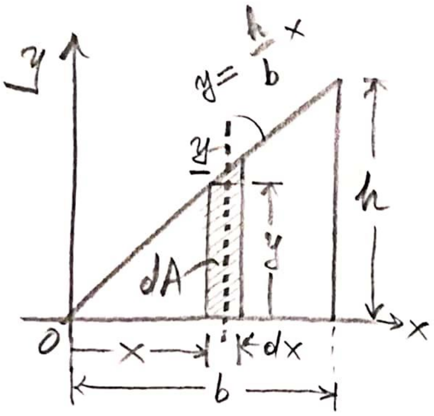
1) Ορθογώνιο τρίγωνο

Από παρατήρηση σελ. 27, εάν θεωρήσουμε $dA=dx\,dy$ δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα στους υπολογισμούς του I_{ij}. Εφόσον όμως, όπως παρακάτω, θεωρήσουμε το dA ως λωρίδα, τότε για την αποφυγή λαθών χρήση πάντα του Θεωρ. Παραλλ. Αξόνων.



$$dA = y\,dx$$

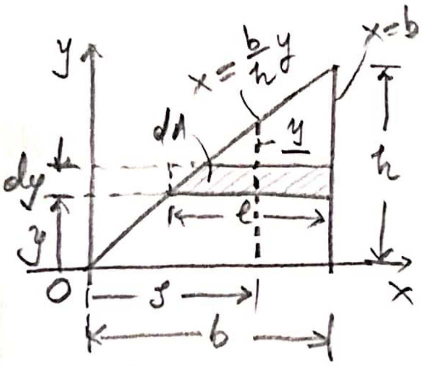
$$dI_{\underline{yy}} = \frac{y\,dx^3}{12} \cong 0$$

$$dI_{yy} = dI_{\underline{yy}} + x^2 dA = \quad \text{Αυστηρά (Θεωρ. Παραλλ. Αξον.)}$$

$$= 0 + x^2 y\,dx = x^2 \frac{h}{b} x\,dx = \frac{h}{b} x^3 dx$$

$$I_{yy} = \int dI_{yy} = \int_{x=0}^{x=b} \frac{h}{b} x^3 dx = \frac{h}{b} \frac{x^4}{4}\Big|_0^b \Rightarrow \boxed{I_{yy} = \frac{hb^3}{4}} \quad (4.1)$$

Εναλλακτικά



$$dA = l\,dy, \quad l = b - \frac{b}{h}y \quad \text{(ή από όμοια τρίγωνα)}$$

$$s = \frac{b + \frac{b}{h}y}{2} = \frac{1}{2}\left(b + \frac{b}{h}y\right) \text{ ή } = \frac{b}{h}y + \frac{l}{2}$$

$$dI_{\underline{yy}} = dy\frac{l^3}{12}$$

$$dI_{yy} = dI_{\underline{yy}} + s^2 dA = \text{(Θεωρ. Παραλλ. Αξον.)} \; (*)$$

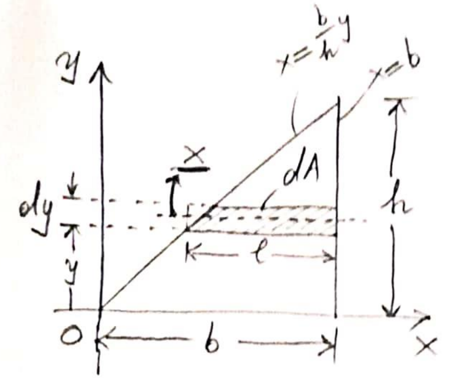
$$= \frac{l^3}{12}dy + \left(\frac{b}{h}y + \frac{l}{2}\right)^2 l\,dy = \left(\frac{l^3}{12} + \frac{b^2}{h^2}y^2 l + \frac{3\,l^2}{3\cdot 4}l + \frac{byl}{h}l\right)dy =$$

$$= \left(\frac{l^3}{3} + \frac{by}{h}l^2 + \frac{b^2y^2}{h^2}l\right)dy = \left[\frac{1}{3}\left(b - \frac{b}{h}y\right)^3 + \frac{by}{h}\left(b - \frac{b}{h}y\right)^2 + \frac{b^2y^2}{h^2}\left(b - \frac{b}{h}y\right)\right]dy =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\left(b^3 - 3b^2\frac{by}{h} + 3b\frac{b^2y^2}{h^2} - \frac{b^3y^3}{h^3}\right) + \frac{by}{h}\left(b^2 + \frac{b^2y^2}{h^2} - \frac{2b^2y}{h}\right) + \frac{b^3y^2}{h^2} - \frac{b^3y^3}{h^3}\right]dy =$$

