Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

- **Η πολυπλοκότητα του κυκλώματος** που υλοποιεί μια συνάρτηση Boole σχετίζεται άμεσα με την **πολυπλοκότητα της αλγεβρικής έκφρασης** από την οποία η συνάρτηση υλοποιείται.

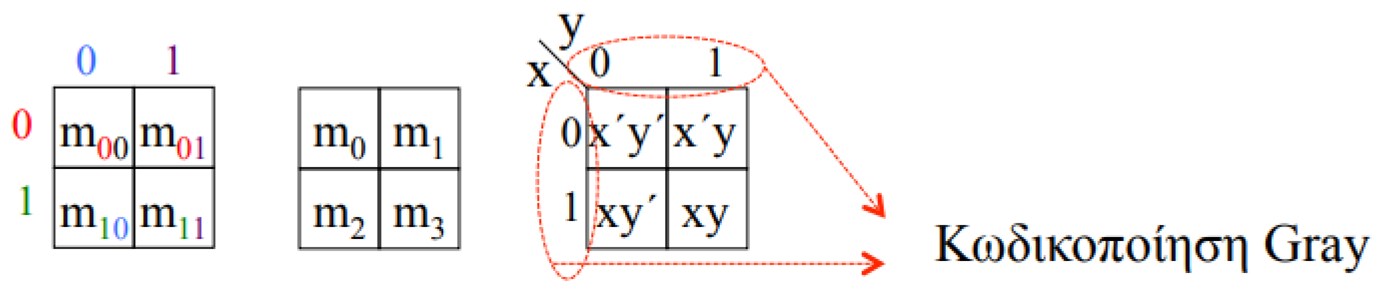
- Αν και η αναπαράσταση μιας συνάρτησης Boole με πίνακα αλήθειας είναι μοναδική, **η αλγεβρική της αναπαράσταση** μπορεί να πάρει πολλές μορφές.

- Η απλοποίηση συναρτήσεων Boole με χρήση αλγεβρικών μετασχηματισμών είναι δύσχρηστη καθώς **δεν έχει** συγκεκριμένους κανόνες.

- Η μέθοδος του χάρτη (χάρτης Karnough) είναι μια **απλή και συστηματική μέθοδος** για την απλοποίηση συναρτήσεων Boole σε ελάχιστο πλήθος παραγόντων.

Χάρτης Δυο (2) Μεταβλητών

Ο χάρτης περιέχει 4 τετράγωνα, ένα για κάθε ελαχιστόρο.



Το x εμφανίζεται ως συμπλήρωμα στη γραμμή 0 και κανονικά στη γραμμή 1. Το y εμφανίζεται ως συμπλήρωμα στη στήλη 0 και κανονικά στη στήλη 1.

Στόχος: η δημιουργία ομάδων από γειτονικούς άσσους

Χάρτης Δυο (2) Μεταβλητών

x	y	F	
0	0	1	x'y'
0	1	1	x'y
1	0	0	xy'
1	1	0	xy

$$F = x'y' + x'y = x'(y' + y) = x'(1) = x'$$

x \ y	0	1
0	1	1
1		

Οι δύο μονάδες του χάρτη έχουν διαφορετική την τιμή του y.

Απλοποιείται

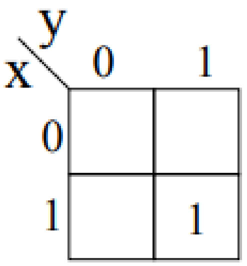
Και οι δύο μονάδες του χάρτη έχουν κοινή την τιμή x'.

Διατηρείται

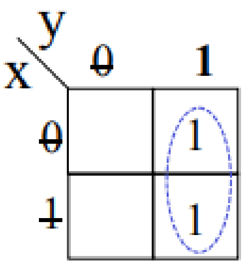
$$F = x'$$

Χάρτης Δυο (2) Μεταβλητών

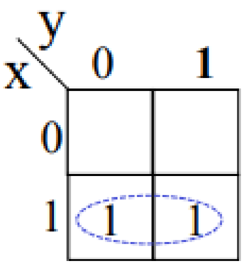
Παραδείγματα



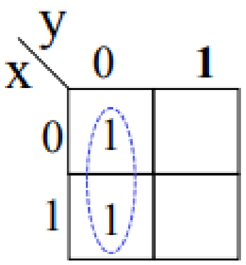
$F = xy = \Sigma(3) = m_3$



$F = x'y + xy = y$



$F = xy' + xy = x$

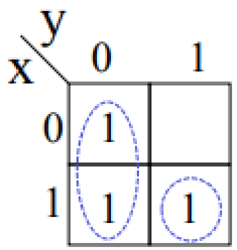


$F = x'y' + xy' = y'$

Χάρτης Δυο (2) Μεταβλητών

Βασικός στόχος:

Κάθε μονάδα στον χάρτη πρέπει να συμμετέχει σε τουλάχιστον μία ομάδα



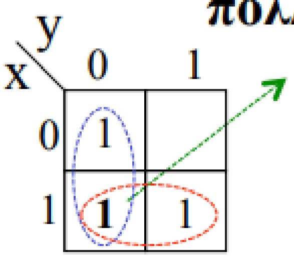
$F = y' + xy$

Η απλοποίηση δεν είναι ικανοποιητική γιατί:

$F = (y' + x)(y' + y) = y' + x$

Αιτία: η μονάδα δεν ανήκει σε μεγάλη ομάδα

Συμμετέχει σε **πολλαπλές** ομάδες

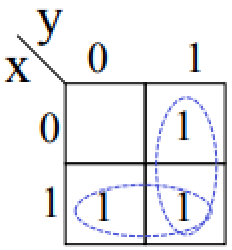


$F = y' + x$

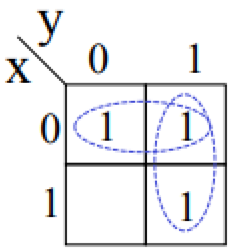
Συμπέρασμα: κάθε μονάδα πρέπει να συμπεριλαμβάνεται στη μεγαλύτερη δυνατή ομάδα

Χάρτης Δυο (2) Μεταβλητών

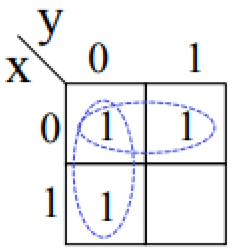
Παραδείγματα:



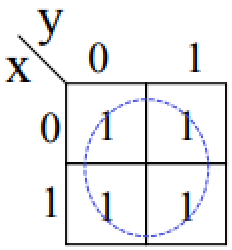
F = x+y



F = x'+y



F = x'+y'



F = 1

Προσοχή: επιλέγουμε πάντα ομάδες των 1, 2, 4, 8, 16, ... μονάδων του χάρτη

Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

Ο χάρτης περιέχει 8 τετράγωνα, ένα για κάθε ελαχιστόρο.

Οι ελαχιστόροι τοποθετούνται σε σειρά όμοια με τον κώδικα Gray.

x	y	z	
0	0	0	m_0
0	0	1	m_1
0	1	0	m_2
0	1	1	m_3
1	0	0	m_4
1	0	1	m_5
1	1	0	m_6
1	1	1	m_7

	00	01	11	10
0	m_{000}	m_{001}	m_{011}	m_{010}
1	m_{100}	m_{101}	m_{111}	m_{110}

	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

Κώδικας Gray

Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
x 1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

Κάθε δύο γειτονικά τετράγωνα διαφέρουν σε μία μεταβλητή (κανονική/ συμπληρωματική)

Διαγραφή μεταβλητής και απλοποίηση αθροίσματος
πχ. $m5+m7 = xy'z+xyz = xz(y'+y) = xz$

Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

a \ bc	00	01	11	10
0	m_{000}	m_{001}	m_{011}	m_{010}
1	m_{100}	m_{101}	m_{111}	m_{110}

Ομάδα Δύο Ελαχιστόρων

$$m_{000}+m_{100} = m_{-00} = b'c'$$

a \ bc	00	01	11	10
0	m_{000}	m_{001}	m_{011}	m_{010}
1	m_{100}	m_{101}	m_{111}	m_{110}

Ομάδα Τεσσάρων Ελαχιστόρων

$$m_{011}+m_{010}+m_{111}+m_{110}=$$

$$m_{-1-} = b$$

a \ bc	00	01	11	10
0	m_{000}	m_{001}	m_{011}	m_{010}
1	m_{100}	m_{101}	m_{111}	m_{110}

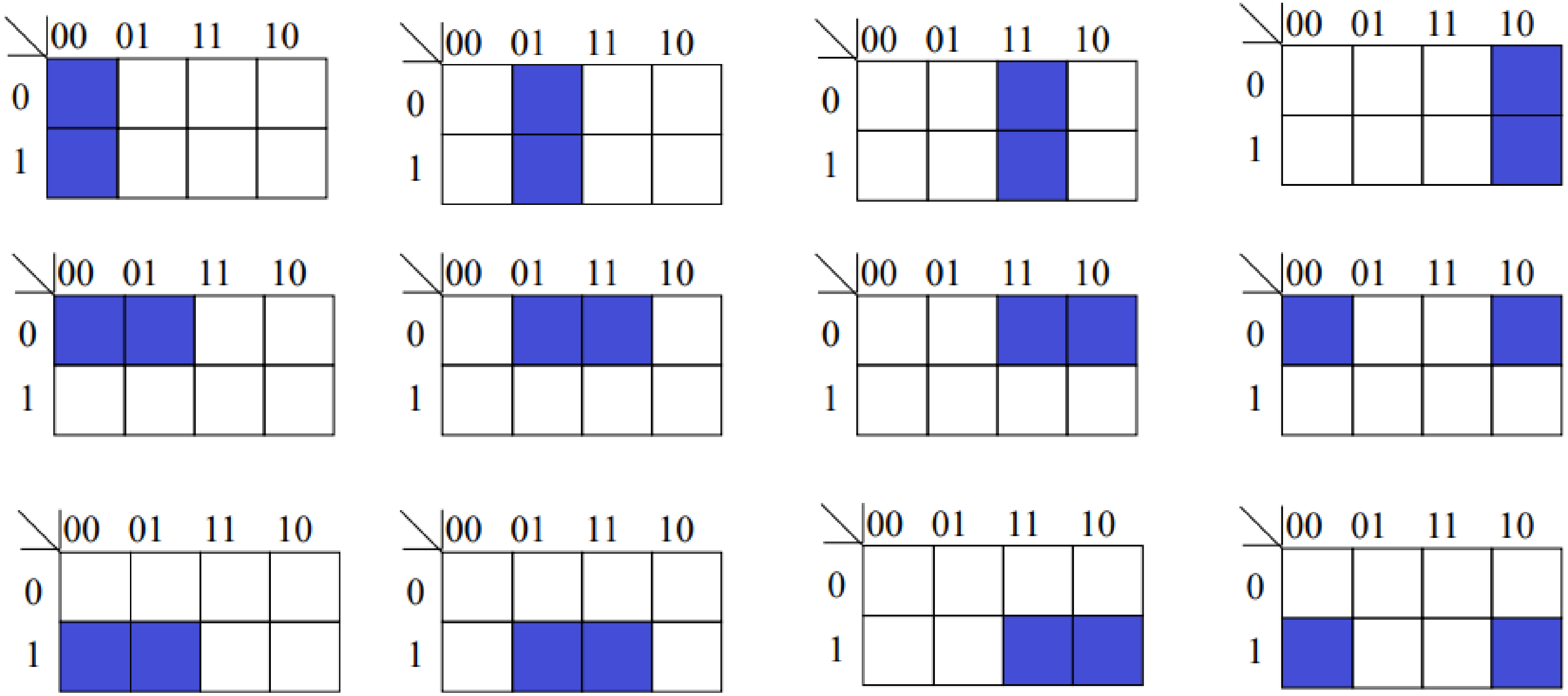
Ομάδα Οκτώ Ελαχιστόρων

$$m_{000}+m_{001}+m_{010}+m_{011}+$$
$$m_{100}+m_{101}+m_{110}+m_{111}=1$$

Υπάρχουν πολλές πιθανές ομάδες των 2 και 4 ελαχιστόρων

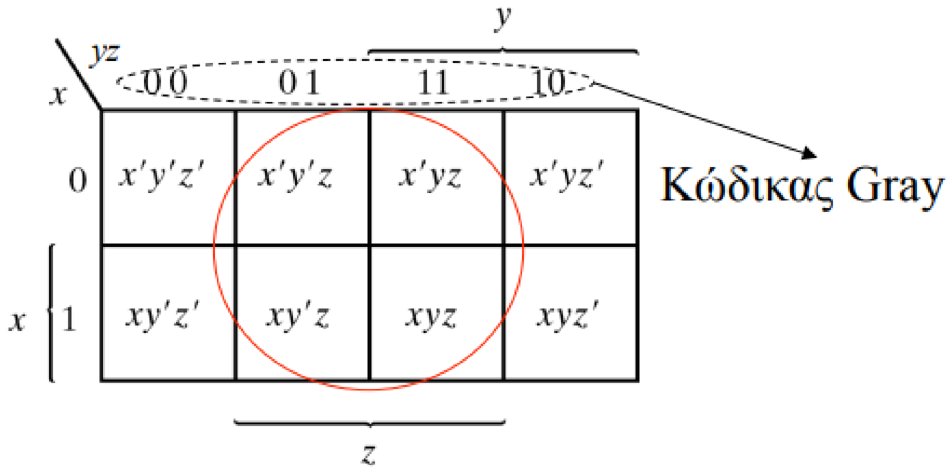
Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

