Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2024–25)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 24 Νοεμβρίου 2024)

1. Έστω X ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο. Ορίζουμε $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ με $\varphi(A) = 0$ αν το $A \subseteq X$ είναι αριθμήσιμο και $\varphi(A) = 1$ αν το $A \subseteq X$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αποδείξτε ότι το φ είναι εξωτερικό μέτρο και προσδιορίστε την σ-άλγεβρα των $\mathcal{M}_\varphi$ των φ-μετρήσιμων υποσυνόλων του X.

2. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει εξωτερικό μέτρο φ στο $\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε

$$\varphi(\{q \in \mathbb{Q} : a \leqslant q \leqslant b\}) = b - a$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{Q}$ με $a < b$.

3. Έστω φ εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X. Αποδείξτε ότι αν $E \in \mathcal{M}_\varphi$ τότε για κάθε $F \subseteq X$ ισχύει ότι

$$\varphi(E) + \varphi(F) = \varphi(E \cup F) + \varphi(E \cap F).$$

4. Έστω φ εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X και $A \subseteq C \subseteq X$. Αποδείξτε ότι αν $B \in \mathcal{M}_\varphi$ και ισχύουν οι $A \subseteq B$ και $\varphi(A) = \varphi(B)$ τότε $\varphi(C) = \varphi(B \cup C)$.

5. (α) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $B \subseteq E$ και $\lambda^*(E \setminus B) < \varepsilon$. Αποδείξτε ότι το B είναι Lebesgue μετρήσιμο.
(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < +\infty$. Αν $B \subseteq A$ και

$$\lambda^*(B) + \lambda^*(A \setminus B) = \lambda(A)$$

αποδείξτε ότι το B είναι Lebesgue μετρήσιμο.
(γ) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το B είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\lambda^*((-n, n) \cap B) + \lambda^*((-n, n) \setminus B) = 2n.$$

6. Έστω E το σύνολο των $x \in [0, 1]$ που το δεκαδικό τους ανάπτυγμα περιέχει άπειρες φορές την τετράδα ψηφίων 2024 με αυτή τη σειρά. Αποδείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο και υπολογίστε το μέτρο του.

7. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$, $x \neq y$, τέτοια ώστε $\dfrac{x+y}{2} \in A$.

8. Αποδείξτε ότι υπάρχει διαμέριση $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ του $[0, 1]$ και ακολουθία (x_n) πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty (x_n + A_n)$, όπου $x_n + A_n$ είναι η μεταφορά του A_n κατά x_n.

9. Έστω C το σύνολο Cantor και $f : [0, 1] \to [0, 1]$ η συνάρτηση Cantor-Lebesgue.

(α) Είναι το $C \cap \mathbb{Q}$ πυκνό στο C;

(β) Αποδείξτε ότι $C + C = [0, 2]$, δηλαδή κάθε $x \in [0, 2]$ γράφεται ως άθροισμα $x = t + s$ δύο αριθμών $t, s \in C$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν ο $q \in [0, 1]$ είναι ρητός τότε $f(q) \in \mathbb{Q}$.

(δ) Αποδείξτε ότι αν $x \in C$ και $f(x) \in \mathbb{Q}$ τότε $x \in \mathbb{Q}$.

(ε) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα Riemann $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

10. Για A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ορίζουμε $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

(α) Έστω A, B μη κενά Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε το $A + B$ να είναι Lebesgue μετρήσιμο. Αποδείξτε ότι $\lambda(A + B) \geqslant \lambda(A) + \lambda(B)$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχουν μη κενά $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$ τέτοια ώστε $A + B = \mathbb{R}$.

Ερώτηση (όχι για παράδοση): Έστω A, B μη κενά Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Είναι απαραίτητα σωστό ότι το $A + B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο;

Υποδείξεις

2. Έστω ότι υπάρχει τέτοιο εξωτερικό μέτρο φ. Υπολογίστε την τιμή $\varphi(\{q\})$ για $q \in \mathbb{Q}$.

5. Άσκηση 3.12.

6. Θεωρήστε το συμπλήρωμα $[0, 1] \setminus E$ του E. Αν σας φαίνεται απλούστερο, αντικαταστήστε «την τετράδα ψηφίων 2024» με «το ψηφίο 1».

7. Ασκήσεις 3.13 και 4.16 (β).

8. Θεωρήστε τη γνωστή σχέση ισοδυναμίας (που ορίζει το σύνολο Vitali A) στο $[0, 1]$. Θεωρήστε μια αρίθμηση $\{p_n : n \geqslant 1\}$ των ρητών του $[0, 1]$ και για κάθε $n \geqslant 1$ θεωρήστε το σύνολο $A_n = p_n + A \pmod 1$. Δηλαδή, $A_n = \{x + p_n : x \in A, x + p_n \leqslant 1\} \cup \{x + p_n - 1 : x \in A, x + p_n > 1\}$.

10. Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που τα A και B είναι συμπαγή. Υπάρχουν μεταφορές $A_1 = x + A$ και $B_1 = y + B$ των A και B τέτοιες ώστε $\max(A_1) = 0 = \min(B_1)$. Τότε, τα A_1, B_1 είναι «ουσιαστικά» ξένα και $A_1 + B_1 \supseteq A_1 \cup B_1$ (γιατί;).