ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

Άσκηση 1. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας την απάντησή σας.

1. Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει τότε η ακολουθία $b_n = a_{2n} - a_{2n-1}$ συγκλίνει στο 0.
2. Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$ και $a_{3n} = 1$ τότε $a = 1$.
3. Υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (k_n) τέτοια ώστε η ακολουθία $a_n = \cos k_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 2. Αποδείξτε οτι δεν υπάρχει ακολουθία φυσικών αριθμών που να είναι γνησίως φθίνουσα.

Άσκηση 3. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία και έστω (a_{k_n}) μια υπακολουθία της.

(α) Δείξτε ότι η (a_{k_n}) και η (a_n) έχουν κοινά άνω φράγματα.

(β) Δείξτε ότι αν η (a_{k_n}) συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει και $\lim a_n = \lim a_{k_n}$.

Άσκηση 4. Έστω $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (α) Δείξτε ότι η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και εξηγείστε γιατί η (a_n) είναι συγκλίνουσα. (β) Βρείτε το $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ και δείξτε ότι $\lim_n a_n = 0$.

Άσκηση 5. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

$$(\alpha)\ \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n \qquad (\beta)\ \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \qquad (\gamma)\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad (\delta)\ \left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^{2n^2}$$

Άσκηση 6. Έστω $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3+a_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) είναι θετική, μονότονη και φραγμένη και υπολογίστε το όριό της.

Άσκηση 7. Έστω $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = \dfrac{1}{3-a_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (α) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$0 < a_{n+1} < a_n < 3 \tag{1}$$

(β) Εξηγείστε γιατί η (a_n) είναι συγκλίνουσα και υπολογίστε το όριό της.

Άσκηση 8. Έστω $a > 0$. Επιλέγουμε $a_1 > \sqrt{a}$ και έστω (a_n) η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \tag{2}$$

Δείξτε τα εξής: (α) $a_n \geq \sqrt{a}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, (β) $\dfrac{a}{a_n} \leq a_{n+1} \leq a_n$ (γ) $a_n \to \sqrt{a}$.

Άσκηση 9. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών.

(α) Αν $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ δείξτε ότι $\lim_n a_n = 0$.

(β) Αν $\lim_n \sqrt[n]{a_n} < 1$ δείξτε ότι $\lim_n a_n = 0$.

Άσκηση 10. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} \tag{3}$$

(β) Αποδείξτε ότι $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$.

Άσκηση 11. (α) Αν $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ δείξτε ότι $b_{n-1}^{-1} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στο $\dfrac{1}{e}$.

(γ) Βρείτε το $\lim_n \dfrac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n}$.