Το άθροισμα δύο ελαχιστόρων της συνάρτησης που βρίσκονται σε γειτονικά τετράγωνα απλοποιείται σε ένα όρο ΚΑΙ με δύο μόνο παράγοντες.



Τέσσερα γειτονικά τετράγωνα

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6



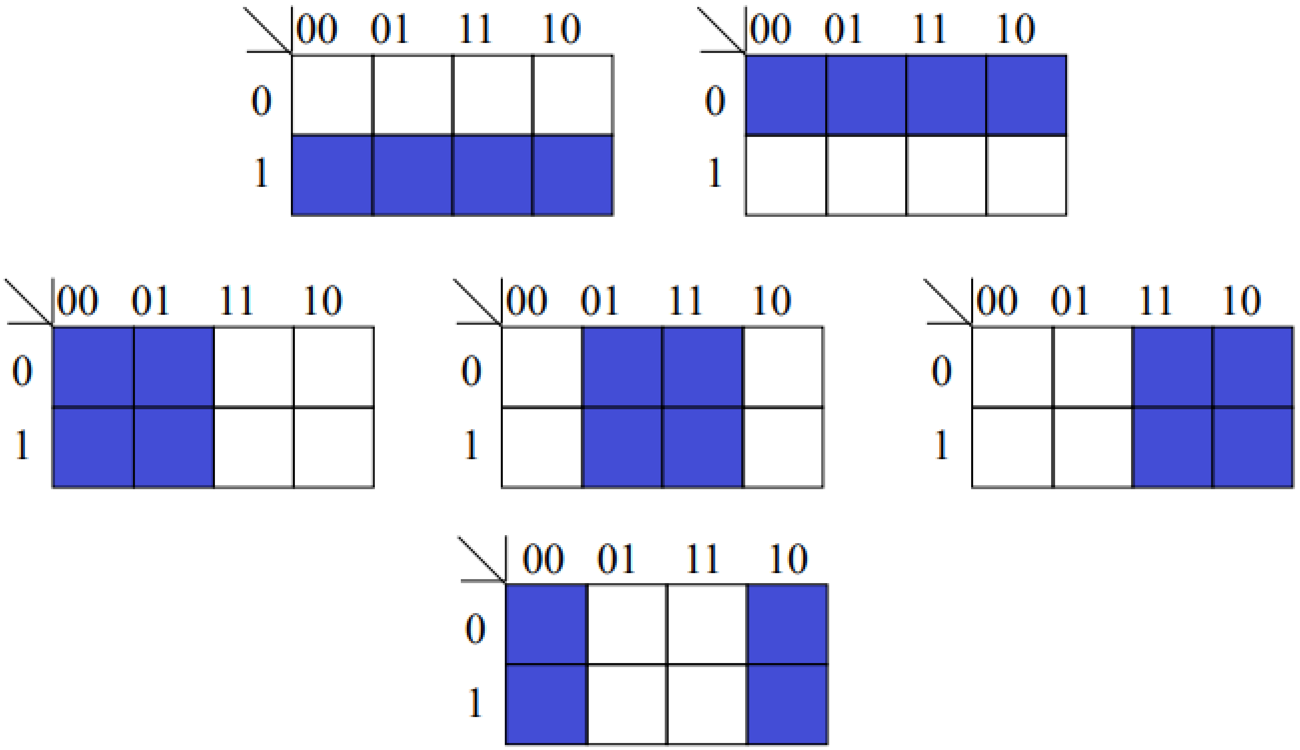
Κάθε τέσσερα γειτονικά τετράγωνα διαφέρουν σε δύο μεταβλητές

Διαγραφή μεταβλητών και απλοποίηση αθροίσματος

πχ. m1+m3+m5+m7 = x΄y΄z+x΄yz+xy΄z+xyz = x΄z(y΄+y) + xz(y΄+y) = x΄z+xz = (x΄ +x)z = z

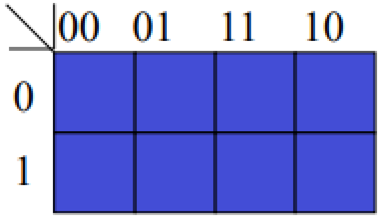
Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

Το άθροισμα τεσσάρων ελαχιστόρων της συνάρτησης που βρίσκονται σε γειτονικά τετράγωνα απλοποιείται σε ένα όρο με ένα μόνο παράγοντα.



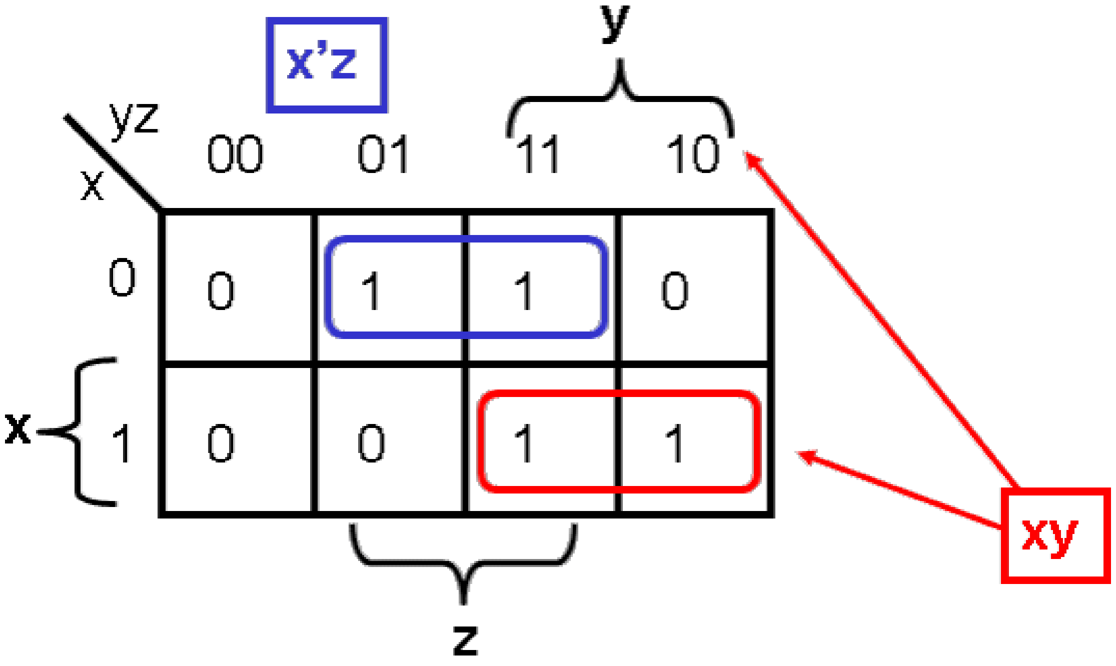
Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

Το άθροισμα οκτώ ελαχιστόρων της συνάρτησης που βρίσκονται σε γειτονικά τετράγωνα καταλαμβάνει όλο το χάρτη και παριστάνει τη συνάρτηση που είναι πάντα ίση με 1.



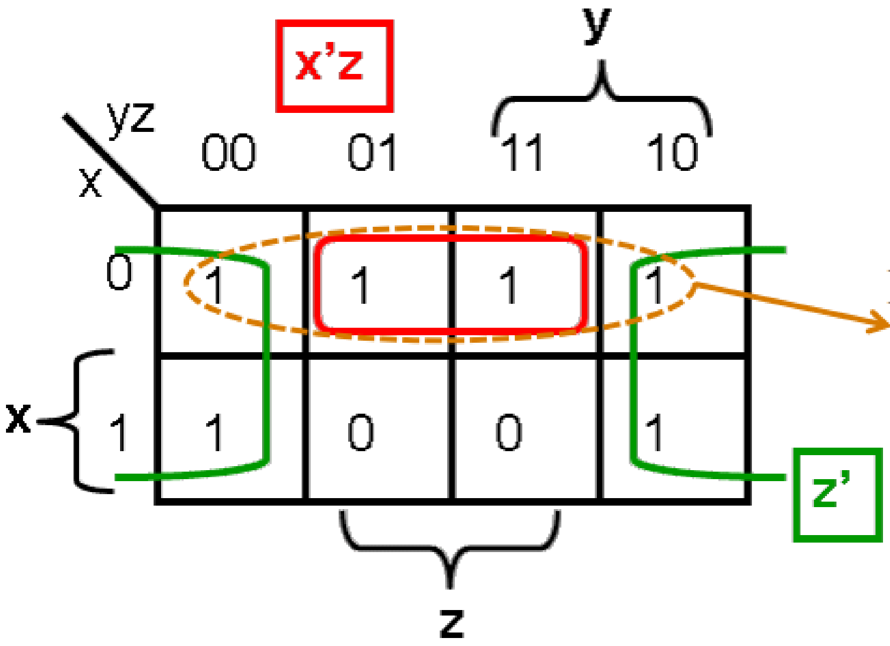
Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

F(x,y,z) = x'z + xy



Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

$F(x,y,z) = x'z + z'$



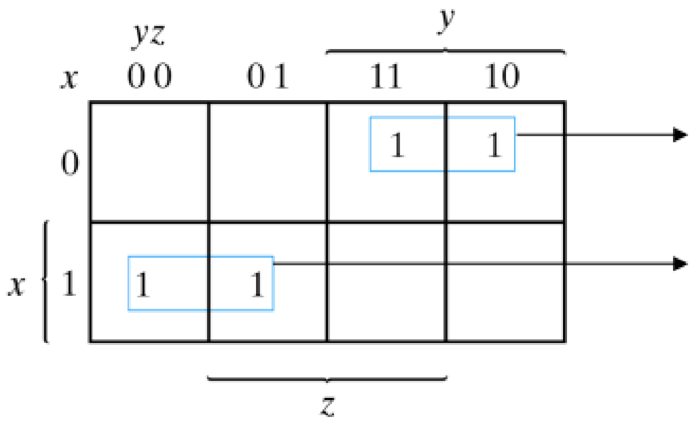
Η ομάδα x'z δεν είναι βέλτιστη

Η οριζόντια τετράδα δίνει απλοποιούμενη τον όρο x'

