9(3).

Σύγκλιση στους Χώρους L^p

Θεωρούμε την απεικόνιση $d : L^p \times L^p \to \mathbb{R}$ που ορίζεται για όλες τις συναρτήσεις $f, g \in L^p$ από τη σχέση $d(f, g) = \|f - g\|_{L^p}$. Αποδεικνύεται εύκολα (αποδείξτε το) ότι η d είναι μια μετρική, οπότε ο (L^p, d) είναι ένας μετρικός χώρος, το οποίο μας επιτρέπει να ορίσουμε σύγκλιση στους L^p χώρους.

Ορισμός 1.1.6. Έστω (X, m) ένας μετρήσιμος χώρος, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in L^p$, $p \in [1, \infty)$ μία ακολουθία και έστω $f \in L^p$.

(i) Η $\{f_n\}$ είναι μια L^p **ακολουθία** Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $m, n \geq n_0$ τότε $\|f_m - f_n\|_{L^p} < \varepsilon$.

(ii) Η ακολουθία $\{f_n\}$ **συγκλίνει στον** L^p (ή συγκλίνει κατά norm τάξης p) στην f αν $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$.

(iii) Η $\{f_n\}$ έχει **φραγμένη** L^p**−διακύμανση** αν $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_{n+1} - f_n\|_{L^p} < \infty$.

Θα δώσουμε τώρα δύο παραδείγματα που δείχνουν ότι, για $1 \leq p < \infty$, ούτε η σημειακή σύγκλιση συνεπάγεται την L^p-σύγκλιση ούτε η L^p-σύγκλιση συνεπάγεται την σημειακή σύγκλιση.

Παράδειγμα 1.1.15. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n = \mathcal{X}_{[n,n+1]}$, γιά κάθε $n = 1, 2, ...$ Τότε, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ και

$$\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}} = \int_n^{n+1} f_n = 1, \ \forall\, p \in [1, \infty).$$

Άρα, η $f_n \to 0$ σημειακά, αλλά όχι στον L^p.

Παράδειγμα 1.1.16. Θεωρούμε την ακολουθία

$$\mathcal{X}_{[0,1]},\ \mathcal{X}_{[0,\frac{1}{2}]},\ \mathcal{X}_{[\frac{1}{2},1]},\ \mathcal{X}_{[0,\frac{1}{4}]},\ \mathcal{X}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]},\cdots.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τον μοναδικό φυσικό αριθμό k γιά τον οποίο ισχύει $2^k \leq n < 2^{k+1}$ και θέτουμε

$$I_n = \left[\frac{n}{2^k} - 1, \frac{n+1}{2^k} - 1\right].$$

Τότε, $f_n = \mathcal{X}_{I_n}$, οπότε για $1 \leq p < \infty$ ισχύει $\|f_n\|_{L^p} = 2^{-k/p}$ και επειδή καθώς το $n \to \infty$ και το $k \to \infty$ έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p([0,1])} = 0$. Όμως, η $f_n(x)$ δεν συγκλίνει σημειακά γιά κάθε $x \in (0,1)$ στο 0, γιατί για κάθε x υπάρχει άπειρο πλήθος $\ell \in \mathbb{N}$ με $f_\ell(x) = 1$ και άπειρο πλήθος $m \in \mathbb{N}$ με $f_m(x) = 0$.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια (βλ. Θεώρημα 1.1.5) ότι ο $(L^p, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος Banach), ιδιότητα ιδιαίτερα σημαντική και χρήσιμη.

Θεώρημα 1.1.5. Ο $\left(L^p(X), \|\cdot\|_{L^p(X)}\right)$, $1 \leq p \leq \infty$, είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος.

