ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκηση 1. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}\,, \qquad (\beta)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,, \qquad (\gamma)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}\,, \qquad (\delta)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}\,.$$

Ασκηση 2. Να προσδιορίσετε τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

και

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Στη συνέχεια, γι' αυτά τα x, να βρείτε τα αθροίσματα των σειρών.

Ασκηση 3. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών.

(α) Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2 + k^2 a_k}$$

συγκλίνει.

(β) Αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει, να δείξετε ότι και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2 + a_k}$$

αποκλίνει επίσης.

Ασκηση 4. (Εκτίμηση σφάλματος για εναλλάσσουσες σειρές)

(i) Έστω (a_n) μηδενική και φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν υποθέσουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = S,$$

να δείξετε ότι

$$|S - s_n| \le a_{n+1}\,, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\,,$$

όπου (s_n) η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της παραπάνω εναλλάσσουσας σειράς.

(ii) Να προσδιορίσετε το άθροισμα S της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

Ασκηση 5. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_k) ως εξής: αν ο k είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k}$ και αν ο k δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k^2}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Ασκηση 6. (α) Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$. Αποδείξτε ότι $r_n \to 0$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$ και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

(β) Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Αποδείξτε ότι $s_n \to +\infty$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

Ασκηση 7. (α) Έστω (a_k) και (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

(β) Έστω $a_k > 0$ και $b_k > 0$. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει και ότι $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$ για κάθε $k \geq 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.