$F(x,y,z) = x' + z'$

Παραδείγματα Χάρτη Τριών (3) Μεταβλητών

$F(x,y,z) = \Sigma(2,3,4,5)$

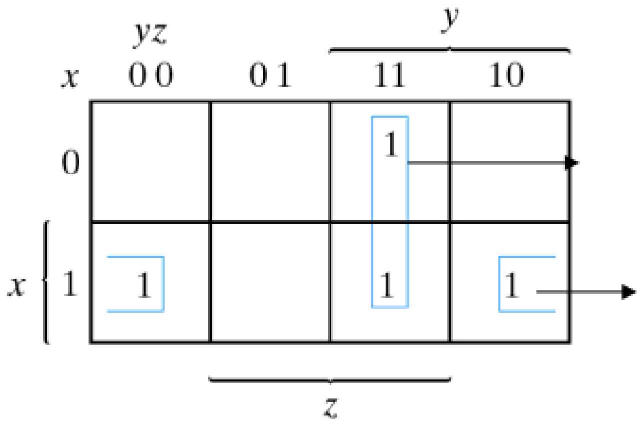


$x'yz + x'yz' = x'y$

$xy'z' + xy'z = xy'$

$F(x,y,z) = x'y + xy'$

$F(x,y,z) = \Sigma(3,4,6,7)$



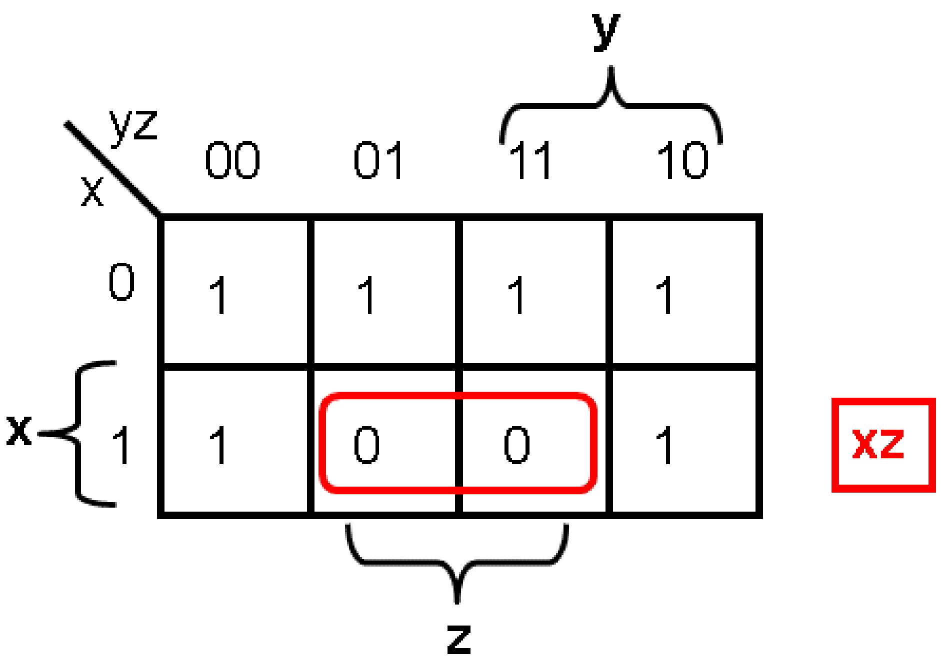
$x'yz + xyz = yz$

$xy'z' + xyz' = xz'$

$F(x,y,z) = yz + xz'$

Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

$F'(x,y,z) = xz$ → $\boxed{F(x,y,z) = x' + z'}$



Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

Ο χάρτης περιέχει 16 τετράγωνα, ένα για κάθε ελαχιστόρο. Οι ελαχιστόροι τοποθετούνται σε σειρά όμοια με τον κώδικα Gray.

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

Κάθε 2^n γειτονικά τετράγωνα διαφέρουν σε n μεταβλητές και οδηγούν σε έναν όρο ΚΑΙ με k – n παράγοντες, όπου k το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης.

2 τετράγωνα: όρος με 3 μεταβλητές
4 τετράγωνα: όρος με 2 μεταβλητές
8 τετράγωνα: όρος με 1 μεταβλητή

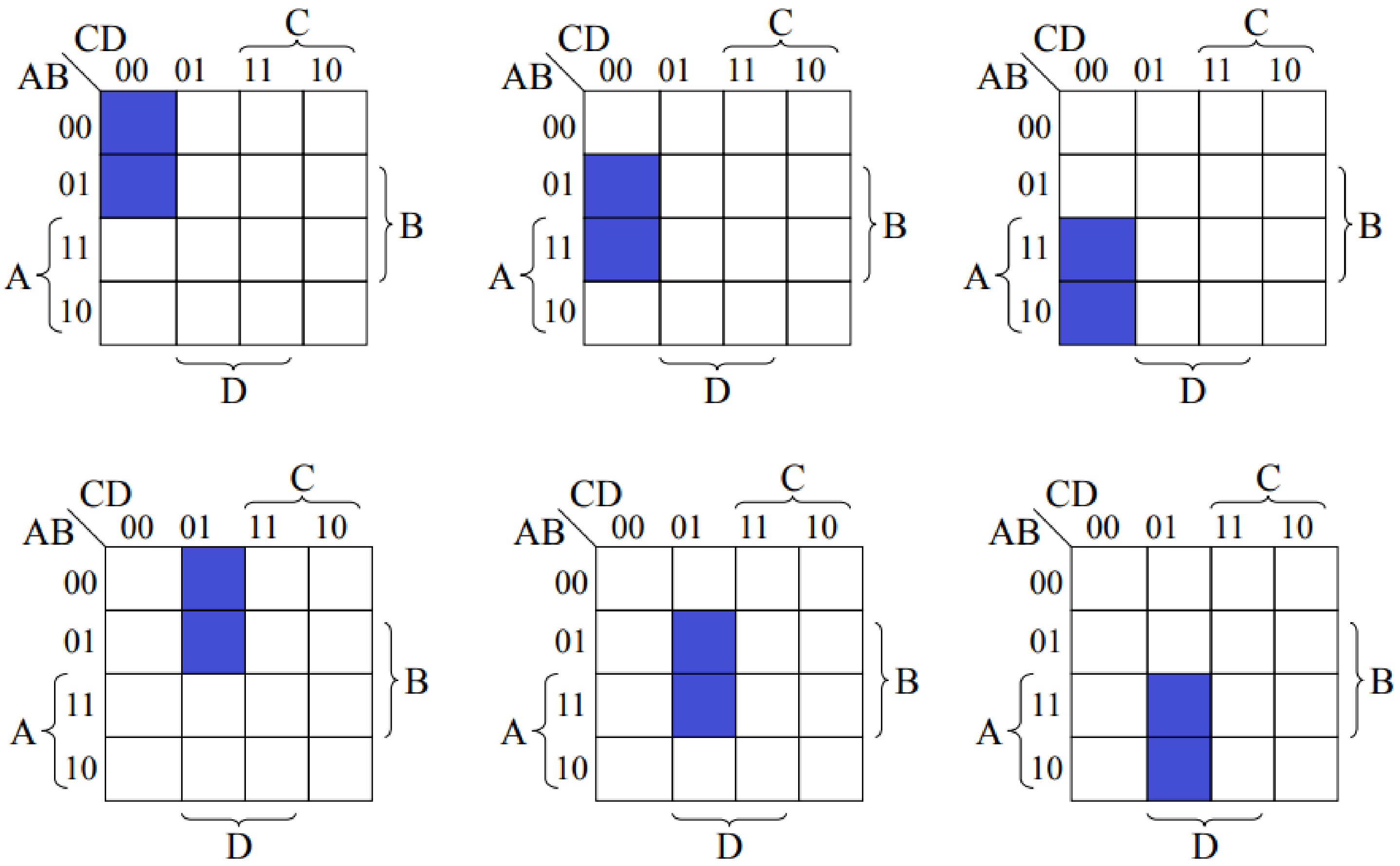
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

wx \ yz	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

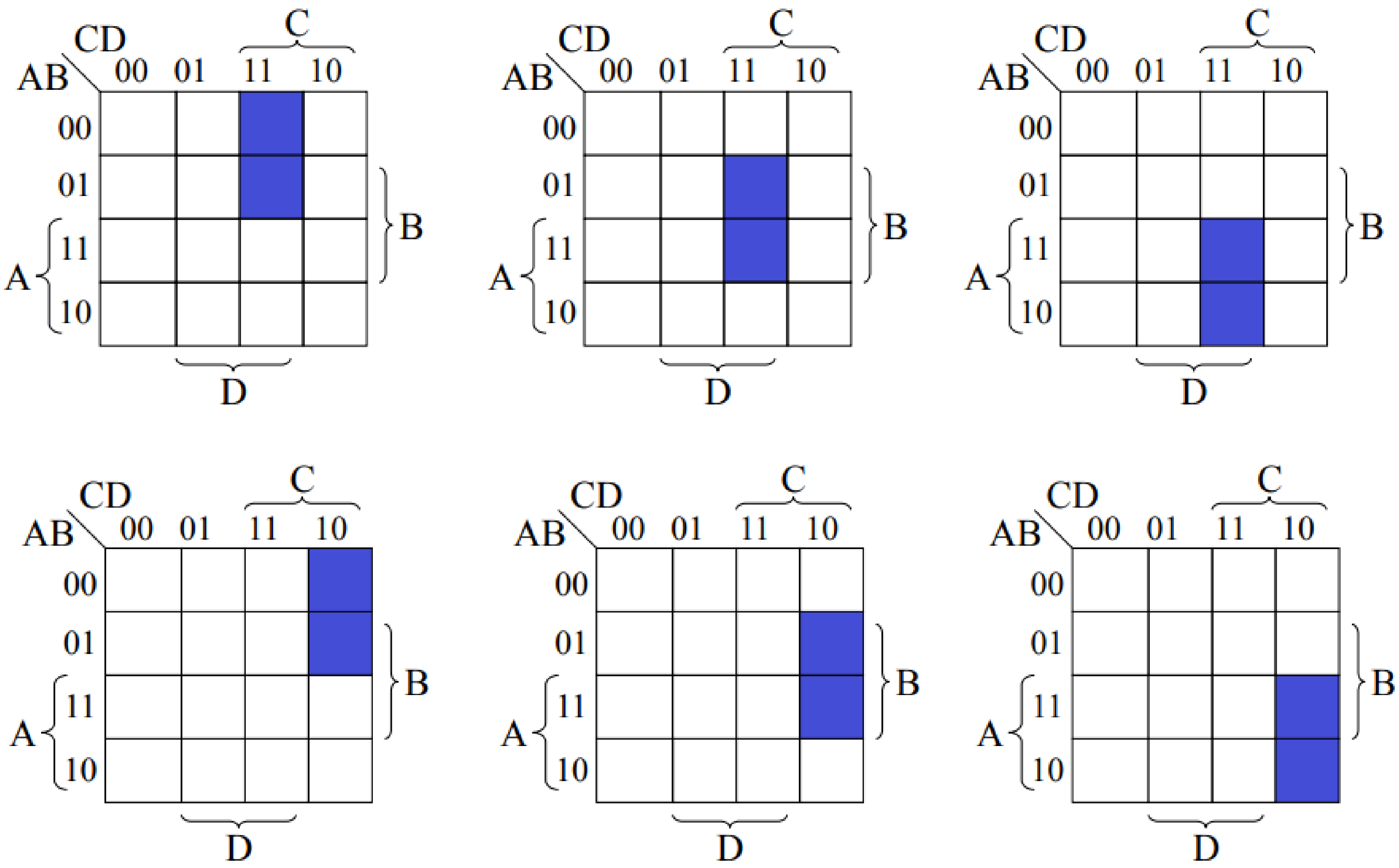
Ο χάρτης θεωρείται ότι μπορεί να διπλωθεί οριζόντια και κάθετα. Έτσι η 1η και η 4η στήλες και γραμμές θεωρούνται γειτονικές

Το πλήθος των λογικών μονάδων κάθε γειτονιάς είναι δύναμη του 2. Δηλαδή κάθε γειτονιά αποτελείται από 1,2,4 ή 8 λογικές μονάδες.