Απόδειξη. (i) Έστω $1 \leq p < \infty$. Θεωρούμε μία ακολουθία Cauchy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον L^p. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας (εξάγοντας μία υπακολουθία αν είναι απαραίτητο), ότι

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ορίζουμε την ακολουθία $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ ως εξής:

$$g_1 = 0,\ \ g_n = |f_1| + |f_2 - f_1| + \cdots + |f_n - f_{n-1}|,\ \forall\, n \geq 2.$$

Η ακολουθία $\{g_n\}$ είναι γνησίως αύξουσα και επειδή

$$\begin{aligned}\int_X g_n^p &= \|g_n\|_{L^p(X)}^p \leqslant \left(\|f_1\|_{L^p(X)} + \sum_{i=2}^{\infty} \|f_i - f_{i-1}\|_{L^p(X)}\right)^p \\ &\leqslant \left(\|f_1\|_{L^p(X)} + 1\right)^p\end{aligned}$$

είναι ομοιόμορφα φραγμένη, οπότε από το Θεώρημα της Μονότονης Σύγκλισης προκύπτει ότι $g_n^p \to g^p$ σ.π., $g \in L^p$ και $g_n \leq g$ σ.π.

Εξάλλου, γιά κάθε $k \geq 1$, είναι

$$\begin{aligned} |f_{n+k} - f_n| &= |f_{n+k} - f_{n+k-1} + f_{n+k-1} + \cdots - f_{n+1} + f_{n+1} - f_n| \\ &\leqslant \sum_{i=n+1}^{n+k} |f_i - f_{i-1}| \\ &= g_{n+k} - g_n, \end{aligned}$$

οπότε $g_{n+k} - g_n \to 0$, καθώς το $n \to \infty$ σ.π..
Άρα, $f_n \to f$ σ.π..
Επειδή,

$$|f_n| \leqslant |f_1| + \sum_{i=2}^{n} |f_i - f_{i-1}| \leqslant g_n \leqslant g \ \forall \ n \in \mathbb{N}$$

έπεται ότι $|f| \leq g$ σ.π..
Άρα, $|f_n|^p \leq g^p$ και $|f|^p \leq g^p$ και $|f_n - f|^p \leq 2g^p$ και από το Θεώρημα της Κυριαρχημένης Σύγκλισης προκύπτει

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p = \int_X \lim_{n\to\infty} |f_n - f|^p = 0.$$

(ii) Έστω $p = \infty$. Θεωρούμε την ακολουθία Cauchy στον $L^\infty(X)$. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\mathrm{N}(k) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}, \ \forall \ n, \, m \geq \mathrm{N}(k).$$

Γιά κάθε ζεύγάρι (m, n) με $n, \, m \geq \mathrm{N}(k)$ συμβολίζουμε $\mathrm{A}_{(m,n)}(k)$ το σύνολο μηδενικού μέτρου που περιέχει όλα τα $x \in X$ για τα οποία ισχύει

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}.$$

Θέτουμε

$$A = \bigcup\nolimits_{k\geqslant 1} A_{(m,n)}\,(k), \ \ m, \, n \geqslant N\,(k)\,.$$

Τότε, το μέτρο του Α είναι επίσης ίσο με 0. Στο $X \backslash \mathrm{A}$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα με μία συνάρτηση f, καθώς για $m, \, n \geqslant N\,(k)$ ισχύει

$$\sup_{x\in X\backslash A} |f_n\,(x) - f_m\,(x)| < \frac{1}{k}$$

η ακολουθία $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι σημειακά ακολουθία Cauchy στο $X\backslash A$. Επειδή το A είναι μηδενικού μέτρου, η ακολουθία f_n συγκλίνει σημειακά σ.π. στο X, οπότε είναι μετρήσιμη (βλ. ....).
Εξάλλου, του $m \to \infty$ προκύπτει ότι

$$\operatorname{ess}\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in X\backslash A} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k}.$$

Άρα, η f_n συγκλίνει στην f στον $L^{\infty}(X)$.

Θεώρημα 1.1.6. Έστω $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία του L^p και $f \in L^p$, τέτοια ώστε $\|f_n - f\| \to 0$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$, τέτοια ώστε

(i) $f_{n_k} \to f$, σχεδόν παντού στο X.

(ii) $|f_{n_k}| \leq h(x)$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, με $h \in L^p$.

