ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4, ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας την απάντησή σας.

1. Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει τότε η ακολουθία $b_n = a_{2n} - a_{2n-1}$ συγκλίνει στο 0.
2. Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$ και $a_{3n} = 1$ τότε $a = 1$.
3. Υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $k_1 < k_2 < \ldots$ τέτοια ώστε η ακολουθία $a_n = \cos k_n$ συγκλίνει.

Λύση.

1. ΣΩΣΤΟ, αν $a = \lim a_n$ τότε οι (a_{2n}) και (a_{2n-1}) συγκλίνουν στο a ως υπακολουθίες της (a_n) και άρα η διαφορά τους $a_{2n} - a_{2n-1}$ συγκλίνει στο $a - a = 0$.
2. ΣΩΣΤΟ, διότι η (a_{3n}) είναι υπακολουθία της συγκλίνουσας ακολουθίας (a_n) και άρα $1 = \lim a_{3n} = \lim a_n$.
3. ΣΩΣΤΟ, η ακολουθία $a_n = \cos n$ είναι φραγμένη ακολουθία και άρα από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $k_1 < k_2 < \ldots$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε η $a_{k_n} = \cos k_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 2. Αποδείξτε οτι δεν υπάρχει ακολουθία φυσικών αριθμών που να είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση. Έστω ότι υπήρχε ακολουθία (k_n) στο $\mathbb{N}$ με $k_1 > k_2 > k_3 > \ldots$. Το σύνολο των όρων της (k_n), $K = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ ως μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει minimum (αρχή της Καλής διάταξης του $\mathbb{N}$). Το $\min K$ είναι στοιχείο του K και άρα $\min K = k_{n_0}$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Όμως $k_{n_0+1} < k_{n_0}$ αφού η (k_n) είναι γνησίως φθίνουσα. Αυτό σημαίνει ότι το K περιέχει στοιχείο που είναι γνήσια μικρότερο από το ελάχιστο στοιχείο του, πράγμα που είναι βέβαια αδύνατο να συμβαίνει.

Άσκηση 3. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία και έστω (a_{k_n}) μια υπακολουθία της.

(α) Δείξτε ότι η (a_{k_n}) και η (a_n) έχουν κοινά άνω φράγματα.

(β) Δείξτε ότι αν η (a_{k_n}) συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει $\lim a_n = \lim a_{k_n}$.

Λύση. (α) Αν M άνω φράγμα της (a_n) τότε $a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα και $a_{k_n} \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα κάθε άνω φράγμα της (a_n) είναι και άνω φράγμα της (a_{k_n}). Αντίστροφα, έστω $M \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα της (a_{k_n}) και έστω $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $k_n \geq n$ και η (a_n) είναι αύξουσα έχουμε $a_n \leq a_{k_n} \leq M$ και άρα $a_n \leq M$. Συνεπώς κάθε άνω φράγμα της (a_{k_n}) είναι άνω φράγμα της (a_n).

(β) Αφού η (a_{k_n}) είναι συγκλίνουσα θα είναι και άνω φραγμένη. Από το (α) έχουμε ότι η (a_n) και η (a_{k_n}) έχουν κοινό σύνολο άνω φραγμάτων. Ειδικότερα το μικρότερο άνω φράγμα θα είναι το ίδιο και για τιω δύο ακολουθίες και άρα $\sup a_n = \sup a_{k_n}$. Επειδή είναι και οι δύο αύξουσες από το Θεώρημα σύγκλισης μονότονων και φραγμένων ακολουθιών έχουμε ότι $\lim a_n = \sup a_n = \sup a_{k_n} = \lim a_{k_n}$.

Άσκηση 4. Έστω $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (α) Δείξτε ότι η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και εξηγείστε γιατί η (a_n) είναι συγκλίνουσα. (β) Βρείτε το $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ και δείξτε ότι $\lim_n a_n = 0$.

Λύση. (α) Είναι άμεσο ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα για να δείξουμε ότι η (a_n) είναι φθίνουσα μπορούμε να εξετάσουμε τον λόγο $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, διότι η ακολουθία $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα με πρώτο όρο το 2. Άρα η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και συνεπώς είναι συγκλίνουσα ως φθίνουσα και κάτω φραγμένη.

(β) Έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e}$$

Έστω $a = \lim_n a_n$. Επειδή η (a_{n+1}) είναι υπακολουθία της (a_n) έπεται ότι $\lim a_{n+1} = \lim a_n = a$. Αν $a \neq 0$ θα έπρεπε

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim_n a_{n+1}}{\lim_n a_n} = \frac{a}{a} = 1$$

άτοπο. Άρα $a = 0$.