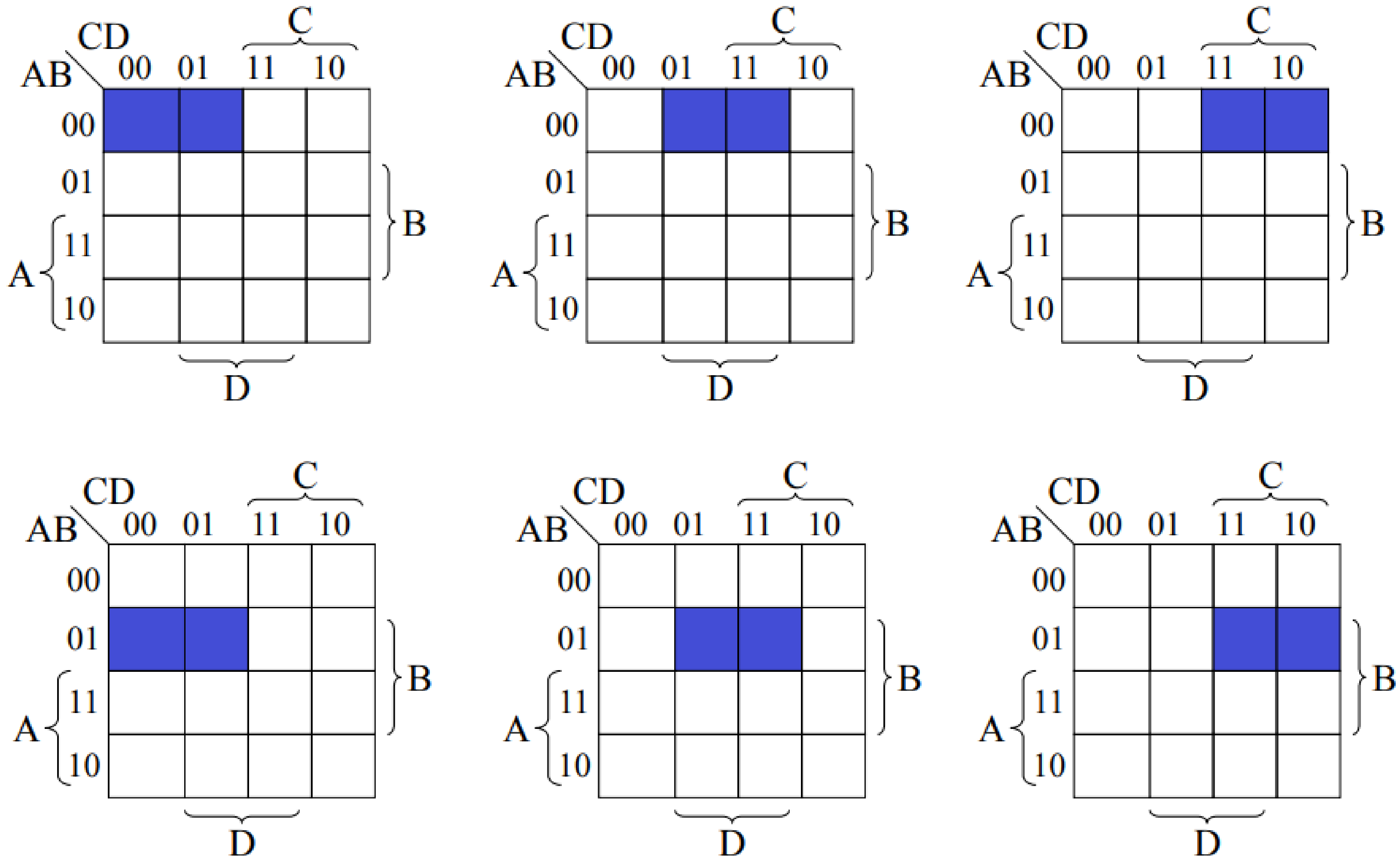
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



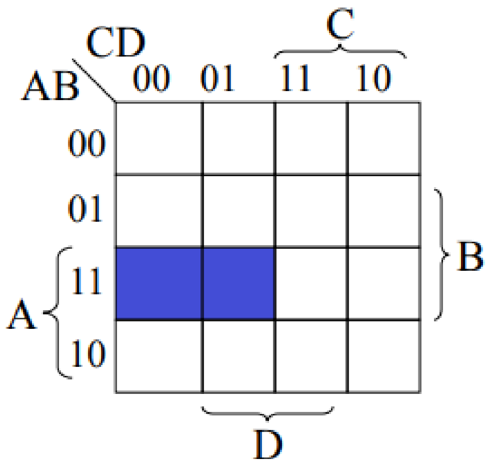
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

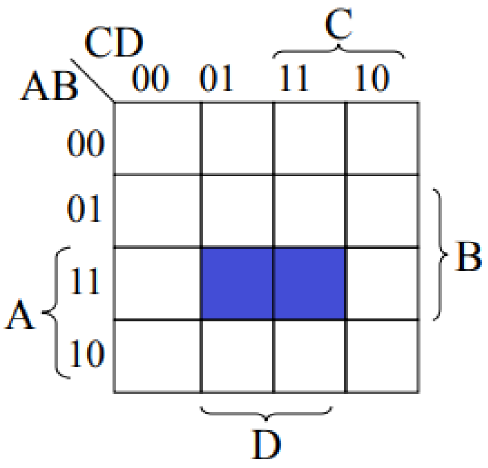


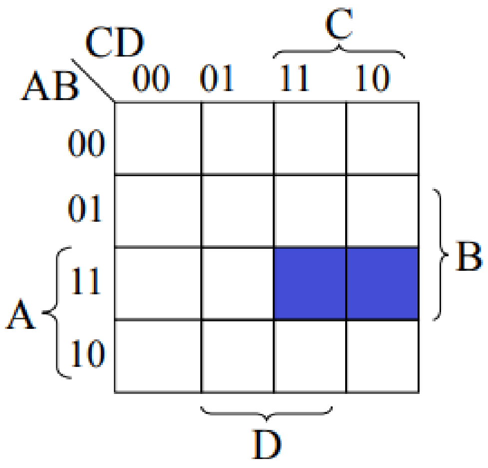
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

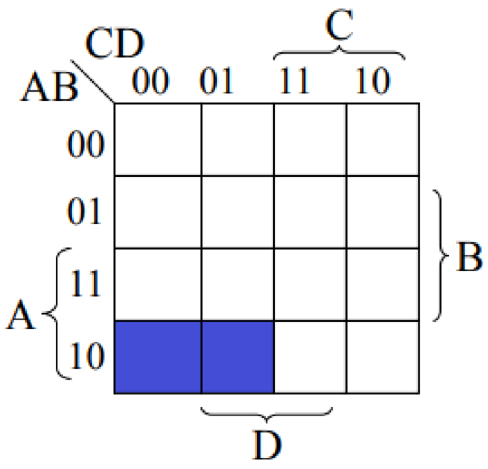


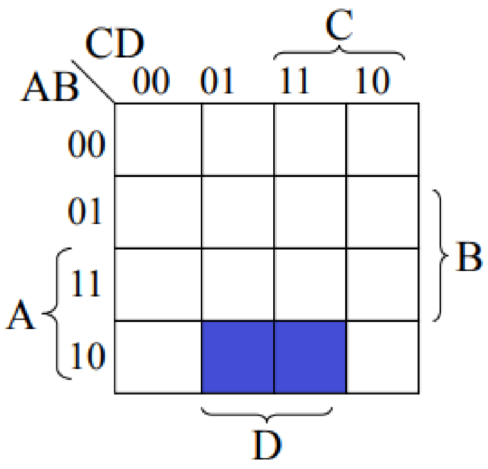
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