Απόδειξη. Για $p = \infty$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι $1 \leq p < \infty$. Επειδή η ακολουθία $\{f_{n_k}\}$ είναι Cauchy, μπορούμε να επαναλάβουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.5 και να εξαγάγουμε μια υπακολουθία f_{n_k}η οποία συγκλίνει $\sigma.\pi.$ σε μια συνάρτηση έστω την f^*, για την οποία ισχύει

$$|f_{n_k}(x) - f^*(x)| \leq g(x)$$

σχεδόν παντού στο X, με $g \in L^p$.
Επομένως, $f^* \in L^p$ σ.π. και $f_{n_k} \to f^*$ στον L^p (Θεώρημα του Lebesgue). Άρα, $f^* = f$ $\sigma.\pi.$, οπότε αποδείξαμε το (i).
Για το (ii) αρκεί να επιλέξουμε $h = f^* + g$. □

Σημείωση 1.1.4. Είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε και να τονίσουμε ότι είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε μερικά βασικά αποτελέσματα της θεωρίας ολοκλήρωσης, όπως το Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης του Lebesgue (βλ. Θεώρημα **??**), το Θεώρημα Beppo Levi (βλ. Θεώρημα **??**) το Λήμμα του Fatou (βλ. Θεώρημα **??**) και το Θεώρημα της κυριαρχιμένης σύγκλισης (βλ. Θεώρημα **??**).

1.2 Χώροι ℓ^p

Γνωρίζουμε ότι μια σημαντική περίπτωση μετρικών χώρων είναι οι χώροι ℓ^p, $1 \leq p < \infty$. Μπορούμε, ωστόσο, να δούμε αυτούς τουσ χώρους σαν ειδική περίπτωση των L^p, $1 \leq p < \infty$ χώρων. Θεωρούμε το χώρο μέτρου (N, μ), όπου

μ είναι το αριθμητικό μέτρο στον N. Σε αυτή την διακριτή περίπτωση, μια μετρήσιμη συνάρτηση στον N είναι μια ακολουθία $\{f_n : n \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ και το ολοκλήρωμα του Lebesgue είναι το ίδιο με το άθροισμα της αντίστοιχης σειράς, δηλαδή

$$\int_{\mathbb{N}} |f_n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|.$$

Ορισμός 1.2.1. Αν $p \in [1, \infty)$, η ℓ^p**−norm** μιας ακολουθίας $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ πραγματικών (ή και μιγαδικών) αριθμών ορίζεται από τη σχέση

$$\|\{a_n\}\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}.$$

Μια ℓ^p **ακολουθία** είναι μια ακολουθία $\{a_n\}$ πραγματικών αριθμών για την οποία ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$, δηλαδή το άθροισμα $|a_1|^p + |a_2|^p + \cdots$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 1.2.1. Υπενθυμίζουμε ότι η $p-$σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ συγκλίνει τότε και μόνο τότε αν $p > 1$.
Άρα:

Η ακολουθία $\{1/n^p\}$ είναι ℓ^1 αν και μόνο αν $p > 1$.

Για παράδειγμα, η $\{1/n^2\}$ είναι ℓ^1 ενώ οι $\{1/n\}$ δεν είναι. Ωστόσο η $\{1/n\}$ είναι ℓ^2.

Παράδειγμα 1.2.2. Η ακολουθία $\{1/n^r\}$ είναι ℓ^p αν και μόνο αν $p > 1/r$. Επομένως, η ακολουθία $\{1/\sqrt{n}\}$ είναι ℓ^3 αλλά δεν είναι ℓ^2.

Παρατήρηση 1.2.1. Η όλη συμπεριφορά των ακολουθιών της μορφής $1/n^p$ είναι όμοια με εκείνη της συνάρτησης $1/x^P$ στο $[1, +\infty)$. Πραγματικά, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{\infty} 1/x^p dx < \infty$. Το γεγονός αυτό όχι μόνο δεν είναι τυχαίο αλλά υπάρχει ισχυρή θεωρητική σχέση μεταξύ των δύο περιπτώσεων. Αν αποβάλουμε για λίγο την μαθηματική αυστηρότητα, μπορούμε να λέμε ότι πρόκειται για την ίδια περίπτωση μόνο που ανάλογα με την περίσταση κάνουμε άλλωτε άθροιση και άλλωτε <συνεχή άθροιση>.

