ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Έστω (α_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας).

(α) Αν $\alpha_k \to 0$ τότε η ακολουθία $s_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ είναι φραγμένη.

(β) Αν η ακολουθία $s_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

(γ) Αν $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $0 < \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

(δ) Αν $\alpha_k \to 0$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k$ συγκλίνει.

(ε) Αν $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}$ συγκλίνει.

(στ) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: (α) *Λάθος*. Η ακολουθία $\alpha_k = \frac{1}{k} \to 0$, όμως η ακολουθία $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ δεν είναι φραγμένη (τείνει στο $+\infty$).

(β) *Λάθος*. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $\alpha_k = (-1)^{k-1}$, τότε έχουμε $s_n = 1$ αν ο n είναι περιττός και $s_n = 0$ αν ο n είναι άρτιος. Δηλαδή, η ακολουθία $s_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ είναι φραγμένη. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ αποκλίνει, διότι $\alpha_k \not\to 0$.

(γ) *Λάθος*. Θεωρήστε την $\alpha_k = \frac{1}{k}$. Τότε, $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{k}{k+1} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(δ) *Λάθος*. Αν θεωρήσουμε την $\alpha_k = \frac{(-1)^k}{k}$, τότε $\alpha_k \to 0$. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(ε) *Λάθος*. Θεωρήστε την $\alpha_k = \frac{1}{k^2}$. Τότε, $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(στ) *Λάθος*. Από το κριτήριο του Leibniz, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει. □

Ασκηση 2. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha)\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}, \qquad (\beta)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{4^k}, \qquad (\gamma)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}, \qquad (\delta)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

Υπόδειξη: (α) Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας. Αν $a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}$ τότε

$$\sqrt[k]{a_k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \to \frac{1}{e} < 1,$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

(β) Εξετάζουμε αν η σειρά συγκλίνει απολύτως, δηλαδή αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{4^k}$. Αν $b_k = \frac{k^3}{4^k}$ τότε για κάθε $k \geq 1$ έχουμε

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(k+1)^3}{4^{k+1}} \cdot \frac{4^k}{k^3} = \frac{1}{4}\left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \to \frac{1}{4} \cdot 1^3 = \frac{1}{4} < 1,$$

άρα η $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{4^k}$ συγκλίνει απολύτως, και ειδικότερα συγκλίνει.

(γ) Παρατηρούμε ότι

$$c_k := \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k} = \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} = \frac{1}{k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}.$$

Αν $t_k = \frac{1}{k^{3/2}}$ τότε $\frac{c_k}{t_k} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \to \frac{1}{2} > 0$. Εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$ συγκλίνει (p-σειρά με $p = 3/2 > 1$) το κριτήριο της ισοδύναμης συμπεριφοράς (ή και το οριακό κριτήριο σύγκρισης) μας δίνει ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$ συγκλίνει.

(δ) Για την $\sum_{k=2}^{\infty} \delta_k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο συμπύκνωσης. Θεωρούμε την

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \delta_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k(\ln(2^k))^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\ln 2)^2} = \frac{1}{(\ln 2)^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Έπεται ότι η $\sum_{k=2}^{\infty} \delta_k$ συγκλίνει κι αυτή. □

Ασκηση 3. Έστω ότι $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι οι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{1+\alpha_k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{1+\alpha_k^2}$$

συγκλίνουν επίσης.

Υπόδειξη: (α) Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, έχουμε $\alpha_k \to 0$. Επομένως, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geq m$, $0 \leq \alpha_k \leq 1$. Τότε, για κάθε $k \geq m$ έχουμε $0 \leq \alpha_k^2 \leq \alpha_k$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγκλίνει.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το οριακό κριτήριο σύγκλισης: Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, άρα $\alpha_k \to 0$. Αφού

$$\frac{\alpha_k^2}{\alpha_k} = \alpha_k \to 0,$$

έπεται ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγκλίνει.

(β) Παρατηρήστε ότι $0 \leq \frac{\alpha_k}{1+\alpha_k} \leq \alpha_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{1+\alpha_k}$ συγκλίνει.