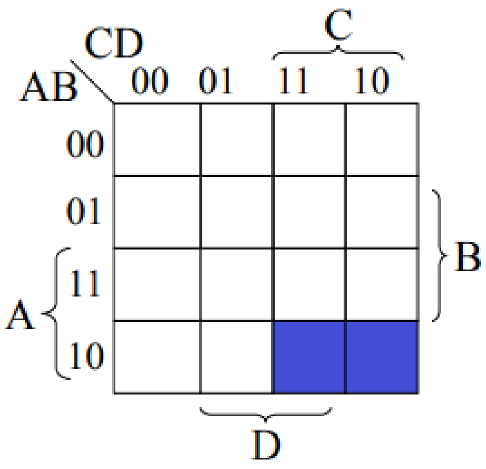




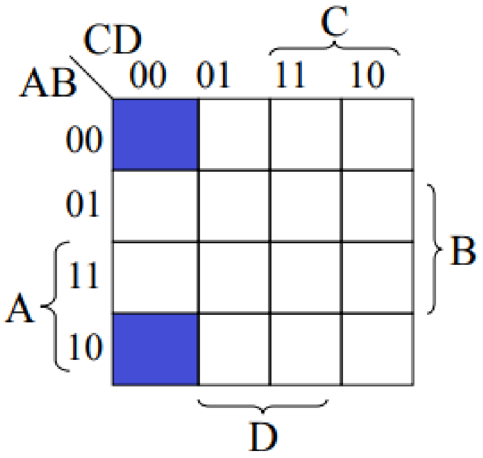


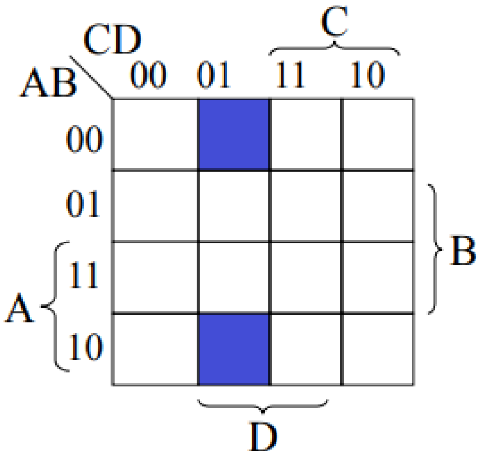


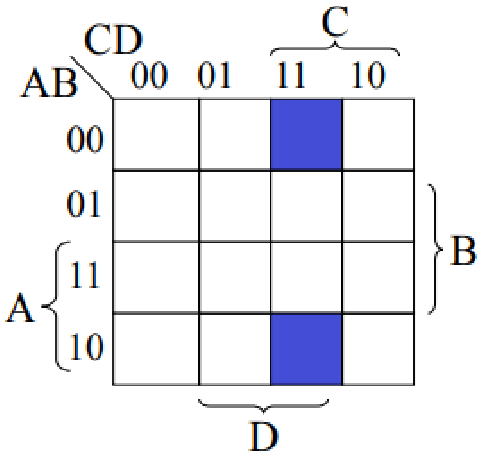


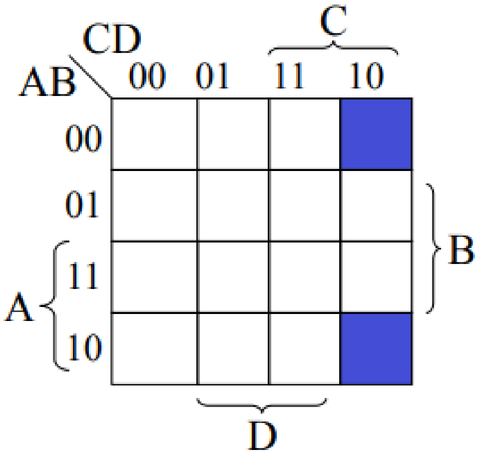


Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

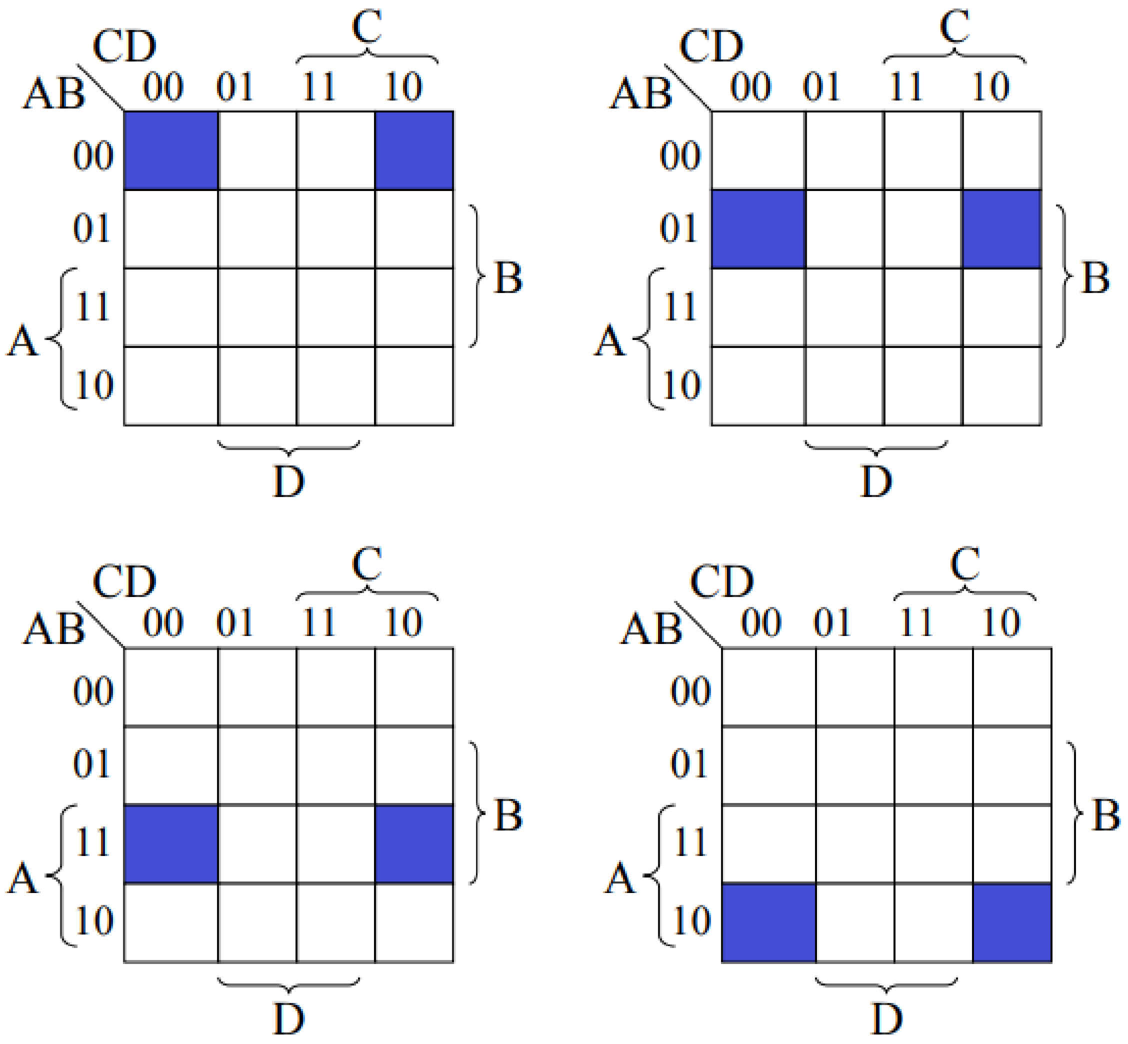




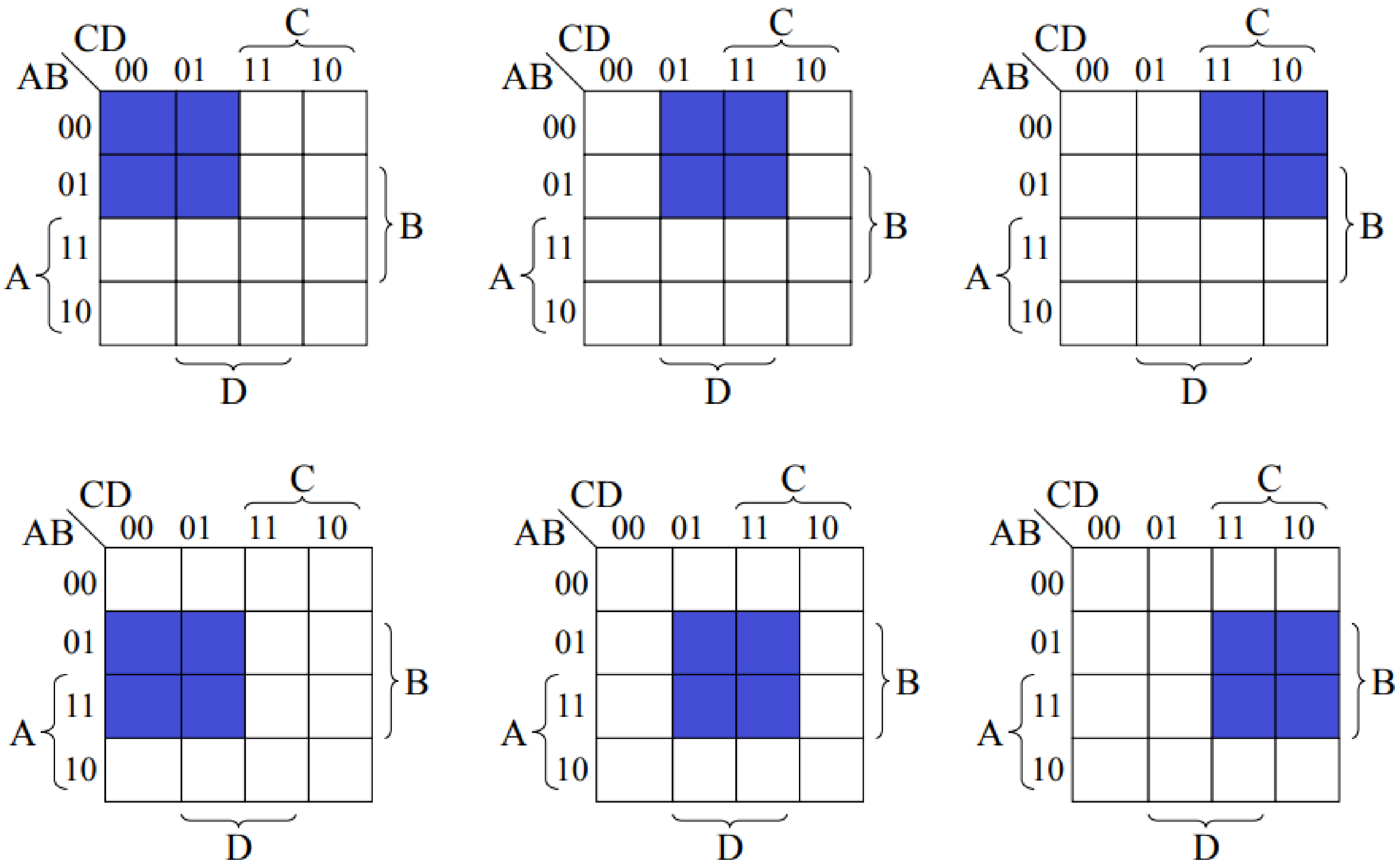




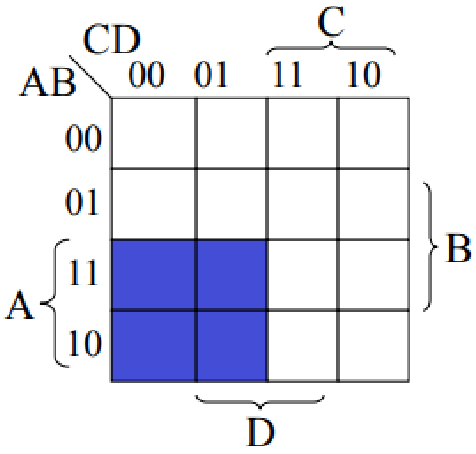
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

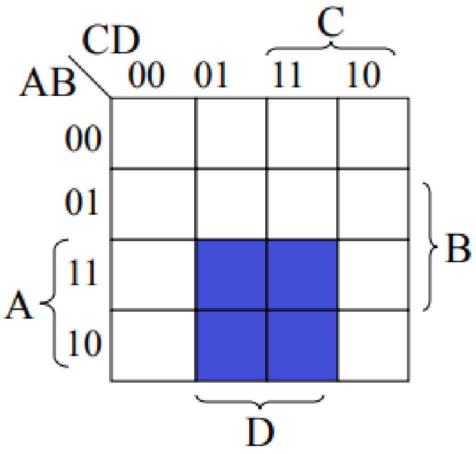


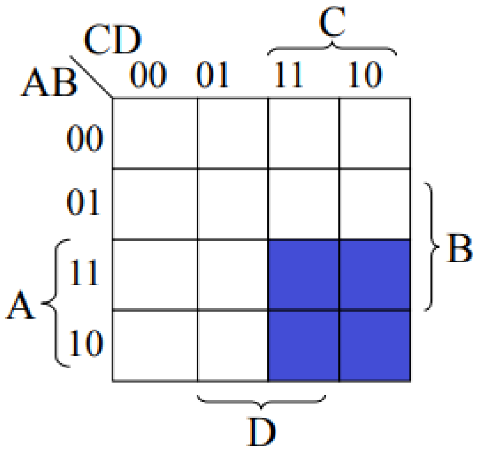
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

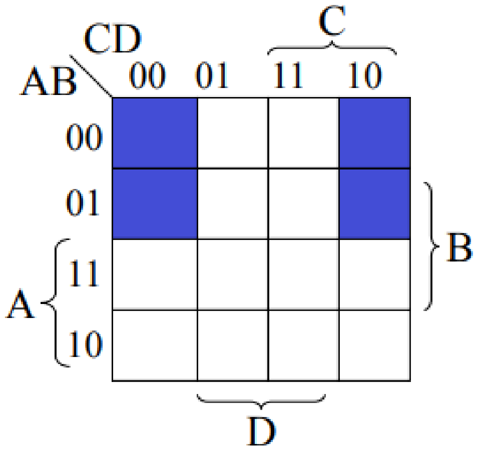


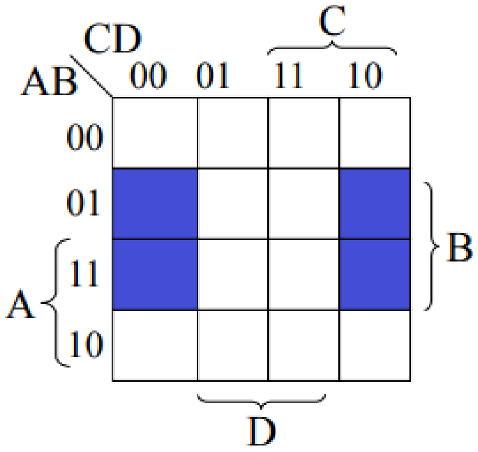
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

