ΣΑΤΜ
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \cos^2 t\ dt$.

Λύση. Έχουμε,

$$\begin{aligned} I = \int \cos^2 t\ dt = \int \cos t \cdot (\sin t)'\ dt &= \cos t \cdot \sin t - \int (\cos t)' \sin t\ dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + \int \sin t \sin t\ dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + \int \sin^2 t\ dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + \int \left(1 - \cos^2 t\right)\ dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + \int\ dt - \int \cos^2 t\ dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + t - \int \cos^2 t\ dt = \cos t \cdot \sin t + t - I \end{aligned}$$

και άρα

$$2I = \cos t \cdot \sin t + t \Rightarrow I = \frac{\cos t \cdot \sin t + t}{2} \tag{1}$$

Άσκηση 2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \arctan t\ dt$.

Λύση.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan t\ dt = \int_1^e (t)' \arctan t\ dt &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 t(\arctan t)'\ dt \\ &= [t \arctan t]_0^1 - \int_0^1 t \cdot \frac{1}{t^2+1}\ dt \\ &\overset{(u=t^2+1,\ du=2tdt)}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}\ du \\ &= \frac{\pi}{4} - [\ln u]_1^2 \\ &= \frac{\pi}{4} - \ln 2 \end{aligned}$$

Άσκηση 3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx$$

Λύση. Θέτουμε $u = \sqrt{x}$. Τότε $x = u^2$ οπότε $dx = 2udu$ και άρα

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx &= 2\int \frac{\arctan u}{u(1+u^2)} u\ du \\ &= 2\int \frac{\arctan u}{1+u^2}\ du \\ &= 2\int \arctan u (\arctan u)'\ du \\ &= \int \left(\arctan^2 u\right)'\ du \\ &= \arctan^2 u = \arctan^2\left(\sqrt{x}\right)^2.\end{aligned}$$

Άσκηση 4. (α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \cosh^2 t\ dt$.

(β) Δείξτε ότι

$$\int \sqrt{1+x^2}\ dx = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{2}.$$

(γ) Βρείτε το μήκος της καμπύλης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned} I = \int \cosh^2 t\ dt = \int \cosh t (\sinh t)'\ dt &= \cosh t \sinh t - \int (\cosh t)' \sinh t\ dt \\ &= \cosh t \sinh t - \int \sinh^2 t\ dt \\ &= \cosh t \sinh t - \int (\cosh^2 t - 1)\ dt \\ &= \cosh t \sinh t - \int \cosh^2 t\ dt + t = \cosh t \sinh t + t - I \end{aligned}$$

και άρα $I = \dfrac{\cosh t \sinh t + t}{2}$.

(β) Θυμίζουμε ότι

$$(\cosh u)^2 - (\sinh u)^2 = 1$$

και άρα αφού $\cosh u \geq 1 > 0$ για όλα τα $u \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\cosh u = \sqrt{1+\sinh^2 u}$$

Επίσης, η $\sinh x$ έχει αντίστροφη που δίνεται από τον τύπο

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Άρα για $u = \sinh^{-1} x$ παίρνουμε

$$\sinh\left(\sinh^{-1} x\right) = x \text{ και } \cosh\left(\sinh^{-1} x\right) = \sqrt{1+x^2}$$

Θέτοντας $x = \sinh t \Leftrightarrow t = \sinh^{-1} x$ και άρα $dx = (\sinh t)' dt = \cosh t \ dt$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\ dx = \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t\ dt = \int \cosh^2 t\ dt \\
&= \frac{1}{2}(\cosh t \cdot \sinh t + t) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cosh\left(\sinh^{-1} x\right) \cdot \sinh\left(\sinh^{-1} x\right) + \sinh^{-1} x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cosh\left(\sinh^{-1} x\right) \cdot x + \sinh^{-1} x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)
\end{aligned}$$

(γ) Έχουμε

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+y^2}\ dy$$

όπου θέσαμε $y = 2x$ και $dy = 2dx$. Από το (β) έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{1+y^2}\ dx &= \frac{1}{2}\left[\left(y\sqrt{1+y^2} + \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)\right)\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) \\
&= \sqrt{5} + \ln\sqrt{2+\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Άσκηση 5. Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης με παραμετρική αναπαράσταση

$$x(t) = \cos^3 t,\ y(t) = \sin^3 t,\ t \in [0, \pi/2]$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(3\ \cos^2 t\ (-\sin t))^2\ +\ (3\ \sin^2 t\ \cos t)^2}\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\ \cos^4 t\ \sin^2 t\ +\ 9\ \sin^4 t\ \cos^2 t}\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\ \cos^2 t\ \sin^2 t\ (\cos^2 t + \sin^2 t)}\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} 3\ |\cos t \cdot \sin t|\ dt = 3\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t\ dt
\end{aligned}$$

(αφού $\sin t, \cos t \geq 0$ όταν $0 \leq t \leq \pi/2$). Επειδή

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t\ dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)' \cdot \sin t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)'\ dt = \frac{1}{2}\left(\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)\right) = 1/2$$

παίρνουμε τελικά $L = 3/2$.

Άσκηση 6. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης με εξίσωση $y = \ln(1-x^2)$, $x \in [0, 1/2]$.