$$= \left(\frac{b^3}{3} - \cancel{\frac{b^3y}{h}} + \cancel{\frac{b^3y^2}{h^2}} - \frac{b^3y^3}{3h^3} + \cancel{\frac{b^3y}{h}} + \cancel{\frac{b^3y^3}{h^3}} - \cancel{\frac{2b^3y^2}{h^2}} + \cancel{\frac{b^3y^2}{h^2}} - \cancel{\frac{b^3y^3}{h^3}}\right)dy \Rightarrow \boxed{dI_{yy} = \frac{b^3}{3} - \frac{b^3y^3}{3h^3}}$$

$$I_{yy} = \int dI_{yy} = \int_0^h \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^3y^3}{3h^3}\right)dy = \frac{b^3}{3}h - \frac{b^3}{3h^3}\frac{h^4}{4} = \frac{3b^3h}{12} \Rightarrow \boxed{I_{yy} = \frac{b^3h}{4}} \equiv (4.1) \checkmark$$



$dA = \ell\, dy \quad , \quad \ell = b - \frac{b}{h} y$ (ή από όμοια τρίγωνα)

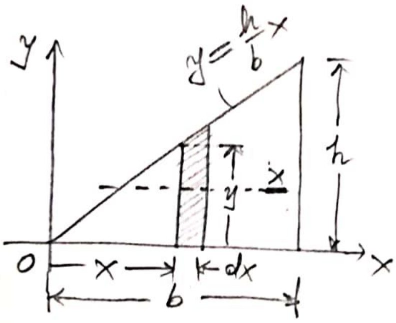
$d\bar{I}_{\underline{xx}} = \frac{\ell\, dy^3}{12} \cong 0$

$dI_{xx} = dI_{\underline{xx}} + y^2 dA =$ (Αυστηρά: Θεώρ. Παραλ. Αξόν.)

$= 0 + y^2 \ell\, dy = y^2\left(b - \frac{b}{h} y\right) dy$

$$I_{xx} = \int dI_{xx} = \int_{y=0}^{y=h} \left(b y^2 - \frac{b}{h} y^3\right) dy = b\frac{h^3}{3} - \frac{b}{h}\frac{h^4}{4} \Rightarrow \boxed{I_{xx} = \frac{bh^3}{12}} \quad (4.2)$$

Εναλλακτικά



$dA = y\, dx$

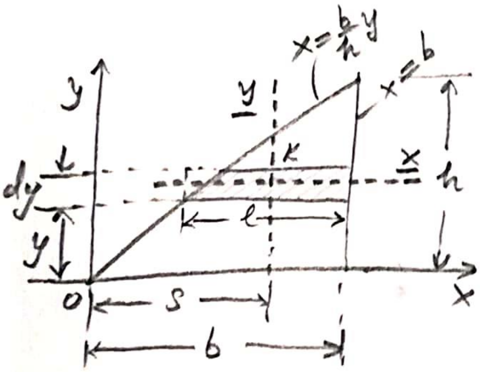
$dI_{\underline{xx}} = \frac{dx\, y^3}{12}$

$dI_{xx} = dI_{\underline{xx}} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 dA =$ (Θεώρ. Παραλ. Αξόν.)

$= \frac{y^3}{12} dx + \frac{3 \cdot y^2}{3 \cdot 4} y\, dx = \frac{y^3}{3} dx$

$$I_{xx} = \int dI_{xx} = \int_{x=0}^{x=b} \frac{y^3}{3} dx = \frac{1}{3}\int_0^b \frac{h^3}{b^3} x^3 dx = \frac{h^3}{3b^3}\frac{b^4}{4} \Rightarrow \boxed{I_{xx} = \frac{h^3 b}{12}} \equiv (4.2)$$

Γινόμενο της αδράνειας (*)



$d\bar{I}_{\underline{xy}} = 0$ (γινόμενο ορθογων. αδράνειας ως προς σύστημα στο κεντροειδές — είναι και κύριο σύστημα για τον I_{ii})

$dI_{xy} = dI_{\underline{xy}} + \underbrace{(-s)(-y)}_{\text{(από } K\underline{xy} \to Oxy)} dA$ (Αυστηρά: Θεώρ. Παρ. Αξόν.)