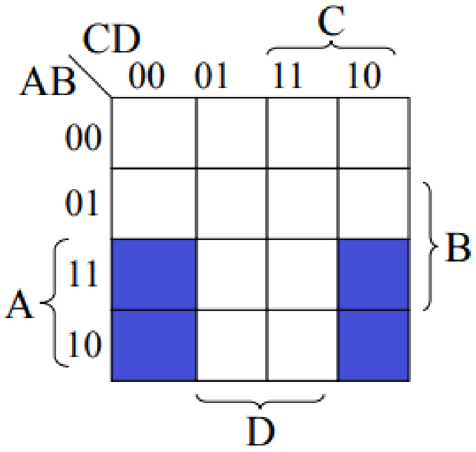




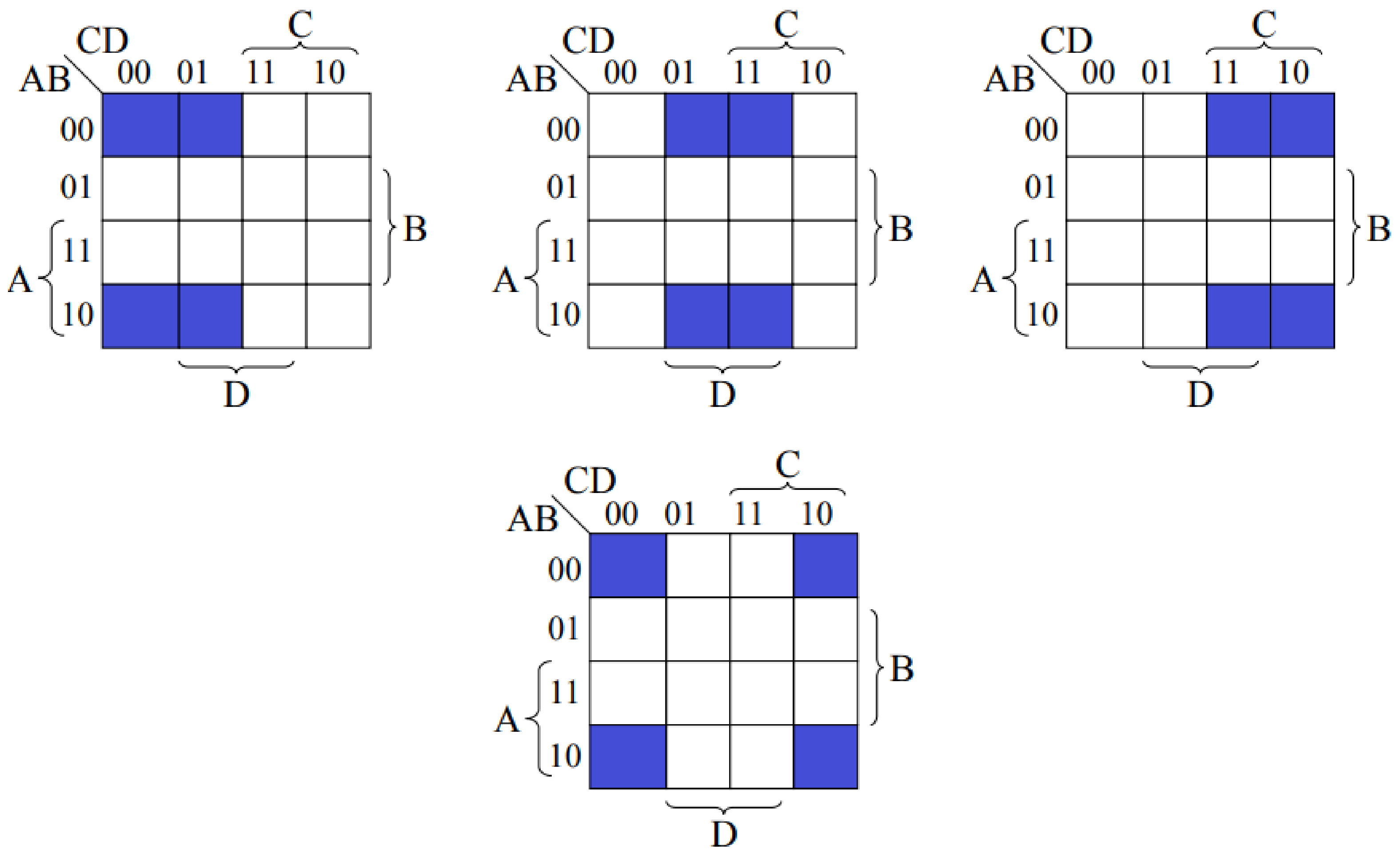




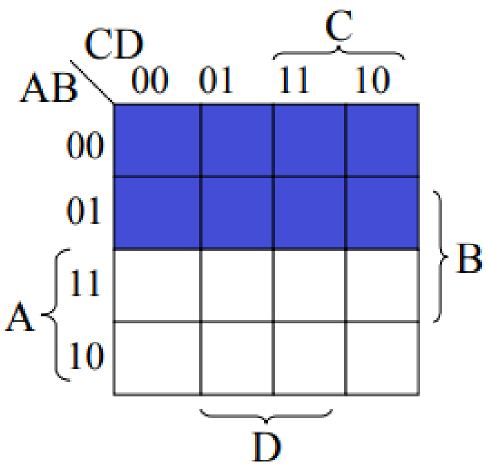


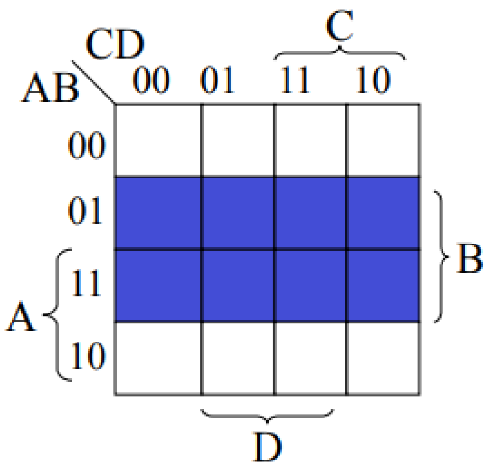


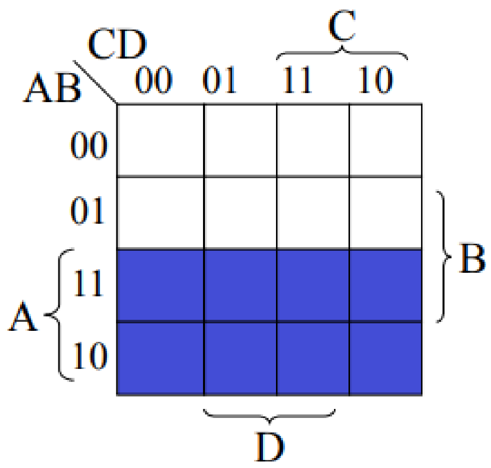
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

