ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκηση 1. Έστω (α_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας).

(α) Αν $\alpha_k \to 0$ τότε η ακολουθία $s_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ είναι φραγμένη.

(β) Αν η ακολουθία $s_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

(γ) Αν $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $0 < \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

(δ) Αν $\alpha_k \to 0$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k$ συγκλίνει.

(ε) Αν $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}$ συγκλίνει.

(στ) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγκλίνει.

Ασκηση 2. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\text{(α)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}, \qquad \text{(β)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{4^k}, \qquad \text{(γ)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}, \qquad \text{(δ)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}\,.$$

Ασκηση 3. Έστω ότι $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι οι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{1 + \alpha_k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2}$$

συγκλίνουν επίσης.

Ασκηση 4. Έστω $(\alpha_k), (\beta_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$ συγκλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k$ συγκλίνει απολύτως.

Ασκηση 5. (α) Έστω (α_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{k \to \infty} \alpha_k > 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha_k}}$ συγκλίνει.
(β) Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$.

Ασκηση 6. Έστω (α_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει τότε $k\alpha_k \to 0$.

Ασκηση 7. Δίνεται η ακολουθία (α_k) με αναδρομικό τύπο

$$\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k}{2 + \alpha_k^2}, \qquad \alpha_1 > 0\,.$$

Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών (α_k), $(\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k})$ και να μελετήσετε τη σύγκλιση των σειρών

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \alpha_k \text{ και } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\alpha_k + \frac{1}{k}\right).$$