

ΣΑΤΜ
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

Άσκηση 1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \cos^2 t \, dt$.

Άσκηση 2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \arctan t \, dt$.

Άσκηση 3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} \, dx$$

Άσκηση 4. (α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \cosh^2 t \, dt$.

(β) Δείξτε ότι

$$\int \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})}{2}.$$

(γ) Βρείτε το μήκος της καμπύλης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$.

Άσκηση 5. Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης με παραμετρική αναπαράσταση

$$x(t) = \cos^3 t, \quad y(t) = \sin^3 t, \quad t \in [0, \pi/2]$$

Άσκηση 6. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης με εξίσωση $y = \ln(1-x^2)$, $x \in [0, 1/2]$.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι το εμβαδό E της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ δίνεται από τον τύπο $E = \pi ab$.

Άσκηση 8. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^k} \, dx = \begin{cases} \ln \sqrt{x^2+1} & \text{αν } k = 1 \\ -\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{k-1}} & \text{αν } k \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

Άσκηση 9. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και έστω $I_k = \frac{1}{(x^2+1)^k} \, dt$. Δείξτε ότι

$$I_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) I_k + \frac{1}{2k} \cdot \frac{t}{(x^2+1)^k}.$$

Άσκηση 10. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5} \, dx$$

Άσκηση 11. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1} \, dx$.

Άσκηση 12. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x + \sin x} \, dx$.