Λύση. Έχουμε $f(x) = \ln(1-x^2)$ και άρα

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}(1-x^2)' = \frac{-2x}{1-x^2}$$

για κάθε $x \in [0, 1/2]$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} L = \int_0^{1/2} \sqrt{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\ dx &= \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}\ dx \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2}\ dx \\ &= \int_0^{1/2} \frac{2-(1-x^2)}{1-x^2}\ dx \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{2}{1-x^2} - 1\right)\ dx \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - 1\right)\ dx \\ &= [-\ln(1-x) + \ln(1+x) - x]_0^{1/2} \\ &= \left[\ln\frac{1+x}{1-x} - x\right]_0^{1/2} = \ln 3 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άσκηση 7. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^k}\ dx = \begin{cases} \ln\sqrt{x^2+1} \text{ αν } k=1 \\ -\dfrac{1}{2(k-1)} \cdot \dfrac{1}{(x^2+1)^{k-1}} \text{ αν } k \geq 2 \end{cases} \tag{2}$$

Λύση. Θέτουμε $u = x^2+1$, $du = 2xdx$.

Αν $k=1$ τότε $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u = \ln\sqrt{x^2+1}$.

Αν $k \geq 2$, $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^k}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-k+1}}{-k+1} = -\frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{u^{k-1}} = -\frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}$.

Άσκηση 8. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και έστω $I_k = \dfrac{1}{(x^2+1)^k}\ dt$. Δείξτε ότι

$$I_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) I_k + \frac{1}{2k}\cdot\frac{t}{(x^2+1)^k}.$$

Λύση. Έχουμε $(\arctan x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$ και

$$\left(\frac{1}{(x^2+1)^k}\right)' = -\frac{k(x^2+1)^{k-1}2t}{(x^2+1)^{2k}} = -2k\cdot\frac{t}{(x^2+1)^{k+1}} \tag{3}$$

Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^{k+1}}\ dx &= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{k+1}} \\
&= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{k+1}}\ dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}}\ dx \\
&= \int \frac{1}{(x^2+1)^{k}}\ dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}}\ dx \\
&= I_k - \int x \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{k+1}}\ dx \\
&\overset{(3)}{=} I_k + \frac{1}{2k} \int x \cdot \left(\frac{1}{(x^2+1)^{k}} \right)'\ dx \\
&= I_k + \frac{1}{2k} \left(x \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{k}} - \int (x)' \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{k}}\ dx \right) \\
&= I_k + \frac{1}{2k} \left(\frac{x}{(x^2+1)^{k}} - I_k \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2k} \right) I_k + \frac{1}{2k} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{k}}.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 9. Δείξτε ότι το εμβαδό E της έλλειψης $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ δίνεται από τον τύπο $E = \pi ab$.

Λύση. Λύνοντας την εξίσωση $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ως προς y, έχουμε ότι συνάρτηση

$$
f(x) = y = \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},\ x \in [-a, a]
$$

έχει γραφική παράσταση το άνω τμήμα της έλλειψης $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Επομένως το εμβαδό της έλλειψης είναι

$$
E = 2 \int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2 \frac{b}{a} \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = 2ba \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\ dy = \pi ab
$$

όπου θέσαμε $y = x/a$ και $dy = dx/a$ και χρησιμοποιήσαμε ότι $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\ dy = \pi/2$ (εμβαδό ημικυκλίου ακτίνας $R = 1$).

Άσκηση 10. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$
\int \frac{x}{x^2 + 4x + 5}\ dx
$$

Λύση. Έχουμε

$$
\int \frac{x}{x^2 + 4x + 5}\ dx = \int \frac{x}{x^2 + 4x + 4 + 1}\ dx = \int \frac{x}{(x+2)^2 + 1}\ dx.
$$

Θέτουμε $y = x + 2$ και άρα $x = y - 2$ και $dx = dy$. Οπότε

$$
\int \frac{x}{x^2 + 4x + 5}\ dx = \int \frac{y-2}{y^2+1}\ dy = \int \frac{y}{y^2+1}\ dy - 2 \int \frac{1}{y^2+1}\ dy
$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $z = y^2 + 1$ και άρα $dz = 2ydy \Rightarrow ydy = dz/2$. Συνεπώς,

$$\int \frac{y}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2}\ln z = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\big(\ln(x+2)^2+1\big) = \ln\sqrt{(x+2)^2+1}.$$

Για το δεύτερο έχουμε

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan y = \arctan(x+2).$$

Τελικά,

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx = \ln\sqrt{(x+2)^2+1} - 2\arctan(x+2).$$

Άσκηση 11. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx$.

Λύση. Κάνουμε την αντικατάσταση $t = e^x$ και άρα $dt = e^x dx = tdx$, οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t+1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t+1}{t(t^2+1)}\,dt &= \int \frac{t}{t(t^2+1)}\,dt + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt \\ &= \int \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt \\ &= \arctan t + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt.\end{aligned}$$

Με απλά κλάσματα βλέπουμε ότι

$$\int \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt = \int \Big(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\Big)\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{t}{t^2+1}\,dt = \ln t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1).$$

Από τα παραπάνω και αφού $e^x = t$, παίρνουμε

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx = \arctan(e^x) + x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1).$$

Άσκηση 12. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x+\sin x}\,dx$.

Λύση. Θέτουμε

$$x = 2\arctan t \Leftrightarrow t = \tan\frac{x}{2}$$

και άρα

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Από γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες έχουμε

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{και} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Με τις παραπάνω αντικαταστάσεις το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x+\sin x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \ln 2.$$