Άσκηση 5. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

$$(\alpha)\ \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n \qquad (\beta)\ \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \qquad (\gamma)\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad (\delta)\ \left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^{2n^2}$$

Λύση. (α) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} a_n = \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n &= \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right)^n \\ &= \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \to e^2 \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι $1 < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$ και άρα

$$1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < e$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παίρνοντας n-οστές ρίζες έχουμε

$$1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n < \sqrt[n]{e}$$

Επειδή $\sqrt[n]{a} \to 1$ για κάθε $a > 0$, από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών έπεται ότι $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n \to 1$.

(γ) Από την ανισότητα Bernoulli έχουμε

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1 + n^2\frac{1}{n} = 1+n$$

και άρα $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \to +\infty$.

(δ) Από τον Ορισμό του αριθμού e έχουμε $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ και άρα $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n^2}\right)^{3n^2} = e$ (ως όριο υπακολουθίας). Οπότε $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n^2}\right)^{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{3n^2}\right)^{3n^2}\right]^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$.

Άσκηση 6. Έστω $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3 + a_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) είναι θετική, μονότονη και φραγμένη και υπολογίστε το όριό της.

Λύση. Με επαγωγή βλέπουμε ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3 + a_n} < \dfrac{a_n}{3} < a_n$ και άρα η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα. Επειδή είναι και κάτω φραγμένη από το μηδέν, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης είναι συγκλίνουσα. Έστω $a = \lim_n a_n$ το όριό της. Τότε $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3 + a_n} \Rightarrow a = \dfrac{a}{3 + a} \Rightarrow a^2 + 3a = a \Leftrightarrow a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(a + 2) = 0 \Rightarrow a = 0$ ή $a = -2$. Επειδή $a_n > 0 \Rightarrow a \geq 0$ οπότε $a = 0$.

Άσκηση 7. Έστω $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = \dfrac{1}{3 - a_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (α) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$0 < a_{n+1} < a_n < 3 \tag{1}$$

(β) Εξηγείστε γιατί η (a_n) είναι συγκλίνουσα και υπολογίστε το όριό της.

Λύση. (α) Θα αποδείξουμε την (1) με επαγωγή. Για $n = 1$ είναι άμεσο: $a_1 = 2 \Rightarrow a_2 = \dfrac{1}{3 - 2} = 1$ και άρα $0 < a_2 < a_1 < 3$. Έστω ότι η (1) ισχύει για κάποιο $n = k \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$0 < a_{k+1} < a_k < 3$$

Θα δείξουμε ότι τότε ισχύει και για το $n = k + 1$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{3 - x}$, με $x < 3$ είναι γνησίως αύξουσα και θετική. Άρα,

$$0 < a_{k+1} < a_k < 3 \Rightarrow 0 < f(a_{k+1}) < f(a_k) \Rightarrow 0 < a_{k+2} < a_{k+1}$$

Επειδή $a_{k+1} < 3$ έχουμε $0 < a_{k+2} < a_{k+1} < 3$ και η απόδειξη του επαγωγικού βήματος ολοκληρώθηκε. Από Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής η (1) ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

(β) Από το (i) η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0. Άρα είναι συγκλίνουσα ως μονότονη και φραγμένη. Έστω $x = \lim_n a_n$. Τότε και $a_{n+1} \to x$. Άρα

$$a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n} \Rightarrow a_{n+1}(3 - a_n) - 1 = 0 \Rightarrow 3a_{n+1} - a_n a_{n+1} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Επειδή η (a_n) είναι φθίνουσα έχουμε $a_n \leq a_1 = 2 \Rightarrow \lim a_n \leq 2 \Rightarrow x \leq 2$. Άρα η περίπτωση $x = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} > 2$ απορρίπτεται. Άρα $x = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Άσκηση 8. Έστω $a > 0$. Επιλέγουμε $a_1 > \sqrt{a}$ και έστω (a_n) η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \tag{2}$$

Δείξτε τα εξής: (α) $a_n \geq \sqrt{a}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, (β) $\dfrac{a}{a_n} \leq a_{n+1} \leq a_n$ (γ) $a_n \to \sqrt{a}$.

Λύση. (α) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αν $n = 1$ η ανισότητα ισχύει αφού από υπόθεση $a_1 > \sqrt{a}$. Έστω ότι $a_k \geq \sqrt{a}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Από την ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου,

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{a}{a_k}\right) \geq \sqrt{a_k \cdot \frac{a}{a_k}} = \sqrt{a}$$

(β) Από το (α) έχουμε

$$a_n \geq \sqrt{a} \Rightarrow a_n^2 \geq a \Rightarrow a_n \geq \frac{a}{a_n}$$

και άρα επειδή ο a_{n+1} είναι ο μέσος όρος των a_n και $\dfrac{a}{a_n}$ θα πρέπει

$$\frac{a}{a_n} \leq a_{n+1} \leq a_n$$

(γ) Από το (β) έχουμε ότι η (a_n) είναι φθίνουσα και από το (α) ότι είναι κάτω φραγμένη. Άρα η (a_n) είναι συγκλίνουσα με $x = \lim_n a_n \geq \sqrt{a} > 0$. Επιπλέον, $\lim a_{n+1} = x$. Άρα

$$x = \lim_n a_{n+1} = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \Rightarrow 2x = x + \frac{a}{x} \Rightarrow x = \frac{a}{x} \Rightarrow x^2 = a$$

Επειδή όπως είδαμε $x > 0$ έχουμε ότι $x = \sqrt{a}$.