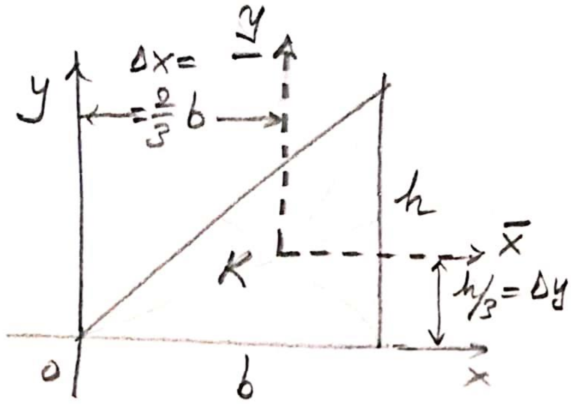
$s = \frac{b}{h} y + \frac{\ell}{2} \;, \; dA = \ell\, dy \Rightarrow$

$\Rightarrow dI_{xy} = \left(\frac{b}{h} y + \frac{\ell}{2}\right) y\, \ell\, dy = \left(\frac{b y^2 \ell}{h} + \frac{y \ell^2}{2}\right) dy \xlongequal{\ell = b - \frac{b}{h}y}$

$= \left[\frac{b}{h} y^2 \left(b - \frac{b}{h} y\right) + \frac{y}{2}\left(b - \frac{b}{h} y\right)^2\right] dy = \left(\cancel{\frac{b^2}{h}y^2} - \frac{2 \cdot b^2}{2 \cdot h^2} y^3 + \frac{y b^2}{2} + \frac{y^3 b^2}{2h^2} - \cancel{\frac{y^2}{2} 2 \frac{b^2}{h}}\right) dy =$

$= \left(\frac{b^2 y}{2} - \frac{b^2}{2h^2} y^3\right) dy \;, \; \boxed{I_{xy} = \int dI_{xy} = \int_0^h \left(\frac{b^2 y}{2} - \frac{b^2}{2h^2} y^3\right) dy = \frac{b^2}{2}\frac{h^2}{2} - \frac{b^2}{2h^2}\frac{h^4}{4} = \frac{b^2 h^2}{8}} \; (4.3)$

Υπολογισμός $\underline{I}_{ij}$ του ορθογων. τριγώνου ως προς σύστημα στο γεωμετρικό του κέντρο $K\underline{xy}$, με το Θεώρημα Παραλλήλων Αξόνων:



$$(24.\alpha):\ I_{xx} = I_{\underline{xx}} + \Delta y^2 A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{\underline{xx}} = I_{xx} - \Delta y^2 A \overset{(4.2)}{=} \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} \Rightarrow \boxed{I_{\underline{xx}} = \frac{bh^3}{36}} \quad (4.4)$$

$$(24.\beta):\ I_{yy} = I_{\underline{yy}} + \Delta x^2 A \Rightarrow I_{\underline{yy}} = I_{yy} - \Delta x^2 A \overset{(4.1)}{=}$$

$$= \frac{hb^3}{4} - \left(\frac{2}{3}b\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{4} - \frac{\cancel{4}^{2} b^3 h}{9\cdot \cancel{2}} = \frac{(9-8)hb^3}{36} \Rightarrow \boxed{I_{\underline{yy}} = \frac{hb^3}{36}} \quad (4.5)$$

$$(24.\gamma):\ I_{xy} = I_{\underline{xy}} + \Delta x \Delta y A \Rightarrow I_{\underline{xy}} = I_{xy} - \Delta x \Delta y A \overset{(4.3)}{=}$$

$$= \frac{b^2h^2}{8} - \left(-\frac{2}{3}b\right)\left(-\frac{h}{3}\right)\frac{bh}{\cancel{2}} = \frac{b^2h^2}{8} - \frac{b^2h^2}{9} \Rightarrow \boxed{I_{\underline{xy}} = \frac{b^2h^2}{72}} \quad (4.6)$$