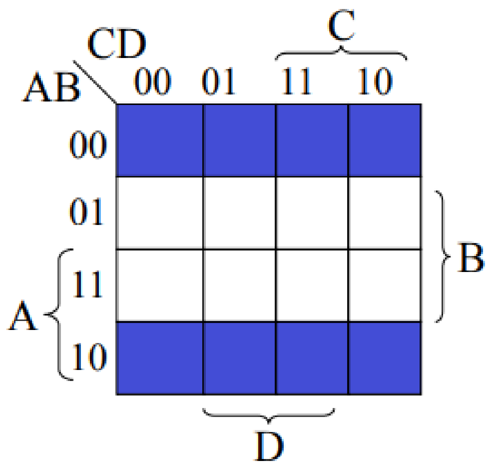


Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

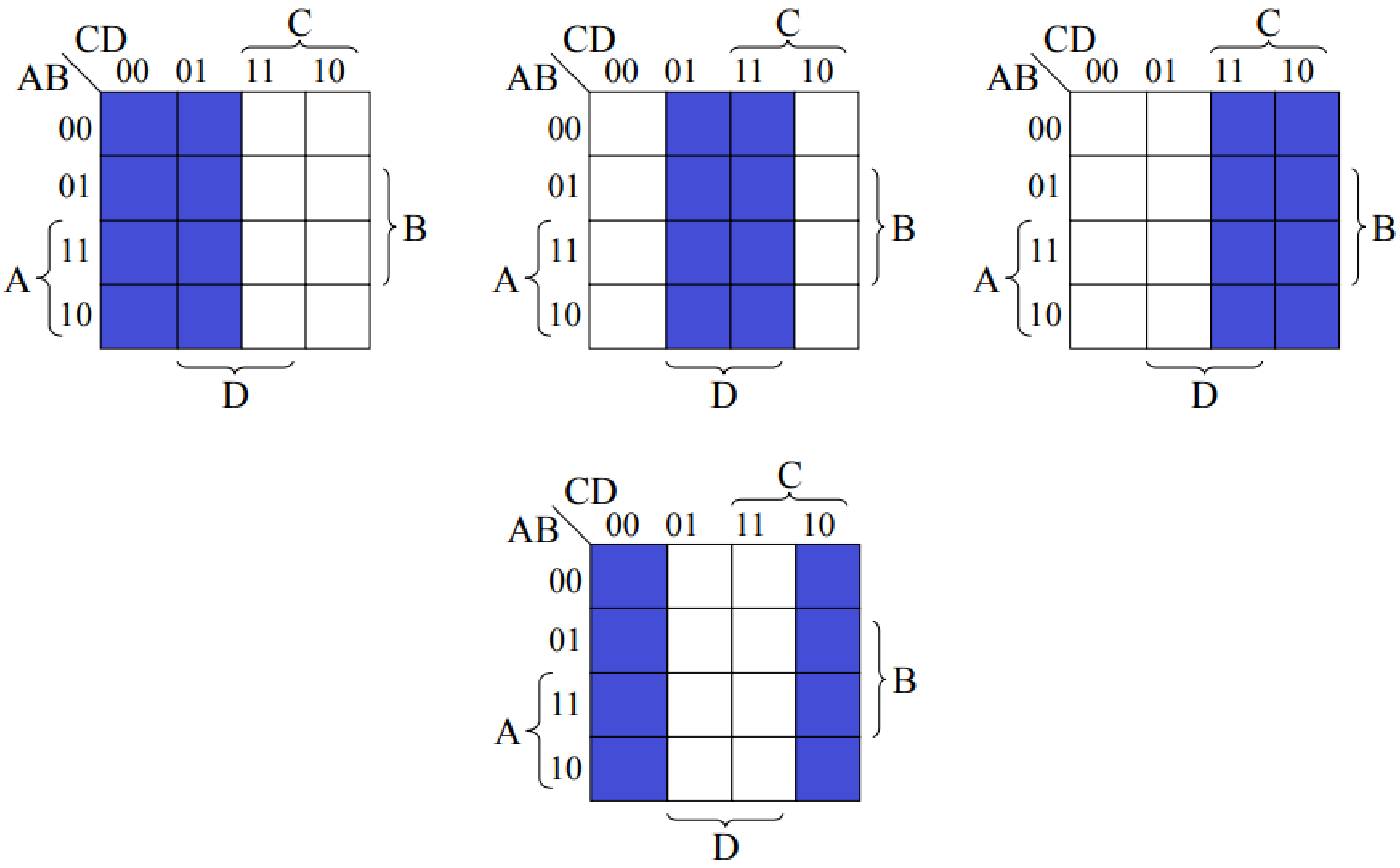




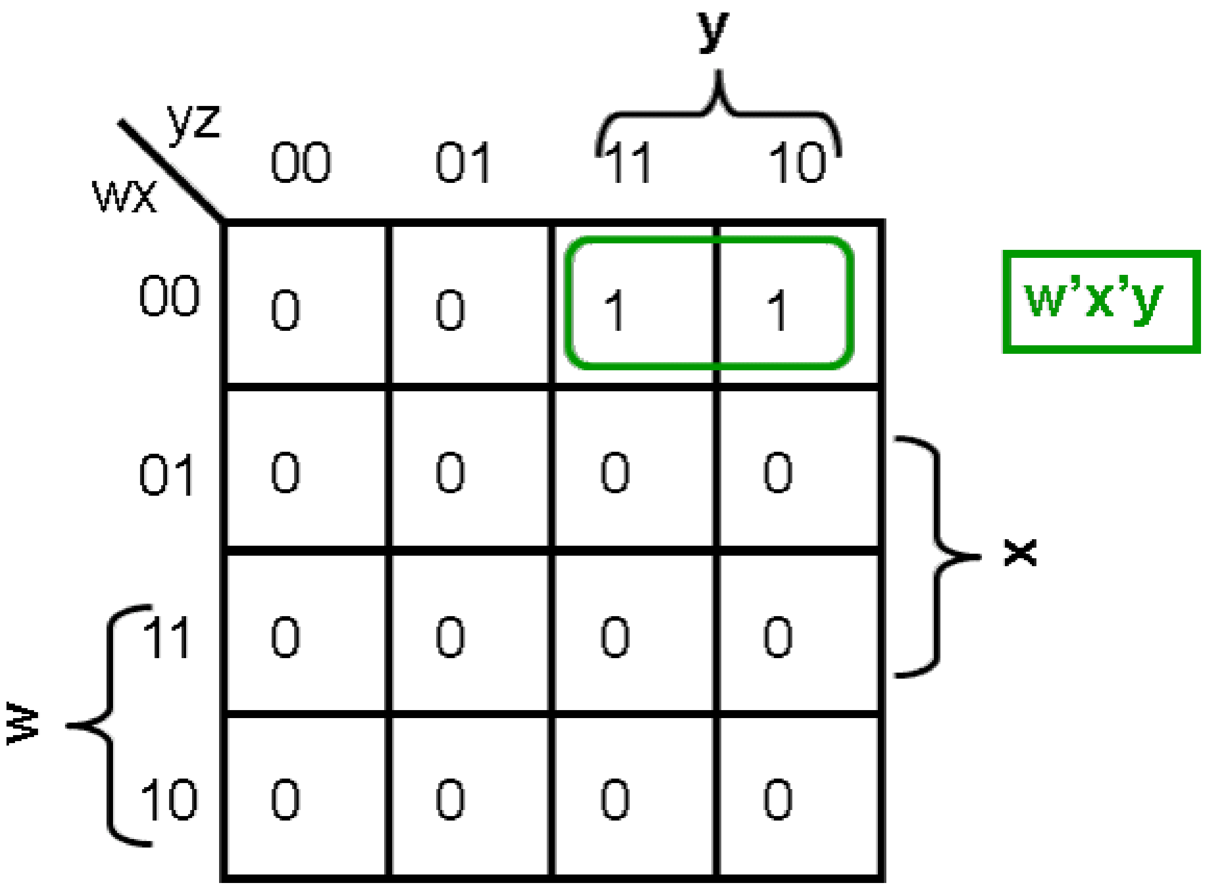




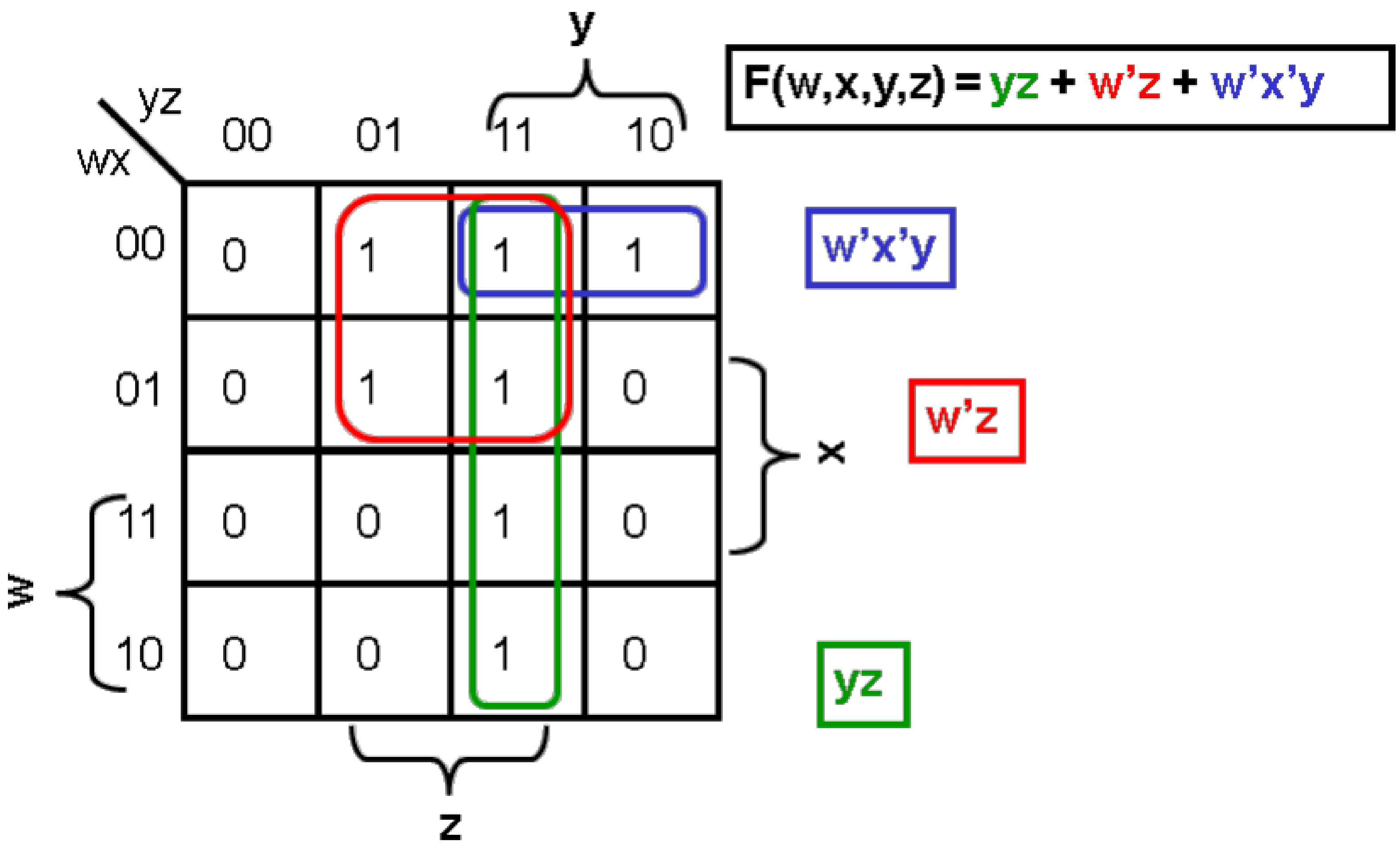
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



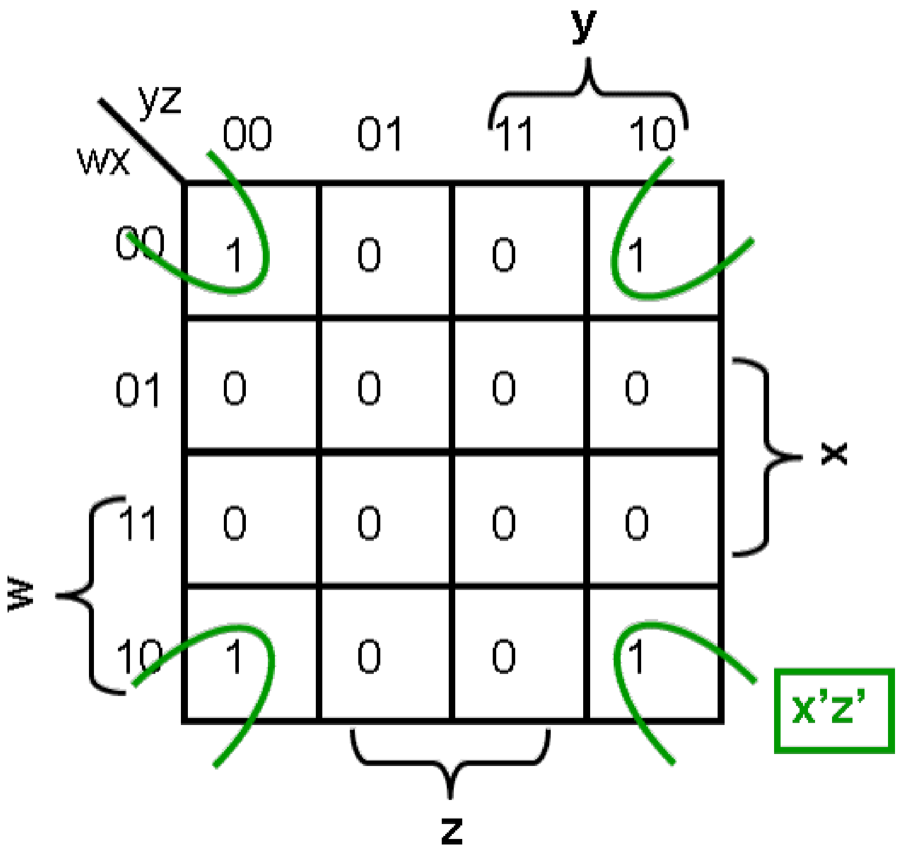
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



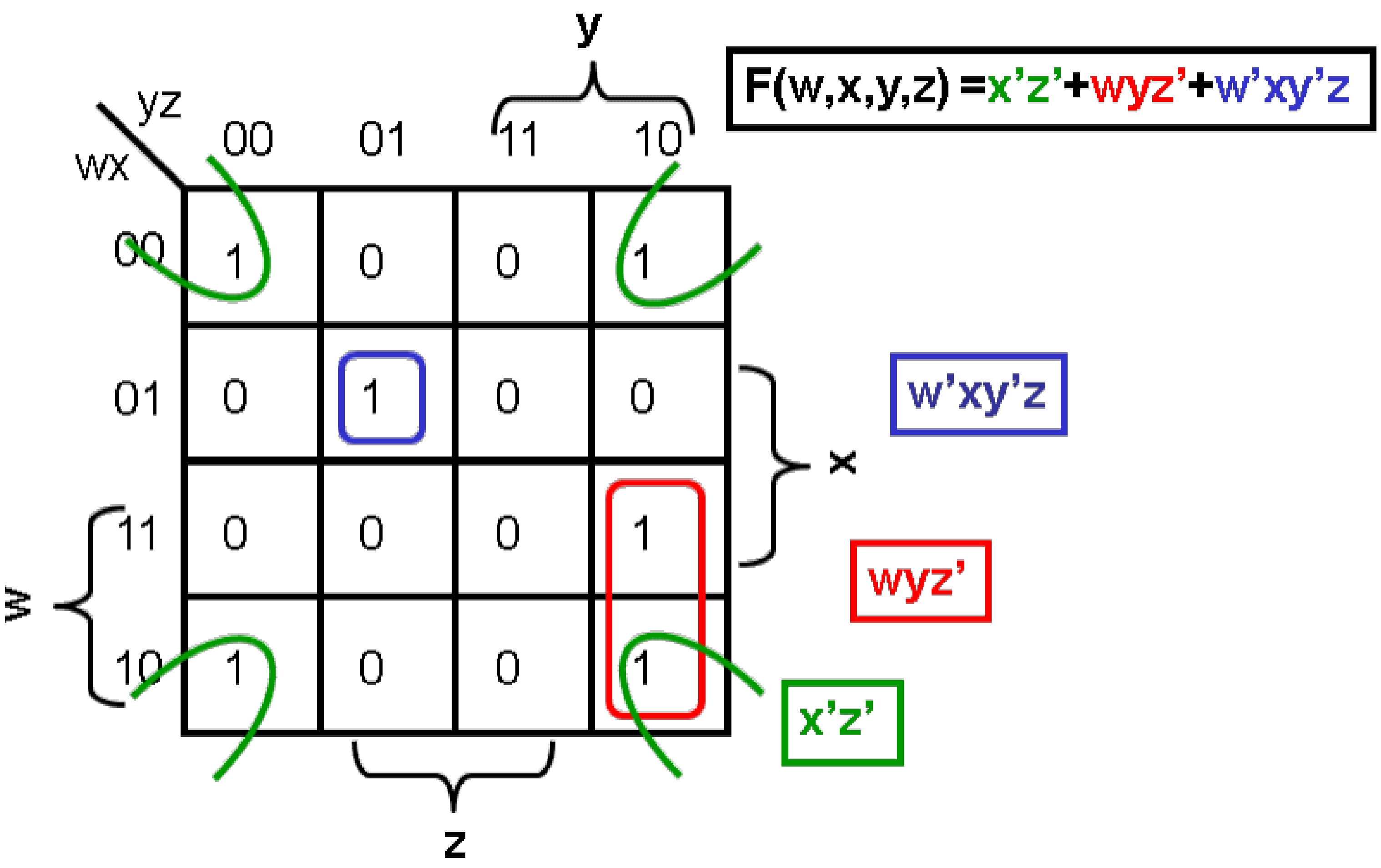
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