Άσκηση 9. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών.

(α) Αν $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ δείξτε ότι $\lim_n a_n = 0$.

(β) Αν $\lim_n \sqrt[n]{a_n} < 1$ δείξτε ότι $\lim_n a_n = 0$.

Λύση. (α) Επειδή $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$ για κάθε $n \geq n_0$. Με άλλα λόγια η ακολουθία (a_n) είναι τελικά φθίνουσα. Επειδή είναι και κάτω φραγμένη από το 0 είναι συγκλίνουσα με $\lim_n a_n \geq 0$. Έστω $a = \lim_n a_n$. Επειδή η (a_{n+1}) είναι υπακολουθία της (a_n) έχουμε $a = \lim_n a_{n+1}$. Αν $a \neq 0$ τότε $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a}{a} = 1$ άτοπο. Άρα $a = 0$.

(β) Έστω $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$. Επιλέγουμε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $ell < \lambda < 1$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\sqrt[n]{a_n} < \lambda \Leftrightarrow 0 \leq a_n \leq \lambda^n$ για όλα τα $n \geq n_0$. Από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών $a_n \to 0$.

Άσκηση 10. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} \tag{3}$$

(β) Αποδείξτε ότι $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$.

Λύση. Θα αποδείξουμε την (3) με Μαθηματική Επαγωγή. Για $n = 1$ η (3) λέει ότι $2 < e < 4$ που ισχύει. Έστω ότι η ανισότητα ισχύει για κάποιο $n = k$, δηλαδή έστω ότι

$$\frac{(k+1)^k}{k!} < e^k < \frac{(k+1)^{k+1}}{k!} \tag{4}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < e < \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \tag{5}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από την (5) για $n = k+1$ έχουμε

$$\frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} < e < \frac{(k+2)^{k+2}}{(k+1)^{k+2}} \tag{6}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη την (4) με την (6) παίρνουμε

$$\frac{(k+1)^k}{k!}\frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} < e^k \cdot e < \frac{(k+1)^{k+1}}{k!}\frac{(k+2)^{k+2}}{(k+1)^{k+2}}$$

Κάνοντας πράξεις παίρνουμε

$$\frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)!} < e^{k+1} < \frac{(k+2)^{k+2}}{(k+1)!}$$

που είναι η (3) για $n = k+1$.

(β) Από την (3) παίρνοντας n-οστές ρίζες έχουμε,

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} < e < \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \sqrt[n]{n+1}$$

και άρα

$$\frac{e}{\sqrt[n]{n+1}} - \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} < e - \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \tag{7}$$

Επειδή

$$1 \leq \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}$$

και

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{1}{n}$$

από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακλουθιών έχουμε ότι $\sqrt[n]{n+1} \to 1$ και $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$. Από την (7) και πάλι από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών παίρνουμε ότι $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$.

Άσκηση 11. (α) Αν $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ δείξτε ότι $b_{n-1}^{-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στο $\dfrac{1}{e}$.

(γ) Βρείτε το $\lim\limits_n \dfrac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n}$.

Λύση. (α) Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι $a_n = b_{n-1}^{-1}$.

(β) $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{b_{n-2}}{b_{n-1}} > 1$ επειδή η (b_n) είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης $b_n \to e$ και άρα $\lim a_n = \dfrac{1}{\lim b_{n-1}} = \dfrac{1}{e}$.

(γ) Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
1+2^2+\cdots+(n-2)^{n-2}+(n-1)^{n-1}+n^n &< (n-2)(n-2)^{n-2}+(n-1)^{n-1}+n^n \\
&= (n-2)^{n-1}+(n-1)^{n-1}+n^n \\
&< 2(n-1)^{n-1}+n^n \\
&< \left[2\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}+1\right]n^n \\
&= \left[2\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n-1}+1\right]n^n \\
&< \left[\frac{2}{e(n-1)}+1\right]n^n
\end{aligned}$$

διότι από το (β) συμπεραίνουμε ότι $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e}$. Άρα

$$1 \leq \frac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n} \leq \frac{2}{e(n-1)}+1$$

για κάθε $n \geq 2$. Συνεπώς από Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών $\lim\limits_n \dfrac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n} = 1$.