Θεώρημα 1.2.1. Αν $1 \leq p < q < \infty$, τότε κάθε ℓ^p ακολουθία είναι ℓ^q ακολουθία.

Απόδειξη. Έστω $\{a_n\}$ μια ℓ^p ακολουθία. Τότε, η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ συγκλίνει, οπότε $a_n \to 0$ καθώς το$n \to \infty$. Ειδικότερα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n| < 1$ γιά όλα τα $\geq n_0$. Επομένως, $|a_n|^q < |a_n|^p$ γιά όλα τα $n \geq n_0$, οπότε η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q$ συγκλίνει, δηλαδή η $\{a_n\}$ μια ℓ^q ακολουθία. □

Πρόταση 1.2.1. (**Ανισότητα Hölder για ακολουθίες**)Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ δύο ακολουθίες παραγματικών (ή και μιγαδικών) αριθμών και $p, q \in [1, \infty)$ τέτοιοι ώστε $1/p + 1/q = 1$. Αν $\{a_n\} \in \ell^p$ και $\{b_n\} \in \ell^q$, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει απολύτως, και ισχύει η ανισότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q \right)^{1/q} .$$

Απόδειξη. Επεδή $\{a_n\} \in \ell^p$ και $\{b_n\} \in \ell^q$ από την Πρόταση 1.1.3 προκύπτει η ανισότητα

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^q \right)^{1/q}$$

από την οποία συνεπάγεται ότι η ακολουθία $s_n = \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|$ είναι συκλίνουσα (ως αύξουσα και φραγμένη), οπότε αν πάρουμε το όριο για $n \to \infty$ σε αυτή την ανισότητα προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα. □

Πόρισμα 1.2.1. (**Ανισότητα του Cauchy-Schwarz για ακολουθίες**)Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ δύο ακολουθίες παραγματικών (ή και μιγαδικών) αριθμών. Αν $\{a_n\} \in \ell^2$ και $\{b_n\} \in \ell^2$, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει απολύτως, και ισχύει η ανισότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right)^{1/2} .$$

□

Πρόταση 1.2.2. (**Ανισότητα του Minkowski για ακολουθίες**)Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ δύο ακολουθίες παραγματικών (ή και μιγαδικών) αριθμών και $1 \leq p \leq \infty$. Αν $\{a_n\} \in \ell^p$ και $\{b_n\} \in \ell^p$, τότε και η ακολουθία $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$ και ισχύει η ανισότητα

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_j|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p} .$$

Απόδειξη. Αν $p = 1$ η ανισότητα είναι προφανής, οπότε έστω $p > 1$. Επειδή $\{a_n\} \in \ell^p$ και $\{b_n\} \in \ell^q$ από την Πρόταση 1.1.3 προκύπτει η ανισότητα

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{1-1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p \right)^{1/p} .$$

Από την ανισότητα αυτή προκύπτει ότι η ακολουθία $\|s_n\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p$ είναι συγκλίνουσα (ως αύξουσα και φραγμένη) και επομένως αν πάρουμε το όριο $n \to \infty$ παίρνουμε τη ζητούμενη ανισότητα. $\square$

Ορισμός 1.2.2. Ο χώρος ℓ^∞ ορίζεται ως ο χώρος των απείρων φραγμένων ακολουθιών πραγματικών (ή και μιγαδικών) αριθμών $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Η $\ell^\infty-$**norm** μιάς ακολουθίας $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ πραγματικών αριθμών ορίζεται από τη σχέση

$$\|\{b_n\}\|_{\ell^\infty} = \sup\{|b_n|, n = 1, 2, \cdots\}.$$

$\square$

Θεώρημα 1.2.2. Ο $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$, $1 \leq p \leq \infty$, είναι ένας χώρος Banach.