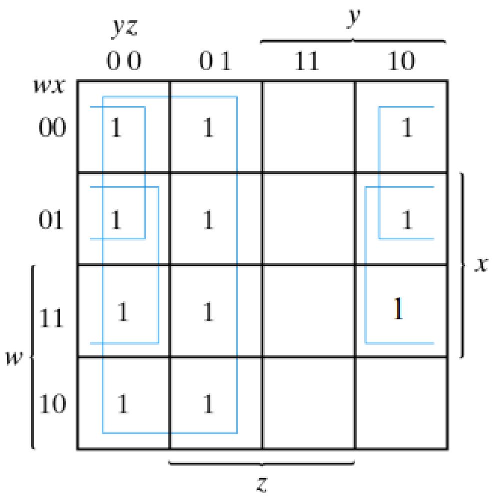


Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

Να απλοποιηθεί η συνάρτηση $F(w,x,y,z) = \Sigma(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$

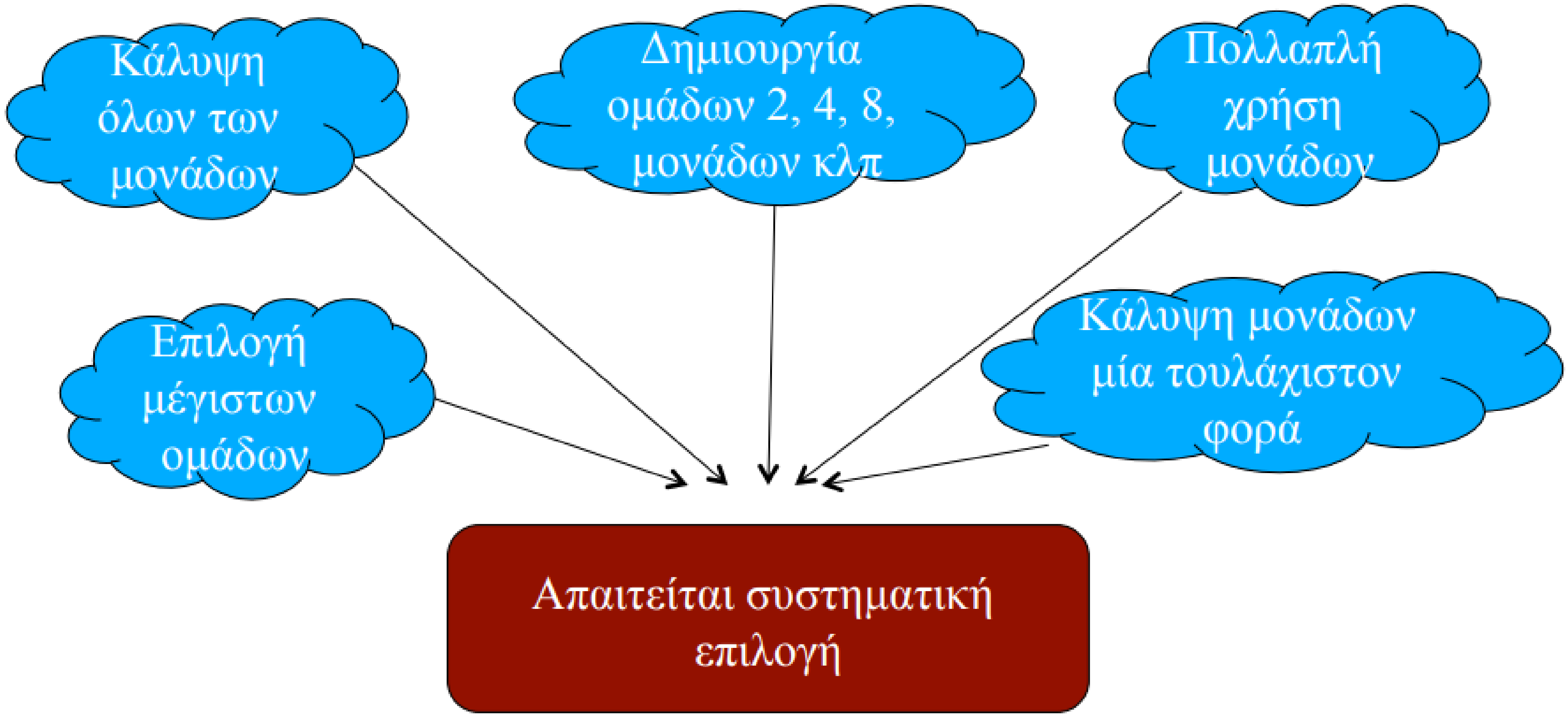
$F(w,x,y,z) =$

$w'x'y'z' + w'x'y'z + w'x'yz' + w'xy'z' + w'xy'z + w'xyz' + wx'y'z' + wx'y'z + wxy'z' + wxy'z + wxyz'$

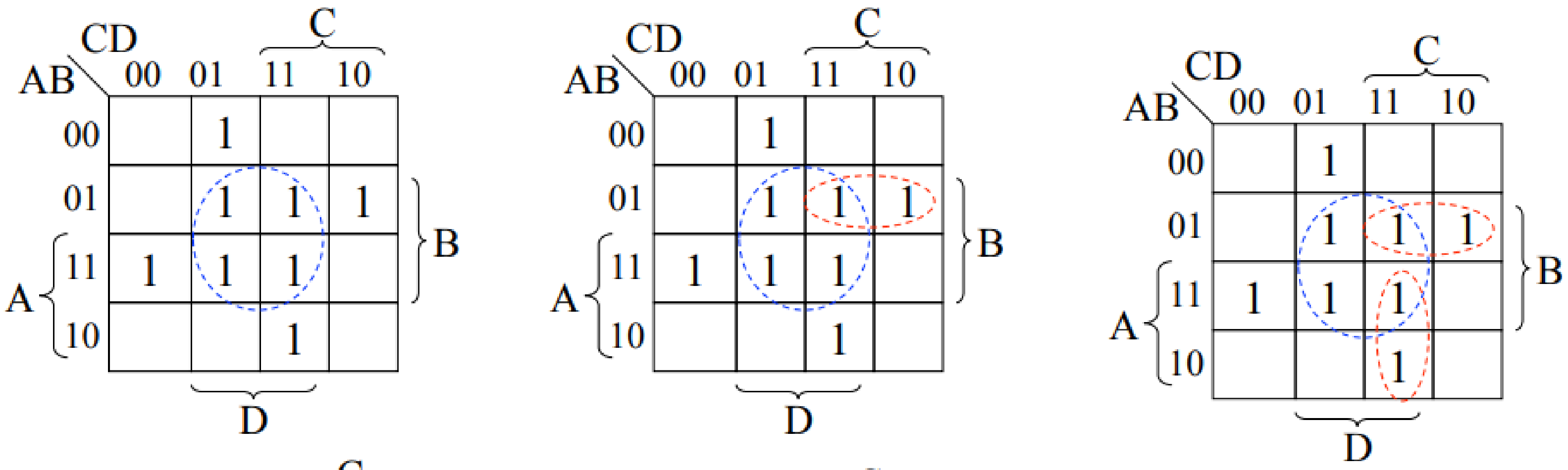


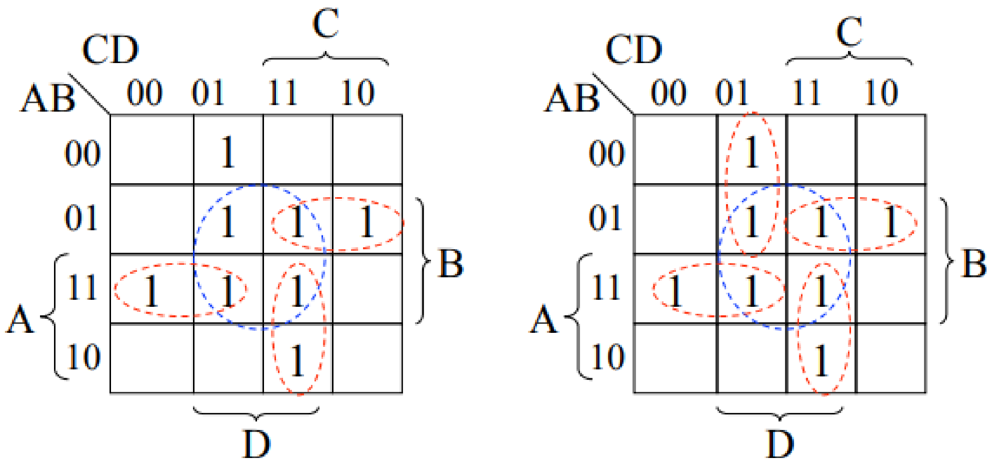
Αποτέλεσμα: $F(w,x,y,z) = y' + w'z' + xz'$

Κριτήρια Απλοποίησης



Παράδειγμα πλεονάζουσας κάλυψης





Τελικά η μπλε ομάδα χρειάζεται;;;;

Απλοποίηση Γινομένων Αθροισμάτων

Βασική αρχή:

$$\underbrace{m_0+m_1+\ldots}_{\text{Άθροισμα γινομένων}} = \underbrace{M_0M_1\ldots}_{\text{Γινόμενο Αθροισμάτων}}$$

<u>Διαδικασία απλοποίησης για γινόμενο αθροισμάτων</u>

- Φτιάχνουμε το χάρτη της F όπως γνωρίζουμε.
- Απλοποιούμε την F΄, συνδυάζοντας τα μηδενικά (αντί για τους άσσους).
- Το αποτέλεσμα είναι ένα ελαχιστοποιημένο άθροισμα γινομένων.
- Αντιστρέφουμε την F΄ με το θεώρημα De Morgan, οπότε προκύπτει η F ως γινόμενο αθροισμάτων.

Απλοποίηση Γινομένων Αθροισμάτων

<u>Άθροισμα Γινομένων</u> (συνδυασμός άσσων)

$$F(A,B,C,D) = \Sigma(0,1,2,5,8,9,10),\ F = B'D' + B'C' + A'C'D$$

<u>Γινόμενο Αθροισμάτων</u> (συνδυασμός μηδενικών)

$$F'(A,B,C,D) = \Sigma(3,4,6,7,11,12,13,14,15) = AB + CD + BD',$$

$$F(A,B,C,D) = F''(A,B,C,D) = \overline{AB + CD + BD'}' = (A'+B')\,(C'+D')\,(B'+D)$$

<u>Παράδειγμα</u>:

Έστω η συνάρτηση F(A,B,C,D) = Σ(0,1,2,5,8,9,10)

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1

C (columns 11, 10); D (columns 01, 11); B (rows 01, 11); A (rows 11, 10)