(γ) Παρατηρήστε ότι $0 \leq \frac{\alpha_k^2}{1+\alpha_k^2} \leq \alpha_k^2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Κατόπιν, χρησιμοποιήστε το (α). □

Ασκηση 4. Έστω $(\alpha_k), (\beta_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$ συγκλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\beta_k$ συγκλίνει απολύτως.

Υπόδειξη: Από την υπόθεση, οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$ συγκλίνουν, άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\alpha_k^2 + \frac{1}{2}\beta_k^2\right)$ συγκλίνει κι αυτή. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $|\alpha_k\beta_k| \leq \frac{1}{2}\alpha_k^2 + \frac{1}{2}\beta_k^2$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k\beta_k|$ συγκλίνει. Δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\beta_k$ συγκλίνει απολύτως. □

Ασκηση 5. (α) Έστω (α_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k > 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha_k}}$ συγκλίνει.
(β) Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$.

Υπόδειξη: (α) Θεωρούμε $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιον ώστε $1 < \alpha < s := \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου ακολουθίας με $\varepsilon = s - \alpha > 0$, βρίσκουμε k_0 τέτοιον ώστε $\alpha_k > \alpha$ για κάθε $k \geq k_0$.

Συνεπώς, για κάθε $k \geq k_0$ έχουμε

$$0 < \frac{1}{k^{\alpha_k}} \leq \frac{1}{k^{\alpha}}.$$

Ο α είναι σταθερός (δεν εξαρτάται από το k) και μεγαλύτερος από 1, άρα η σειρά $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha_k}}$ συγκλίνει, άρα και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha_k}}$ συγκλίνει.
(β) Θεωρούμε την $\beta_k = 1/k$. Έχουμε

$$\frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{k}{k\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \to 1 > 0.$$

Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά αποκλίνει (διότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει). □

Ασκηση 6. Έστω (α_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει τότε $k\alpha_k \to 0$.

Υπόδειξη: Θέτουμε $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$. Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε ότι $s_n \to s$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$ τότε $|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{4}$. Έπεται ότι αν $n > m \geq n_0$ τότε

$$\alpha_{m+1} + \cdots + \alpha_n = |s_n - s_m| < |s_n - s| + |s - s_m| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ειδικότερα, αν $n \geq 2n_0$, παίρνοντας $m = n_0$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η (α_n) είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\frac{\varepsilon}{2} > \alpha_{n_0+1} + \cdots + \alpha_n \geq (n - n_0)\alpha_n \geq \frac{n\alpha_n}{2},$$

διότι $n - n_0 \geq \frac{n}{2}$. Δηλαδή, αν $n \geq 2n_0$ έχουμε $n\alpha_n < \varepsilon$. Έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(n\alpha_n) = 0$. □

Ασκηση 7. Δίνεται η ακολουθία (α_k) με αναδρομικό τύπο

$$\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k}{2 + \alpha_k^2}, \qquad \alpha_1 > 0\,.$$

Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών (α_k), $(\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k})$ και να μελετήσετε τη σύγκλιση των σειρών

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2\alpha_k \text{ και } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Big(\alpha_k + \frac{1}{k}\Big)\,.$$

Υπόδειξη: Έχουμε ότι $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k}{2+\alpha_k^2} < \alpha_k$. Δηλαδή, η (α_k) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και άρα συγκλίνουσα. Αν α είναι το όριο της, τότε από τον αναδρομικό τύπο παίρνουμε ότι $\alpha(2 + \alpha^2) = \alpha$ και συνεπώς $\alpha = 0$. Χρησιμοποιώντας πάλι τον αναδρομικό τύπο βρίσκουμε ότι

$$\frac{(k+1)^2\alpha_{k+1}}{k^2\alpha_k} = \frac{(k+1)^2}{k^2}\frac{1}{2 + \alpha_k^2} \to \frac{1}{2} < 1$$

και αυτό με τη σειρά του μας δίνει από το κριτήριο του λόγου ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k^2\alpha_k$ συγκλίνει. Τέλος, αφού η ακολουθία $\alpha_k + \frac{1}{k}$ είναι φθίνουσα και μηδενική, συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(\alpha_k + \frac{1}{k}\right)$ συγκλίνει, από το κριτήριο Leibniz. □