Απόδειξη. (βλ. [...]).

Βιβλιογραφία

[1] R. A. Adams and J. J. J. Fournier, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 2003.

[2] N. K. Αρτεμιάδης, Συναρτήσεις Πραγματικών μεταβλητών, Πάτρα, 1977.

[3] Th. Aubin, *Some non linear problems in Riemannian Geometry*, Springer, Berlin, 1998.

[4] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2011.

[5] D. L. Cohn, Measure theory, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks], Birkhäuser/Springer, New York, second ed., 2013.

[6] John B. Conway, A Course in Functional Analysis, Second Edition, Springer, 1989.

[7] Γ. Δάσιος, Ασκήσεις Γενικής Τοπολογίας, Αθήνα, 1987.

[8] Γ. Δάσιος, Δέκα Διαλέξεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001.

[9] Γ. Δάσιος, Κ. Κυριάκη, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1994.

[10] Κ. Δρόσος, Π. Σιαφαρίκας, Βασική Αφηρημένη Ανάλυση, Πάτρα, 1997.

[11] G. de Barra, measure theory and integration, Ellis Horwood Ltd., 1981.

[12] Α. Εσκενάζη: Σημειώσεις Θεωρίας Μέτρου, ΕΚΠΑ, Αθήνα 2014.

[13] L. C. Evans and R. F. Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions, CRC Press, 1992.

[14] B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, Counterexamples in Analysis, Dover Publications, Inc., 2003.

[15] J. Jost, Postmodern Analysis, (Third Edition), Springer, 2005.

[16] L. Hörmander. The analysis of linear partial differential operators, Vol. I. Springer-Verlag, second edition, 1990.

[17] Χ. Γ. Καρυοφύλης, Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης, Εκδόσεις Ζήτη, 1995.

[18] Kolmogorov A. N., Fomin, S. V., Elements of the theory of functions and functional analysis 1. Translated by Boron, Leo F. Rochester, N. Y. Graylock Press, (1957), (1954).

[19] D. C. Kravvaritis, A. N. Yannacopoulos, Variational Methods in Nonlinear Analysis, De Gruyter, 2019.

[20] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons Inc., 1978.

[21] S. S. Kutate1adze, Fundamentals of Functional Analysis, (Translated from Russian Edition), 1996 Springer Science+Business Media Dordrecht, 1996.

[22] Y. Eidelman, V. Milman, A, Tsolomitis, Functional Analysis An Introduction, AMS, 2004.

[23] Ι. Σαραντόπουλος, Σημειώσεις θεωρίας Μέτρου και Ολοκλήρωσης, ΕΜΠ ΣΕΜΦΕ, 2008.

[24] Le Dret H. and Lucquin B., Partial Differential Equations: Modeling, Analysis and Numerical Approximation, Birkhäuser, Springer, (2016).

[25] I. M. Guelfand, G. E. Shilov, Space of fundamemtal and Generalized Function, Nauka, Moscov 1958 (in Russian), English edition: Academic Press, New York, 1968.

[26] M. Renardy,R. Rogers, An Introduction to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1992.

[27] Narici, L., Beckenstein, E., Topological Vector Spaces. Pure and applied mathematics (Sec. Ed.) Boca Raton, FL: CRC Press (2011)

[28] G.F. Roach, Green's Functions, Second Edition, Cambridge University Press, 1981 .

[29] W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd edn., McGraw-Hill Book Co., New York,1987.

[30] L. Schwartz, Theórie des Distribution I et II, Herman, Paris, 1950-1951.

[31] S. L. Sobolev, On a theorem in functional analysis Amer. Math. Soc. Translations (2) 34, 39-68 (1963); translated from Mat. Sb. (N.S.) 4 (46), 471-497 (1938).

[32] Ivar Stakgold, Green's Functions and Boundary value problems, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc, 1997.

[33] Σ. Τραχανάς, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001.

[34] Wikipedia, the free encyclopedia, George Green.

[35] S. Willard, General Topology, Dover Publications, (2004).